

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНОЙ  
РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ»

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний

Составители В.С. Мелентьев, А.С. Гвоздев, А.М. Уланов

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2017

Составители *В. С. Мелентьев, А. С. Гвоздев, А. М. Уланов*

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *В. Б. Балякин*

**Порядок выполнения расчётной работы по дисциплине «Основы метода конечных элементов»:** метод. указания / сост. *В.С. Мелентьев, А.С. Гвоздев, А.М. Уланов.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 21 с.: ил.

Представлено описание алгоритма выполнения расчётной работы по дисциплине «Основы метода конечных элементов» с расчётным примером, основанном на системе из двух плоских трёхузловых конечных элементов. Рассмотрены все основные этапы работы, включая выдачу задания, построение расчётной схемы, составление разрешающих матриц, нахождение перемещений и реакций в узлах конечных элементов. По ходу изложения даны рекомендации по правильному заданию граничных условий, средства самопроверки, наглядные методы работы с матрицами, а также освещаются прочие вопросы, обычно вызывающие затруднения при решении задач о деформировании тел методом конечных элементов.

Учебное пособие предназначено для магистров по направлению подготовки 24.04.05 «Интегрированные информационные технологии в авиадвигателестроении», бакалавров по направлению подготовки 24.03.05 «Проектирование авиационных двигателей и энергетических установок», и 15.03.05 «Технология производства двигателей», а также специалистов по направлению подготовки 24.05.02 «Управление проектами и интегрированные информационные технологии в авиадвигателестроении», изучающих дисциплины: «Основы метода конечных элементов» и «Аналитические и численные методы в авиационной и космической технике», а также учебное пособие может быть полезно и для других факультетов и специалистам в области проектирования аэрокосмической техники.

Подготовлено на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского университета.

## Содержание

Раздел №1	
Формирование расчётной схемы с учётом внешних нагрузок.....	4
Раздел №2	
Расчет матриц жесткости отдельных конечных элементов.....	7
Раздел №3	
Формирование матрицы жесткости конструкции, составление разрешающей системы уравнений.....	11
Раздел №4	
Решение системы линейных уравнений, расчет перемещений и реакций в узлах.....	14
Список литературы.....	18
Приложения.....	19

## Раздел №1

### Формирование расчётной схемы с учётом внешних нагрузок

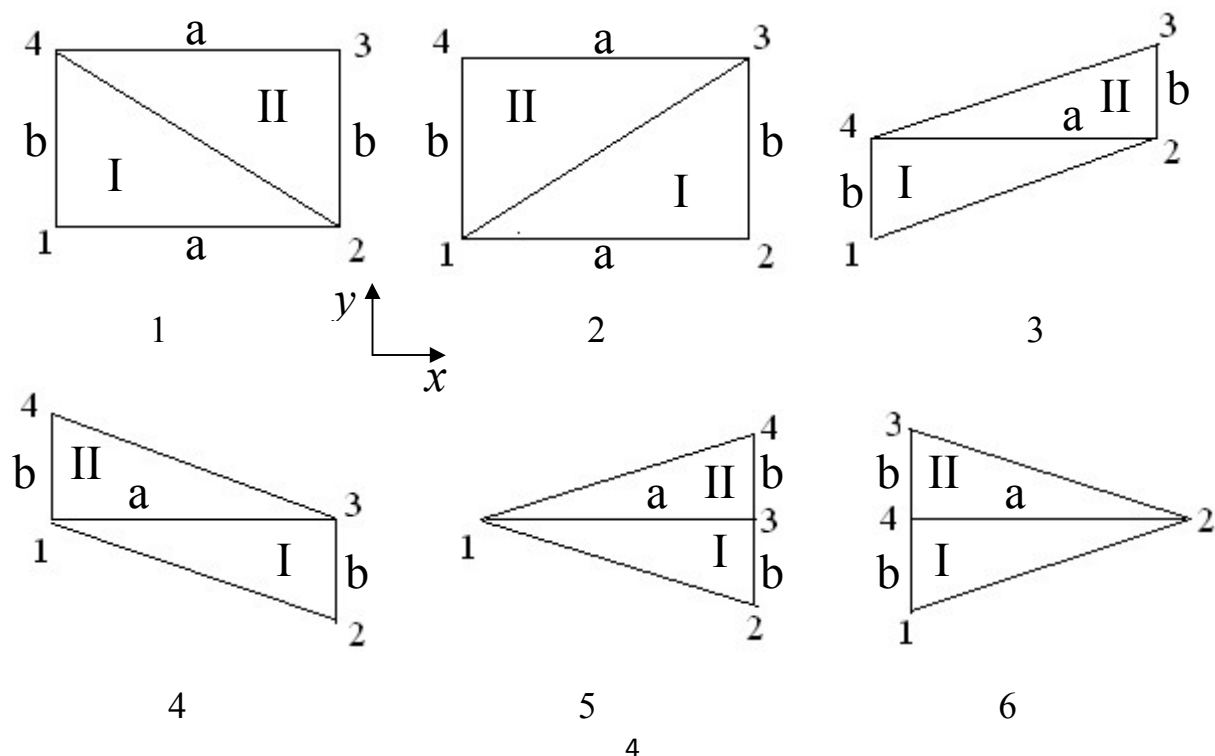
#### Выдача задания на работу

Суть работы состоит в практическом знакомстве с основами применения метода конечных элементов, что достигается за счёт получения навыков аналитического определения перемещений узлов и реакций в системе, состоящей из нескольких, минимум двух, плоских трёхузловых конечных элементов. Данная работа позволяет ознакомиться с математической процедурой расчёта, допущениями и ограничениями метода конечных элементов. Теоретической базой работы является курс лекций по дисциплине «Основы метода конечных элементов», где раскрывается значение таких ключевых терминов, как «конечный элемент», «узел», «степень свободы», а также даётся теоретическое обоснование применяемых расчётных методов. Задание на работу выдаётся в виде таблицы, расшифровка которой приведена далее.

ФАМИЛИЯ	NR	NZ	NA	NB	NH	NF1	NF2	NP1	NP2
---------	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

#### 1. Варианты разбивки NR

Цифрами обозначены номера узлов. Изменять их нельзя. Для упрощения проверки работы рекомендуется размещать центр системы координат в узле 1, ось  $x$  направлять вправо, ось  $y$  вверх. Отрицательные координаты узлов в выбранной системе координат допускаются.



## 2. Варианты закрепления (номера закрепленных узлов)

В закреплённых узлах перемещения равны нулю, однако возникают реакции.

NZ	1	2	3	4	5	6
Узлы	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

3. Ширина  $a = 0,1 \cdot NA$  (м)

4. Высота  $b = 0,1 \cdot NB$  (м)

Для схем NR = 1, 2:  $a$  – длина линии между узлами 1 – 2;  $b$  – между 1 – 4.

Для схем NR = 3, 6:  $a$  – длина линии между узлами 2 – 4;  $b$  – между 1 – 4.

Для схем NR = 4, 5:  $a$  – длина линии между узлами 1 – 3;  $b$  – между 2 – 3.

5. Толщина  $h = 0,002 \cdot NH$  (м)

6. Сосредоточенная сила – действует в положительном направлении оси  $y$   
Приложена к узлу с номером NF1.

Величина силы  $P_{yNF1} = 5000 \cdot NF2$  (Н)

7. Распределенная сила ( $p_{vc}$ ) – действует в положительном направлении оси  $x$

Она приложена вдоль всей линии, условно проводимой между двумя заданными узлами системы  $v$  и  $c$  (см. табл. ниже), не обязательно вдоль границ КЭ, и при расчёте заменяется сосредоточенными силами, действующими в узлах. Для простоты, считаем, что нагрузка распределяется поровну между узлами, находящимися в зоне действия распределённой нагрузки. Общую величину нагрузки на **один узел** ( $P_x$ ) можно узнать, умножив распределённую силу на длину линии  $l$ , вдоль которой она действует  $P_{xv} = P_{xc} = p_{vc} \cdot l/n$ , где  $n$  - число узлов, на которые действует сила ( $n = 2$  для большинства схем или  $n = 3$  при наличии промежуточного узла - такая ситуация может возникнуть для схем NR 5, 6).

$l = a$  для всех горизонтальных участков; для вертикальных участков возможно два случая:  $l = b$  для большинства схем либо  $l = 2 \cdot b$ , например, для случаев (NR = 5, NP1 = 5) и (NR = 6, NP1 = 2); для большинства наклонных  $l = (a^2 + b^2)^{0,5}$ , кроме двух случаев (NR = 3, NP1 = 2) и (NR = 4, NP1 = 5), где  $l = (a^2 + (2 \cdot b)^2)^{0,5}$ , поскольку узлы приложения нагрузки отстоят на расстояние  $2b$  вдоль оси  $y$ . Значения сил **округляются** до целых.

NP1	1	2	3	4	5	6
$v, c$	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

Величина распределённой нагрузки  $p_{vc} = 40000 \cdot NP2$  (Н/м)

Материал:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,33$ .

## Выбор расчётной схемы

Рассмотрим систему, состоящую из двух треугольных трёхузловых плоских конечных элементов. Данные элементы могут быть скомбинированы различными способами, рассмотренными выше. Продемонстрируем порядок расчёта на системе, показанной на рис. 1.

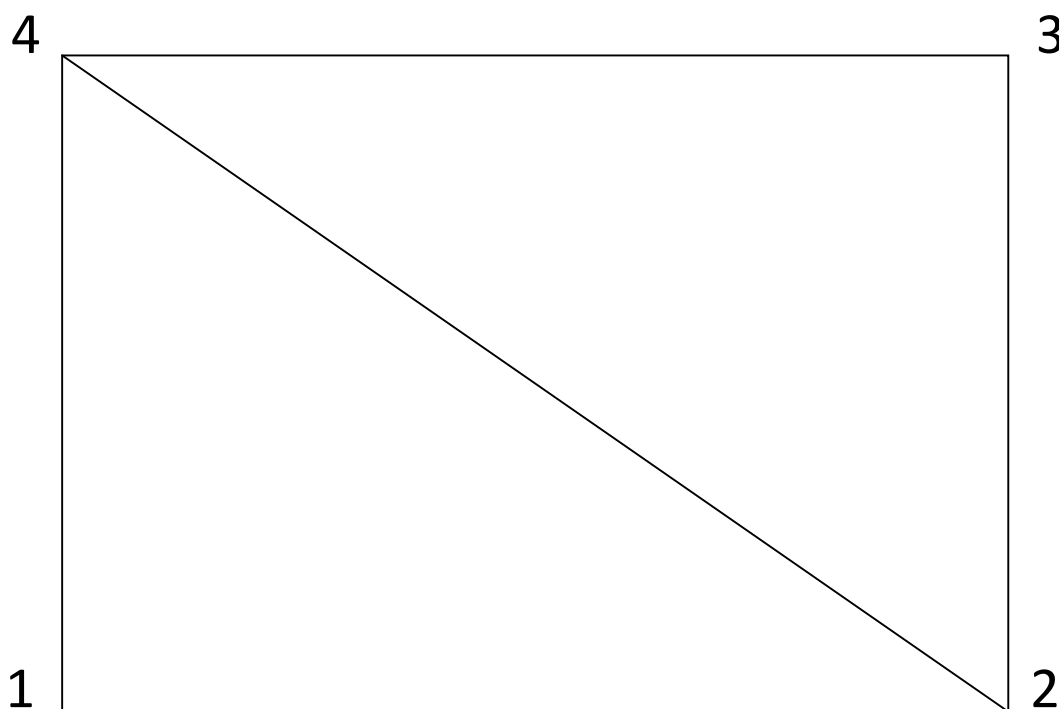


Рис. 1. Схема системы с обозначениями номеров узлов

Данная система представляет собой прямоугольник, стороны которого имеют размеры  $a$  (линия 1-2) и  $b$  (линии 1-4), толщиной  $h$ .

**ВНИМАНИЕ!** Все вычисления должны производиться в метрической системе.

Пусть глобальная система координат, в которой будут производиться все расчёты, находится в узле №1. Всего данная система имеет восемь степеней свободы: перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$  в каждом из узлов. Обозначим их  $q_{ji}$ , где  $j$  – ось перемещения,  $i$  – номер узла. Например,  $q_{x1}$  – это перемещение вдоль оси  $x$  в узле №1,  $q_{y3}$  – перемещение вдоль оси  $y$  в узле №3.

При расчёте рекомендуется использовать 5 или 6 значащих цифр, при оформлении указывать только 4. Коэффициенты в матрицах записываются в виде  $x,xxx \cdot 10^{xx}$  (см. пример).

### Задание граничных условий

Зададим жёсткую заделку в нижней части прямоугольника (вдоль линии 1-2). Тогда перемещения в узлах №1 и №2 отсутствуют, т.е.  $q_{x1} = q_{y1} = q_{x2} = q_{y2} = 0$ . Однако при этом в узлах №1 и №2 будут действовать неизвестные реакции  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}, N_{y2}$ .

На систему также действуют внешние силы. В узле №3 действует направленная вверх сила  $P_{y3}$ , а вдоль линии 1-4 приложена равномерная погонная нагрузка  $p_{14}$  (нагрузка вдоль линии имеет размерность Н/м).

Для дальнейшего расчёта погонную нагрузку необходимо привести к узлам<sup>1</sup>. В силу её равномерности, она распределяется поровну между узлами, и приведение можно выполнить по следующей зависимости:

$$P_{x1} = P_{x4} = p_{14} \frac{b}{2} \quad (1)$$

Для расчёта потребуются модуль жёсткости материала (параметры даны для стали)  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и коэффициент Пуассона  $\mu = 0,33$ .

### Построение векторов перемещений и сил

С учётом вышеизложенного, вектора перемещений  $\{q\}$  и глобальных<sup>2</sup> реакций  $\{N\}$  всех узлов можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Здесь на каждый узел отводится по две строки, описывающие перемещение и реакции в этом узле по осям  $x$  и  $y$ . Номера узлов идут сверху вниз от первого до четвёртого.

Затем к матрице реакций следует прибавить внешние силы (одну сосредоточенную  $P_{yi}$  и две или три от распределённой нагрузки  $P_{xi}$ ) к

<sup>1</sup> Основой МКЭ является предположение, что при расчёте деформаций и напряжений в сплошном теле, оно может быть заменено на совокупность связанных КЭ, с заданной степенью точности повторяющей форму исходного тела, которые состоят из определенного числа узлов. Кроме узлов в модели не должно быть никаких геометрических элементов: ни линий, не поверхностей, не объёмов. Поэтому любые виды нагрузок должны распределяться по узлам созданных КЭ.

<sup>2</sup> Глобальные реакции, это реакции, возникающие в заделках от действия внешних сил. Также есть локальные реакции в узлах, вызванные воздействием одного конечного элемента на другой.

требуемым узлам по соответствующим осям. Тогда, общий вектор нагрузок  $\{P\}$ , приходящихся на узлы для данных граничных условий

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

### Построение матриц жесткостей отдельных элементов

Построим матрицу жёсткости на основе энергетического метода. Определим площадь каждого конечного элемента  $S_k$ . В данном случае  $S_1 = S_2 = a \cdot b / 2$ .

Далее найдём значения коэффициентов матрицы  $[D]$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Данная матрица выведена из обобщённого закона Гука и одинакова для всех элементов. При этом все её коэффициенты являются константами.

На следующем шаге решения найдём значения коэффициентов матриц  $[B_1]$  и  $[B_2]$ , которые определяют связь геометрических характеристик внутри конечных элементов, вследствие чего для каждого элемента существует уникальная матрица  $[B]$ . Она состоит из разности координат узлов, входящих в конечный элемент. Запишем координаты узлов

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 0 \\ x_2 = a & y_2 = 0 \\ x_3 = a & y_3 = b \\ x_4 = 0 & y_4 = b \end{array} \quad (5)$$

Запишем матрицу  $[B]$  в общем виде, обозначив

$$[B] = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix},$$

где  $i, j, k$  – узлы соответствующего конечного элемента.

Нумерация узлов в матрице должна соответствовать порядку узлов в векторах перемещения и силы и обязательно идти против часовой стрелки, желательно, по возрастающей. Например, для первого элемента узлы идут в порядке №1( $i$ )-2( $j$ )-4( $k$ ), для второго №2( $i$ )-3( $j$ )-4( $k$ ).



Удобно оформить это в виде таблицы. Желательно, чтобы меньшему номеру элемента соответствовали меньшие номера узлов.

№ элемента	Узел $i$	Узел $j$	Узел $k$
I	1	2	4
II	2	3	4

Тогда матрицы  $[B]$  для обоих конечных элементов запишутся в виде

$$[B_1] = \frac{1}{2S_1} \begin{pmatrix} y_2 - y_4 & 0 & y_4 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_4 - x_2 & 0 & x_1 - x_4 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_4 - x_2 & y_2 - y_4 & x_1 - x_4 & y_4 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$[B_2] = \frac{1}{2S_2} \begin{pmatrix} y_3 - y_4 & 0 & y_4 - y_2 & 0 & y_2 - y_3 & 0 \\ 0 & x_4 - x_3 & 0 & x_2 - x_4 & 0 & x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 & y_3 - y_4 & x_2 - x_4 & y_4 - y_2 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

При составлении матриц в числовом виде, во избежание путаницы, множитель  $1/(2S_i)$  рекомендуется вносить внутрь матрицы путём умножения на него всех коэффициентов матрицы. По аналогии могут быть построены матрицы  $[B]$  для любого числа элементов.

Построим транспонированную матрицу  $[B]$ .

$$[B_1^T] = \frac{1}{2S_1} \begin{pmatrix} y_2 - y_4 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & x_4 - x_2 & y_2 - y_4 \\ y_4 - y_1 & 0 & x_1 - x_4 \\ 0 & x_1 - x_4 & y_4 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Тогда матрицы жёсткости первого и второго элементов запишутся в виде

$$[K_1] = S_1 h [B_1^T] [D] [B_1] \quad (9)$$

$$[K_2] = S_2 h [B_2^T] [D] [B_2] \quad (10)$$

При перемножении следует учитывать, что данная операция не коммутативна, т.е. матрицы необходимо перемножать именно в том порядке, в котором они записаны. Крайне важно выдерживать высокую точность расчёта, в противном случае при математических операциях величина ошибки будет всё время нарастать. Рекомендуется использовать для записи чисел не менее пяти значащих цифр (например, 0,0012345 или  $1,2345 \cdot 10^{-3}$ ).

Итоговая матрица жёсткости каждого элемента может быть представлена в виде

$$[K_1] = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 & k_{65}^1 & k_{66}^1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $k_{ij}$  – коэффициенты влияния, а верхний индекс обозначает номер конечного элемента. Элементы справа и слева относительно главной диагонали должны быть одинаковы<sup>3</sup>. Таким образом, левый нижний угол должен быть зеркальным отражением верхнего правого с осью симметрии, проходящей через главную диагональ ( $k_{11}^1 \dots k_{66}^1$ ). Так можно проверить правильность построения матрицы.

Данным матрицам соответствуют перемещения узлов, принадлежащих первому и второму конечным элементам.

$$q^1 = \begin{Bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix}, q^2 = \begin{Bmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Т.е. первому узлу соответствуют только 1-я и 2-я строки матрицы  $[K_1]$ , второму узлу 2-я и 3-я строки матрицы  $[K_1]$  и 1-я и 2-я строки матрицы  $[K_2]$ , третьему узлу 2-я и 3-я строки матрицы  $[K_2]$ , а четвёртому узлу 3-я и 4-я строки обеих матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$ .

Все данные манипуляции справедливы, пока элементы работают в зоне упругих деформаций, т.е. параметры  $E$  и  $\mu$  являются константами, что является допущением данной работы.

---

<sup>3</sup> Такая матрица называется «диагональной». С физической точки зрения, элементы матрицы представляют собой коэффициенты влияния одних узлов на другие. И если, потянув за узел №3, мы смещаем узел №2 на 1 мм, то в силу линейности системы, потянув за узел №2, мы сместим узел №3 также на 1 мм.

### Раздел №3

Формирование матрицы жесткости конструкции, составление разрешающей системы уравнений

#### Построение общей матрицы жёсткости

Построим общую матрицу жёсткости  $[K]$ , для чего необходимо записать уравнения равновесия для каждого узла. Т.е. сумма всех внутренних реакций в каждом узле должна быть равна нулю. При этом следует учесть, что узлы №1 и №3 принадлежат только одному конечному элементу (соответственно первому и второму). А узлы №2 и №4 принадлежат обоим конечным элементам.

В первом элементе порядок узлов №1-2-4. Поэтому для записи уравнения равновесия первого узла используем только первые две строки матрицы  $[K_1]$ . Затем разделим выбранные строки матрицы  $[K_1]$  на несколько квадратных матриц размерностью  $2 \times 2$ . Поскольку узел №1 принадлежит только одному элементу, то  $k_{ij} = k^1$ , где  $i, j$  – номер строки и столбца матрицы жёсткости. Запишем все силы, действующие в узле №1.

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} k_{17} & k_{18} \\ k_{27} & k_{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Нулевая матрица для перемещений третьего узла взята потому, что узел №3 не входит в первый конечный элемент<sup>4</sup>. Примеры определения коэффициентов:

$$k_{11} = k_{11}^1; k_{23} = k_{23}^1; k_{15} = 0; k_{17} = k_{15}^1$$

Узел №2 принадлежит двум конечным элементам, поэтому его матрица жёсткости записывается сложнее. Для её записи воспользуемся третьей и четвертой строками матрицы  $[K_1]$  и первой и второй строками матрицы  $[K_2]$ , соответствующих узлу №2. Значения коэффициентов в матрицах сложим с учётом порядка узлов в элементах. Запишем матрицу сначала в общем виде

$$\begin{pmatrix} k_{31} & k_{32} \\ k_{41} & k_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{35} & k_{36} \\ k_{45} & k_{46} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} k_{37} & k_{38} \\ k_{47} & k_{48} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Затем через коэффициенты матриц  $K_1$  и  $K_2$ .

<sup>4</sup> Таким образом, для всех узлов, не входящих в конечный элемент подставляются нулевые матрицы

$$\begin{pmatrix} k_{31}^1 + 0 & k_{32}^1 + 0 \\ k_{41}^1 + 0 & k_{42}^1 + 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 \\ k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} 0 + k_{13}^2 & 0 + k_{14}^2 \\ 0 + k_{23}^2 & 0 + k_{24}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{35}^1 + k_{15}^2 & k_{36}^1 + k_{16}^2 \\ k_{45}^1 + k_{25}^2 & k_{46}^1 + k_{26}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Нули в первой матрице записаны потому, что узел №1 не входит во второй конечный элемент, аналогично, нули в третьей матрице объясняются тем, что узел №3 не входит в первый конечный элемент.

Аналогично получим уравнения для узлов №3 и №4. Тогда разрешающая система уравнений запишется в виде

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Чтобы избежать путаницы при построении общей матрицы жёсткости, рекомендуется воспользоваться простым графическим методом. После того, как матрицы  $[K_1]$  и  $[K_2]$  разбиты на блоки размерностью  $2 \times 2$ , соответствующие разным узлам (первая строка соответствует узлу  $i$ , вторая  $j$ , третья –  $k$  соответствующего элемента), запишем небольшие таблицы для матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$ . В общем виде таблица выглядит так:

$i-i$	$i-j$	$i-k$
$j-i$	$j-j$	$j-k$
$k-i$	$k-j$	$k-k$

Тогда для матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$  таблицы запишутся в виде

1-1	1-2	1-4	2-2	2-3	2-4
2-1	2-2	2-4	3-2	3-3	3-4
4-1	4-2	4-4	4-2	4-3	4-4

Затем запишем табличку для общей матрицы жёсткости  $[K]$  следующим образом

	1	2	3	4	
1	1	0	1		1
1	x	2	x		2
0	2	2	2		3
1	x	2	x		4

Значения в общей матрице  $[K]$  формируются за счёт суммирования значений из матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$  согласно индексам. Каждая ячейка таблицы нумеруется так: сначала указывается номер строки, затем столбца. Т.е. 2-3, означает «ячейка таблицы на пересечении второй строки и третьего столбца». Если в таблицах для матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$  нет ячейки с номером из общей таблицы для матрицы  $[K]$ , то в таблицу проставляется «0», а в матрицу пишется блок нулей (16), как например, для ячеек 1-3 и 3-1. Если ячейка присутствует только в одной из таблиц, пишется её номер, а в матрицу  $[K]$  вставляется блок (16) из соответствующей матрицы  $[K_1]$  или  $[K_2]$ . Наконец, если ячейка с таким номером присутствует и в таблице для  $[K_1]$  и в таблице для  $[K_2]$ , то пишется символ «х», а значения из обеих матриц  $[K_1]$  и  $[K_2]$  складываются между собой (16).

### Определение неизвестных перемещений и реакций в узлах

Для получения разрешающей системы уравнений необходимо умножить матрицу  $[K]$  на вектор перемещений  $\{q\}$  и приравнять результат к вектору  $\{P\}$ . Из каждой строки матрицы  $[K]$  получается одно уравнение. Для этого нужно последовательно перемножить коэффициенты в одной строке матрицы  $[K]$  на значения строк вектора  $\{q\}$ , сложить эти произведения и приравнять их к значению вектора  $\{P\}$  той же строки, что и в матрице  $[K]$ .

Для нахождения неизвестных перемещений узлов достаточно решить уравнения, в которых перемещения не равны нулю. Для выбранной схемы (рис. 1) это последние четыре уравнения, поскольку в первых четырёх уравнениях перемещения равны нулю.

А затем из первых четырёх уравнений, за счёт подстановки в них найденных перемещений, можно определить неизвестные реакции.

Умножив по правилам<sup>5</sup> матрицу  $[K]$  на вектор  $\{q\}$ , получим

$$\begin{aligned} k_{55} \cdot q_{x3} + k_{56} \cdot q_{y3} + k_{57} \cdot q_{x4} + k_{58} \cdot q_{y4} &= 0 \\ k_{65} \cdot q_{x3} + k_{66} \cdot q_{y3} + k_{67} \cdot q_{x4} + k_{68} \cdot q_{y4} &= P_{y3} \\ k_{75} \cdot q_{x3} + k_{76} \cdot q_{y3} + k_{77} \cdot q_{x4} + k_{78} \cdot q_{y4} &= P_{x4} \\ k_{85} \cdot q_{x3} + k_{86} \cdot q_{y3} + k_{87} \cdot q_{x4} + k_{88} \cdot q_{y4} &= 0 \end{aligned}$$

Система из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными может быть решена различными методами:

- 1) Выражением одних коэффициентов через другие
- 2) Методом Гаусса
- 3) Методом Крамера

Затем из первых четырёх уравнений определим неизвестные реакции  $N_{x1}$ ,  $N_{y1}$ ,  $N_{x2}$ ,  $N_{y2}$ .

<sup>5</sup> По правилам строки первой матрицы умножаются на столбцы второй.

Раздел №4

Решение системы линейных уравнений, расчет перемещений и реакций в узлах

**Численный пример решения**

Для выбранного варианта  $a = 0,1$  м;  $b = 0,2$  м;  $h = 0,003$  м;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\mu = 0,33$ ;  $P_{y3} = 10000$  Н (приложена к узлу 3);  $p = 80000$  Н/м (приложена к линии 1-4); закреплены узлы 1 и 2.

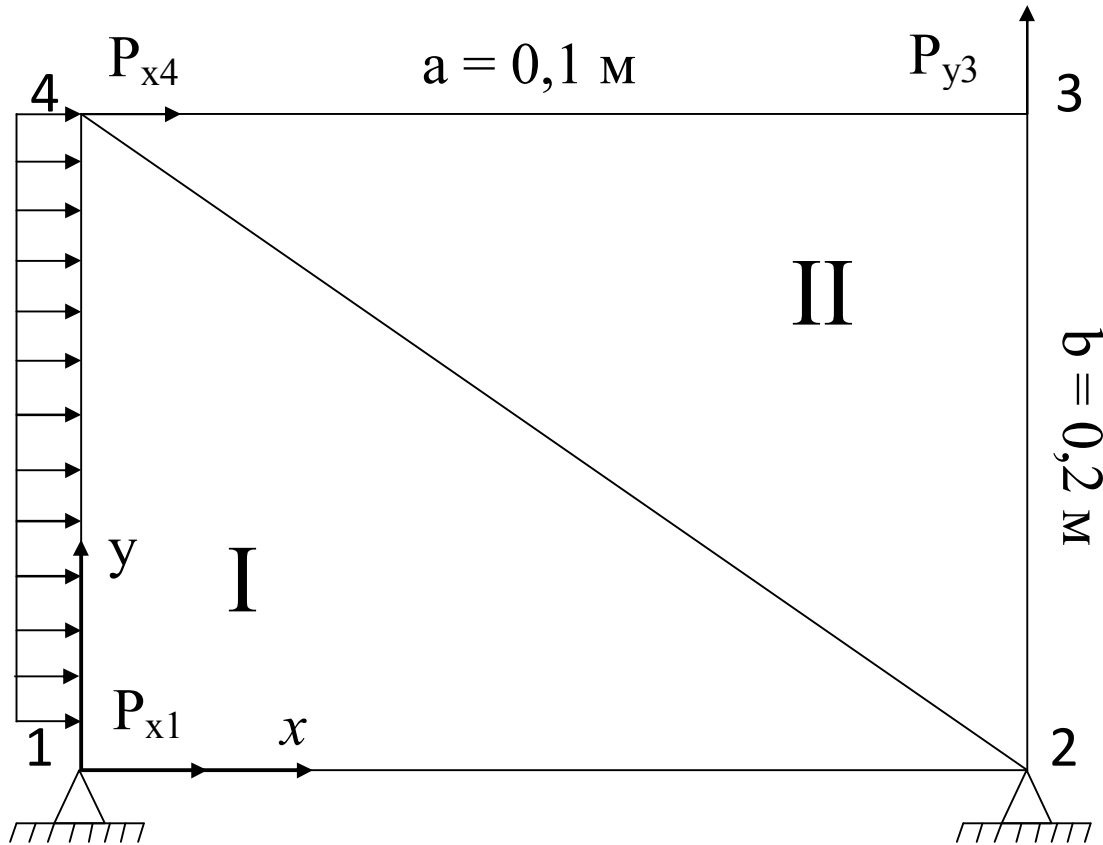


Рис. 2. Расчётная схема

$$\text{Сила } P_{x1} = P_{x4} = \frac{p_{14} \cdot l}{n} = \frac{80000 \cdot 0,2}{2} = 8000 \text{ Н}$$

Вектора перемещений (2) и нагрузок (3) выглядят следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8000 + N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ 10000 \\ 8000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Площади КЭ  $S_1 = S_2 = 0,01 \text{ м}^2$ .

Значения (4) коэффициентов матрицы [D]

$$[D] = \frac{2 \cdot 10^{11}}{1 - 0,33^2} \begin{pmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0,33}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,244 \cdot 10^{11} & 7,407 \cdot 10^{10} & 0 \\ 7,407 \cdot 10^{10} & 2,244 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 7,519 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}$$

Координаты узлов (5)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0,1 & y_2 &= 0 \\ x_3 &= 0,1 & y_3 &= 0,2 \\ x_4 &= 0 & y_4 &= 0,2 \end{aligned}$$

Порядок узлов в конечных элементах .

№ элемента	Узел $i$	Узел $j$	Узел $k$
I	1	2	4
II	2	3	4

Матрицы  $[B_1]$  (6) и  $[B_2]$  (7).

$$[B_1] = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5 & -10 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[B_2] = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Транспонированные матрицы  $[B_1]$  и  $[B_2]$ .

$$[B_1^T] = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}; [B_2^T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Тогда матрицы жесткостей конечных элементов запишутся в виде

$$[K_1] = S_1 h [B_1^T] [D] [B_1]$$

$$= \begin{pmatrix} 7,2972 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1278 \cdot 10^8 & -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1110 \cdot 10^8 \\ 2,2388 \cdot 10^8 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & -1,1278 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 \\ -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & 6,7333 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1,1110 \cdot 10^8 \\ -1,1278 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 2,2556 \cdot 10^8 & 1,1278 \cdot 10^8 & 0 \\ -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1278 \cdot 10^8 & 0 & 1,1278 \cdot 10^8 & 5,6391 \cdot 10^7 & 0 \\ -1,1110 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 1,1110 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1,6833 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

$$[K_2] = S_2 h [B_2^T] [D] [B_2]$$

$$= \begin{pmatrix} 5,6391 \cdot 10^7 & 0 & -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1278 \cdot 10^8 & 0 & 1,1278 \cdot 10^8 \\ 0 & 1,6833 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 1,1110 \cdot 10^8 & 0 \\ -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1110 \cdot 10^8 & 7,2972 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1278 \cdot 10^8 \\ -1,1278 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 \\ 0 & 1,1110 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & 6,7333 \cdot 10^8 & 0 \\ 1,1278 \cdot 10^8 & 0 & -1,1278 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 2,2556 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

Общая матрица жёсткости системы выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} 7,2972 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1278 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1110 \cdot 10^8 \\ 2,2388 \cdot 10^8 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1,1278 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 \\ -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & 7,2972 \cdot 10^8 & 0 & -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1278 \cdot 10^8 & 0 & 2,2388 \cdot 10^8 \\ -1,1278 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1110 \cdot 10^8 & 7,2972 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -1,1278 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 \\ -5,6391 \cdot 10^7 & -1,1278 \cdot 10^8 & 0 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & 7,2972 \cdot 10^8 & 0 \\ -1,1110 \cdot 10^8 & -1,6833 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & 0 & -1,1278 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 3,9390 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

Поскольку перемещения узлов №1 и №2 равны нулю, перемещения узлов №3 и №4 определим из четырёх нижних строк разрешающей системы уравнений. Запишем

$$\begin{pmatrix} 7,2972 \cdot 10^8 & 2,2388 \cdot 10^8 & -6,733 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 \\ 2,2388 \cdot 10^8 & 3,9390 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 \\ -6,7333 \cdot 10^8 & -1,1110 \cdot 10^8 & 7,2972 \cdot 10^8 & 0 \\ -1,1278 \cdot 10^8 & -2,2556 \cdot 10^8 & 0 & 3,9390 \cdot 10^8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10000 \\ 8000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решив данную систему методом Крамера, найдём корни уравнения<sup>6</sup>.

$$\begin{pmatrix} q_{x3} = 7,622 \cdot 10^{-5} \text{ м} & q_{y3} = 2,78 \cdot 10^{-5} \text{ м} \\ q_{x4} = 8,553 \cdot 10^{-5} \text{ м} & q_{y4} = 3,775 \cdot 10^{-5} \text{ м} \end{pmatrix}$$

Найдём реакции в узлах №1 и №2, подставив определенные ранее значения перемещений узлов в разрешающую систему уравнений (16).

$$\begin{pmatrix} N_{x1} = -17017 \text{ Н} & N_{y1} = -16000 \text{ Н} \\ N_{x2} = 1016,6 \text{ Н} & N_{y2} = 6000 \text{ Н} \end{pmatrix}$$

Все неизвестные определены, задача решена.

<sup>6</sup> Расхождение данных величин с полученными в ANSYS менее 0,1%. Для примера на рис. 2 приведена форма элементов после деформации и распределение смещений по площади элементов, определённые в ANSYS.



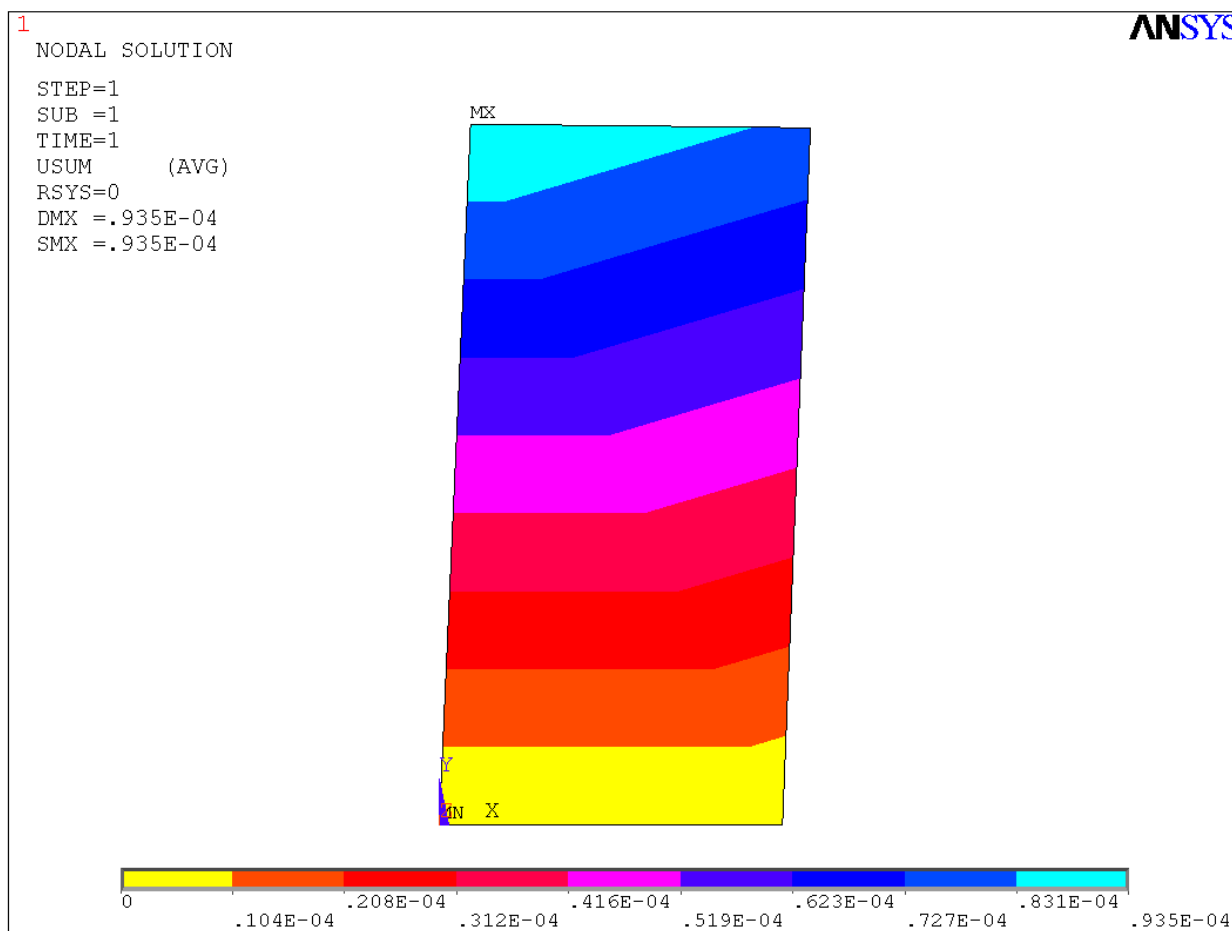


Рис. 3. Пример распределения перемещений в пластине

Для определения деформаций нужно разделить перемещения на характерный размер  $a$  для перемещений вдоль оси  $x$  или характерный размер  $b$  для перемещений вдоль оси  $y$ :

$$\varepsilon_{xi} = \frac{q_{xi}}{a} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{yi} = \frac{q_{yi}}{b}.$$

Напряжения для каждой точки в данном случае можно определить из системы уравнений обобщённого закона Гука. При этом для плоской задачи рассматриваются только напряжения вдоль осей  $x$  и  $y$ , деформации предполагаются упругими.

$$\varepsilon_{xi} = \frac{\sigma_{xi}}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_{yi},$$

$$\varepsilon_{yi} = \frac{\sigma_{yi}}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_{xi}.$$

## Список литературы

1. Уланов А. М. Основы метода конечных элементов: конспект лекций / А. М. Уланов – Самара, 2011. – 19 с.
2. Метод конечных элементов. Основы: учебник / [Р. Галлагер и др.] ; пер. с английского В. М. Картвелишвили; под ред. Н. В. Баничука. – М. : «Мир», 1984. – 428 с.: ил.
3. Конечные элементы и аппроксимация: учебник / [О. Зенкевич и др.] ; пер. с англ. Б. И. Квасова; под ред. Н. С. Бахвалова. – М. : «Мир», 1986. – 318 с.: ил.
4. Применение метода конечных элементов: учебник / [Л. Сегерлинд и др.] ; пер. с англ. А. А. Шестакова; под ред. Б. Е. Победри. – М. : «Мир», 1979. – 392 с.

Порядок формирования заданий по расчётной работе

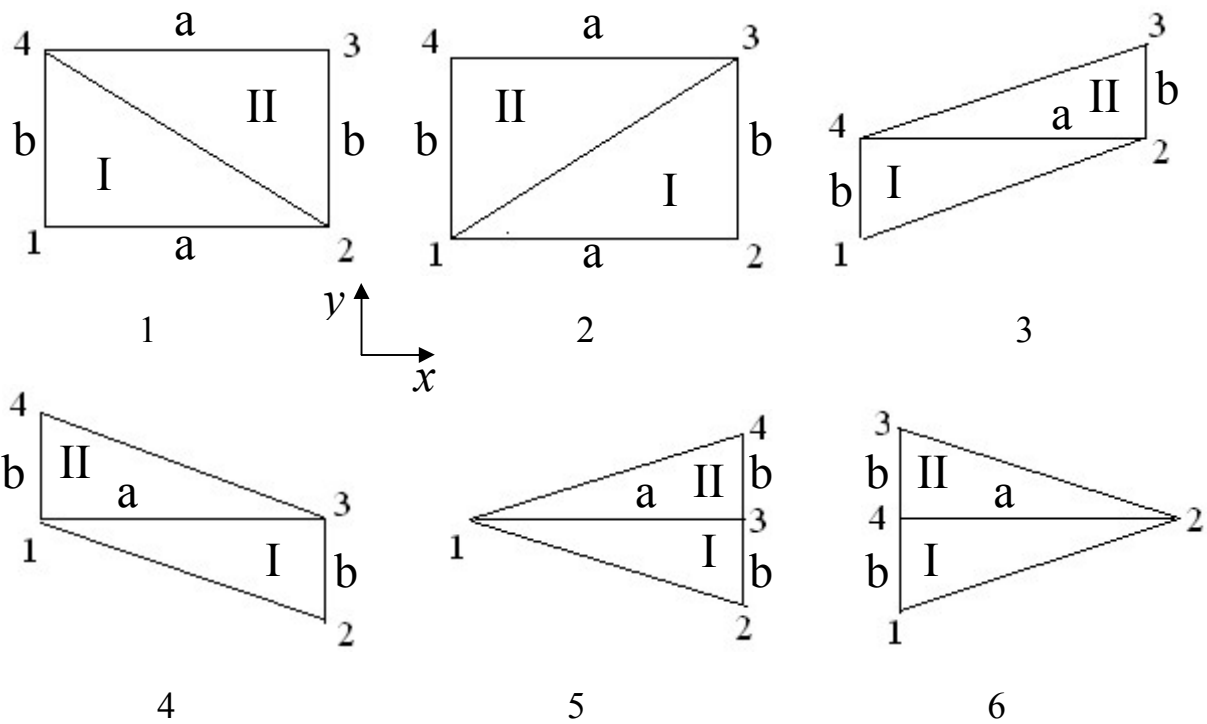
Задание на работу выдаётся в виде таблицы, каждая строка которой является вариантом:

ФАМИЛИЯ	NR	NZ	NA	NB	NH	NF1	NF2	NP1	NP2
---------	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Для каждой переменной указан допустимый диапазон значений, из которого требуется выбрать конкретное число для каждого студента так, чтобы в пределах одной группы одинаковых вариантов не было.

1. Варианты разбивки NR

Цифрами обозначены номера узлов.



2. Варианты закрепления (номера закрепленных узлов)

NZ	1	2	3	4	5	6
$r, m$	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

3. NA= 1, 2, 3, 4, 5 (определяет ширину  $a$  элемента)

4. NB= 1, 2, 3, 4, 5 (определяет высоту  $b$  элемента)

5. NH= 1, 2, 3, 4, 5 (определяет толщину  $h$  элемента)

6. Сосредоточенная сила приложена к узлу  $NF1 = 1, 2, 3, 4$ . При составлении вариантов задания необходимо следить, чтобы данный узел не был закреплён ( $m \neq NF1 \neq r$ ). Параметр  $NF2 = 1, 2, 3, 4, 5$  определяет величину сосредоточенной силы.

7. Распределенная сила ( $p_{vc}$ ) – действует в положительном направлении оси  $x$

Она действует вдоль всей линии, условно проводимой между двумя узлами системы  $v$  и  $c$ , не обязательно вдоль границ КЭ, и при расчёте заменяется сосредоточенными силами, действующими в этих узлах. При составлении вариантов задания необходимо следить:

1) Чтобы номера узлов ( $r$  и  $m$ ), входящие в диапазон  $NZ$  не были равны  $NP1$  ( $m \neq c \neq r$ ), т.е. распределённая сила должна быть приложена к незакреплённой линии (допускается закрепление одного из узлов линии).

2) Для схемы 5 нежелательно давать  $NP1 = 5$  (узлы 2-4), а для схемы 6 –  $NP1 = 2$  (узлы 1-3) поскольку в этом случае распределённая сила действует на 3 узла, что создаёт неравноценность в заданиях и усложняет проверку.

NP1	1	2	3	4	5	6
$v, c$	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

Величина силы  $NP2 = 1, 2, 3, 4, 5$

Пример вариантов для группы

ФАМИЛИЯ	NR	NZ	NA	NB	NH	NF1	NF2	NP1	NP2
Иванов И.И.	1	1	3	1	1	3	1	3*	1
Петров П.П.	5	2	2	5	4	2	2	6	2

\* закреплённые узлы в этом случае 1 и 2, распределённая сила приложена вдоль линии 1-4, которая не закреплена не смотря на закрепление узла 1, т.е.  $1 \neq 4 \neq 2$ .

Пример решения системы уравнений методом Крамера  
в программе MathCAD

Запишем выделенные из общих матриц фрагменты матрицы сил и матрицы жесткостей:

$$Q_p := \begin{pmatrix} 0 \\ 10000 \\ 8000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 7.297210^8 & 2.238810^8 & -6.733310^8 & -1.111010^8 \\ 2.238810^8 & 3.939010^8 & -1.111010^8 & -2.255610^8 \\ -6.733310^8 & -1.111010^8 & 7.297210^8 & 0 \\ -1.127810^8 & -2.255610^8 & 0 & 3.939010^8 \end{pmatrix}$$

Для составления определителя необходимо выделить из полученной матрицы K отдельные столбцы в виде переменных, где верхний индекс обозначает номер столбца, нижний - номер строки. Причем первая строка и первый столбец имеют индексы "ноль":

$$J_{10} := K^{<0>} = \begin{pmatrix} 7.2972 \times 10^8 \\ 2.2388 \times 10^8 \\ -6.7333 \times 10^8 \\ -1.1278 \times 10^8 \end{pmatrix} \quad J_2 := K^{<1>} \quad J_3 := K^{<2>} \quad J_4 := K^{<3>}$$

Составим и решим матрицу-определитель, согласно методу Крамера:

$$\Delta := \begin{vmatrix} J_{10} & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_{11} & J_{21} & J_{31} & J_{41} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} & J_{42} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} & J_{43} \end{vmatrix} = 4.51484 \times 10^{33}$$

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} Q_{p0} & J_2 & J_3 & J_4 \\ Q_{p1} & J_{21} & J_{31} & J_{41} \\ Q_{p2} & J_{22} & J_{32} & J_{42} \\ Q_{p3} & J_{23} & J_{33} & J_{43} \end{vmatrix} = 3.39628 \times 10^{29}$$

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} J_{10} & Q_{p0} & J_3 & J_4 \\ J_{11} & Q_{p1} & J_{31} & J_{41} \\ J_{12} & Q_{p2} & J_{32} & J_{42} \\ J_{13} & Q_{p3} & J_{33} & J_{43} \end{vmatrix} = 1.26551 \times 10^{29}$$

$$\Delta_3 := \begin{vmatrix} J_{10} & J_2 & Q_{p0} & J_4 \\ J_{11} & J_{21} & Q_{p1} & J_{41} \\ J_{12} & J_{22} & Q_{p2} & J_{42} \\ J_{13} & J_{23} & Q_{p3} & J_{43} \end{vmatrix} = 3.82147 \times 10^{29}$$

$$\Delta_4 := \begin{vmatrix} J_{10} & J_2 & J_3 & Q_{p0} \\ J_{11} & J_{21} & J_{31} & Q_{p1} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} & Q_{p2} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} & Q_{p3} \end{vmatrix} = 1.69708 \times 10^{29}$$

Определим перемещения в узлах в направлении осей x и y, м:

$$q_{x1} := \frac{\Delta_1}{\Delta} = 7.52248 \times 10^{-5}$$

$$q_{y1} := \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.803 \times 10^{-5}$$

$$q_{x4} := \frac{\Delta_3}{\Delta} = 8.46424 \times 10^{-5}$$

$$q_{y4} := \frac{\Delta_4}{\Delta} = 3.7589 \times 10^{-5}$$