ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

САМАРА 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРТСВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Методические указания

САМАРА

2015

УДК 510.2
ББК 22.1

Составители И.В. Семенова, М.В. Морозова

Рецензент к.ф.-м.н., В.В. Севостьянова

Теория множеств: метод. указания/ сост. *И.В. Семенова, М.В. Морозова*. – Самара, 2015. – 20 с.: ил.

В пособии изложены основы такого раздела дискретной математики как «Теория множеств». Помимо основных понятий и теоретических результатов, пособие включает также методы, алгоритмы и примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов специальностей «Фундаментальная математика и механика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Прикладная математика», изучающих данную тему по курсам «Дискретная математика» и «Математический анализ».

УДК 510.2
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ 4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ 6
2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10
3. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 12
4. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ 17
5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ 19
6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ 20

ВВЕДЕНИЕ

Термин «дискретная математика» начал входить в научный обиход на рубеже 50-х и 60-хгг. XXв. для обозначения системы новых математических дисциплин, таких, как теория булевых функций, теория конечных автоматов, теория графов, теория кодирования и др. Иногда в него вкладывают и более широкий смысл, полагая, что если в основе математики лежит понятие множества, то в основе дискретной математики лежит понятие дискретного множества. В этом смысле к дискретной математике относят и теорию чисел, и математическую логику, и всю конечную алгебру, и некоторые другие классические разделы математики.

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами. Эта область математики привлекательна для решения задачи на компьютере в терминах аппаратных средств и программного обеспечения с привлечением организации символов и манипуляции данными.

В данном учебном пособии рассматриваются некоторые понятия «дискретной» или «конечной» математики, то есть математики, прежде всего изучающей конечные множества и различные структуры на них. Это означает, что понятия бесконечности, предела или непрерывности не являются предметом изучения, хотя используются как вспомогательные средства.

Целью пособия является изложить основы такого раздела дискретной математики как «Теория множеств» в доступной форме, но достаточно полно и строго. Помимо основных понятий и теоретических результатов, данное пособие включает также методы, алгоритмы и примеры решения типовых задач, а также содержит примеры практического применения, рассмотренных в нем понятий и методов, контрольные вопросы и задания, список литературы по теме.

Контрольные задания и упражнения с достаточной полнотой отражают содержание каждой темы и являются хорошим средством самоконтроля и проверки знаний студентов.

Приведенный в конце список литературы позволяет познакомиться с трудами основоположников данного раздела дискретной математики и в сравнении с трудами современников, сформировать представление об историческом развитии дисциплины и эволюции ее понятий и методов.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначение	Применение	Пример
Числовые множества		
N	Натуральные числа	1, 2, 3
Z	Целые числа	0, 1, -1, 2, -2
Q	Рациональные числа	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
R	Вещественные числа	1.0, 1.5, $\sqrt{2}$, π
Множества		
A, B … Z	Неупорядоченные множества различных элементов	A={1, 2, 3}
U	Универсальное множество	
$\varnothing$	Пустое множество	
$a_1, a_2, ..., a_n$	Элементы неупорядоченного множества	1, 2, 3, …, n
$\|A\|$	Мощность множества A	$A = \{1,2,3\}, \|A\| = 3$
$a \in A$	Элемент a принадлежит множеству A	$1 \in \{1,2,3\}$
$a \notin A$	Элемент a не принадлежит множеству A	$4 \notin \{1,2,3\}$
$A \subset B$	A включено в B (A – подмножество B)	$\{2,3\} \subset \{1,2,3\}$
$A \not\subset B$	A не включено в B	$\{2,4\} \not\subset \{1,2,3\}$
$A = B$	Равные множества	$\{3,2,1\} = \{1,2,3\}$
$A \neq B$	Неравные множества	$\{1,2,4\} \neq \{1,2,3\}$
$A \cup B$	Объединение A и B	$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

$A \cap B$	Пересечение А и В	$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
$A \setminus B$	Разность А и В	$\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$
$A \dot{-} B$	Симметрическая разность	$\{1,2\} \dot{-} \{2,3\} = \{1,3\}$
$\overline{A}$	Абсолютное дополнение А	$\mathrm{A} = \{1,2,3\}$, $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{U} \setminus \{1,2,3\}$
$A \times B$	Декартово произведение А и В	$\{1,2\} \times \{2,3\} = \{<1,2>,$ $<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Множеством называется совокупность каких-либо элементов, обладающих общим свойством.

Символом $\in$ обозначается отношение принадлежности элемента данному множеству, т. е. запись $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A. Если x не является элементом множества A, то это запишется $x \notin A$.

Способы задания множеств.

- перечисление элементов;
- указание характеристического свойства.

В случае задания множества указанием характеристического свойства необходимо следить за тем, чтобы каждый элемент был четко определен, во избежание трудностей типа парадокса Б.Рассела.

Парадокс Б.Рассела.

Рассмотрим множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. тогда, если A не есть элемент A, то по определению, A также есть и элемент A. С другой стороны, если A есть элемент A, то A – одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т.е. A не есть элемент A. В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.

Принцип объемности Кантора. Два множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается как $A=B$, если A и B равны, и $A \neq B$ в противном случае.

Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым*** и обозначается символом: $\varnothing$.

Универсальное множество U – это множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Через $\subseteq$ обозначим отношение включения между множествами, т.е. $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A есть элемент множества B. Тогда говорят, что A есть подмножество множества B. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть собственное подмножество B, и записывают $A \subset B$.

Заметим, что

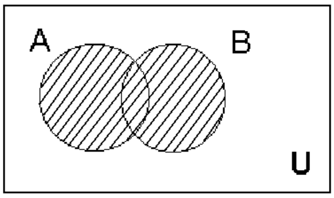
а) $X \subseteq X$;

б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

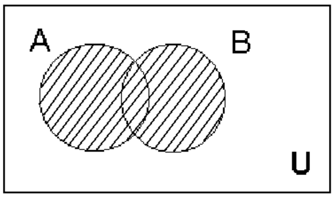
Последнее утверждение называется ***принципом взаимного включения.***

Объединением множеств A и B называется множество



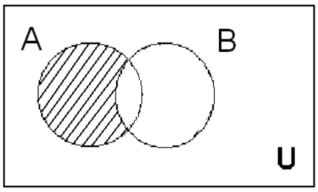
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество



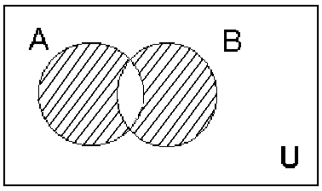
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью (***относительным дополнением***) множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$



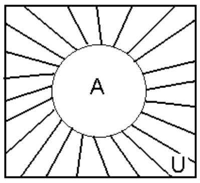
.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество



$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Абсолютным дополнением множества A называется множество



$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Основные тождества алгебры множеств:

– Коммутативные законы:

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

- Ассоциативные законы:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- Дистрибутивные законы:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A;$$

$$A \cap A = A.$$

- Действия с пустым множеством:

$$A \cup \varnothing = A;$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

- Действия с абсолютным дополнением:

$$A \cup \overline{A} = U;$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

- Закон двойного дополнения:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

- Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- Законы поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A;$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Мощностью конечного множества A называется число его элементов и обозначается $|A|$.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если всякий элемент множества B является элементом множества A. Записывается как $B \subseteq A$.

Формула включений и исключений.

Пусть X – конечное множество, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – его подмножества такие, что $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Тогда мощность множества X можно выразить через мощности множеств X_i, $i = 1, \ldots, n$ по следующей формуле включений и исключений:

$$|X| = |X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = (|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|) -$$
$$-(|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \cdots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$
$$+(|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \cdots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \cdots - (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|.$$

Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют ***диаграммы Эйлера-Венна.*** Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества – в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника.

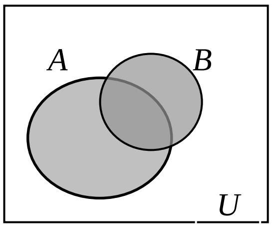


Рис. 1. Диаграмма Венна объединения двух множеств A и B

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Пример 2.1. Доказать тождество $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Решение.

Для доказательства воспользуемся принципом взаимного включения: если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$. То есть, чтобы доказать некоторое тождество $X = Y$, нужно доказать, что, во-первых, если $x \in X$, то $x \in Y$ и, во-вторых, если $x \in Y$, то $x \in X$.

<u>1 шаг.</u> Сначала покажем, что $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Возьмем произвольный элемент x, принадлежащий левой части равенства. Если $x \in \overline{A \cup B}$, тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$ (по определению абсолютного дополнения). Следовательно, $x \in U$ и ($x \notin A$ и $x \notin B$). Отсюда, ($x \in U$ и $x \notin A$) и ($x \in U$ и $x \notin B$). Следовательно $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, а значит, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. В силу произвольности выбора x мы доказали, что $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

<u>2 шаг.</u> Покажем теперь, что $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Возьмем произвольный элемент x, принадлежащий правой части равенства. Если $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Значит ($x \in U$ и $x \notin A$) и ($x \in U$ и $x \notin B$). Следовательно, $x \in U$ и ($x \notin A$ и $x \notin B$). Значит, $x \in U$ и $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$. В силу произвольности выбора x мы доказали, что $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Таким образом, мы показали, что $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, значит, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пример 2.2. В группе студентов 25 человек. Среди них 20 сдали сессию успешно, 12 занимаются в спортивных секциях, причем 10 из них сдали сессию успешно. Сколько неуспевающих студентов не посещает спортивных секций?

Решение.

Введем обозначения:

A = {студенты, успешно сдавшие сессию};

B = {студенты, занимающиеся в спортивных секциях}.

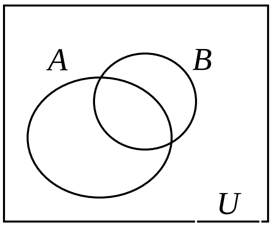


Рис. 2. Диаграмма Венна

Пересечение множеств A и B соответствует множеству успевающих студентов, занимающихся спортом, а объединение – множеству студентов, которые учатся успешно или посещают секции.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 20 + 12 - 10 = 22.$$

Число неуспевающих студентов, которые не посещают секций, равно 25-22=3.

Ответ: 3 студента.

Пример 2.3. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5, ни на 9?

Решение.

Очевидно, что если число не делится на 2, то оно и подавно не будет делиться на 4. Поэтому число 4 в условии можно просто опустить.

Заметим, что на 2 делится каждое второе натуральное число, на 5 – каждое пятое, на 9 – каждое девятое, на 2 и на 5 – каждое 10-е, на 2 и на 5 – каждое 18-е, на 5 и на 9 – каждое 45-е, на 2, на 5 и на 9 – каждое 90-е. Воспользуемся формулой включений и исключений, обозначив искомое число через N, а через $[a]$ будем обозначать целую часть числа a. Получим:

$$N=10000 - \left[\frac{10000}{2}\right] - \left[\frac{10000}{5}\right] - \left[\frac{10000}{9}\right] + \left[\frac{10000}{10}\right] + \left[\frac{10000}{18}\right] + \left[\frac{10000}{45}\right] - \left[\frac{10000}{90}\right]$$

$=10000 – 5000 – 2000 – 1111 + 1000 + 555 + 222 – 111 = 3555.$

Ответ: 3555 чисел.

3. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1 Построить диаграмму Венна для множеств:

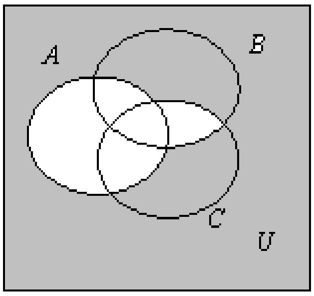
1) $A \cup B$, если $A \cap B = \varnothing$;
2) $A \cap B$, если $A \cap B = \varnothing$;
3) $A \cup B$, если $A = B$;
4) $A \cup B$, если $A \cap B \neq \varnothing$;
5) $A \cap B$, если $A = B$;
6) $A \cap B$, если $A \cap B \neq \varnothing$;
7) $A \setminus B$, если $A \cap B = \varnothing$;
8) $A \setminus B$, если $A = B$;
9) $A \setminus B$, если $A \cap B \neq \varnothing$.

3.2 Построить диаграммы Венна для левой и правой частей равенства и показать, что они равны:

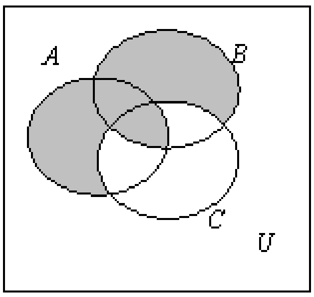
1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
4) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$;
5) $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} (A \cap B)$;
6) $A \cup B = (A \dot{-} B) \cup (A \cap B)$.

3.3 Опишите множества, соответствующие закрашенной части каждой диаграммы Венна:

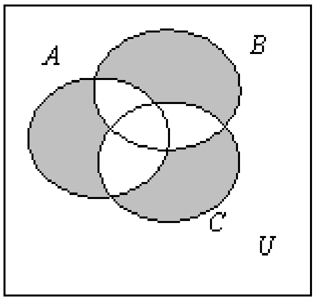
1)



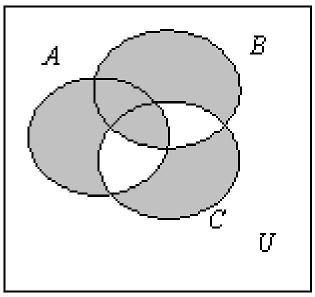
2)



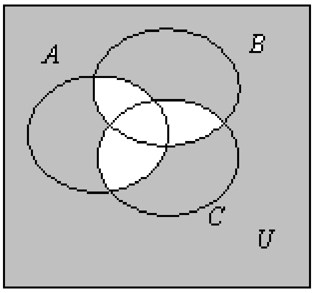
5)



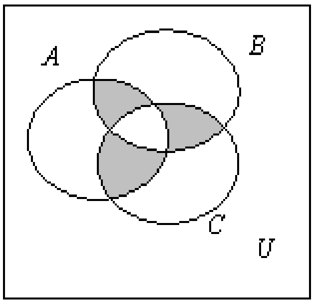
6)



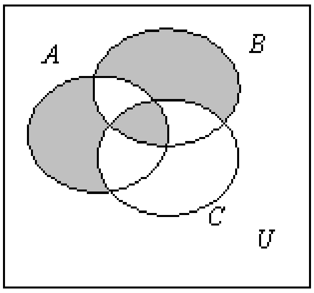
3)



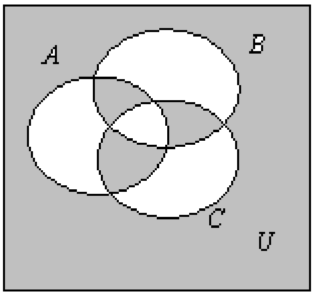
4)



7)



8)



3.4 Доказать следующие тождества:

1) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

5) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$;

6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

7) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

8) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

10) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$;

11) $A \cup B = (A \dot{-} B) \cup (A \cap B)$;

12) $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} (A \cap B)$;

13) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$;

14) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;

15) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

16) $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$;

17) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$;

18) $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$;

19) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

20) $\overline{\overline{A}} = A$;

21) $A \cup \overline{A} = U$;

22) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

23) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

24) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;

25) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

3.5 Доказать, что:

1) $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$;
2) $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow A=C$
3) $A\cup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C$ и $B\subseteq C$
4) $A\subseteq B\cap C\Leftrightarrow A\subseteq B$ и $A\subseteq C$
5) $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$
6) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subseteq C$
7) $(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$
8) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$
9) $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq\overline{B}\cup C$
10) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$
11) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$
12) $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus C\subseteq B\setminus C$
13) $A\subseteq B\Rightarrow C\setminus B\subseteq C\setminus A$

3.6 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}A\cap X=B,\\ A\cup X=C,\end{cases}$

где A, B и C – заданные множества и $B\subseteq A\subseteq C$;

2) $\begin{cases}A\setminus X=B,\\ X\setminus A=C,\end{cases}$

где A, B и C – заданные множества и $B\subseteq A$, $A\cap C=\varnothing$;

3) $\begin{cases}A\setminus X=B,\\ A\cup X=C,\end{cases}$

где A, B и C – заданные множества и $B\subseteq A\subseteq C$.

3.7 Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}\neq\{1, 2, 3\}$.

3.8 Доказать, что для любого A:

1) $\varnothing\subseteq A\subseteq U$;
2) если $A\subseteq\varnothing$, то $A=\varnothing$; если $U\subseteq A$, то $A=U$;
3) $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup U=U$; $A\cap U=A$.
4) $A\subset A$

3.9 Доказать, что для любых a, b, c, d

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}\Leftrightarrow a=c, b=d.$$

3.10 Какие из утверждений верны для всех A, B и C?

1) Если $A\in B$ и $B\in C$, то $A\in C$;
2) Если $A\subseteq B$ и $B\in C$, то $A\in C$;

3) $A \cap B \subset A$

4) $A \cup B \subset A$

5) Если $A \cap B \subseteq \overline{C}$ и $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \varnothing$;

6) Если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;

7) Если $A \subseteq \overline{B \cup C}$ и $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$;

8) $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

3.11 Доказать равенство двух множеств:

1) $A=B$, где A - множество корней уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ и $B = \{1, 6\}$.

2) Множество всех корней многочлена $\psi(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$ есть объединение множеств корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

3) Пересечение множеств действительных корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ с действительными коэффициентами совпадает с множеством действительных корней многочлена $\psi(x) = f^2(x) + \varphi^2(x)$.

3.12 В школе учится 100 учеников. Из них 5 учеников учат немецкий, испанский и французский языки, 10 учеников – немецкий и испанский, 8 – испанский и французский, 20 – немецкий и французский, 30- испанский, 23 – немецкий и 50 – французский. Инспектор, предоставивший этот отчет, был уволен. Почему?

3.13 В школе учится 100 учеников. Испанский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, испанский и немецкий – 8, испанский и французский 10, немецкий и французский – 5, все три языка – 3 человека.

а) Сколько учеников изучает один французский язык?

б) Сколько учеников не изучает ни одного языка?

3.14 Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс математического анализа, 37 – курс дискретной математики, и 5 изучают обе этих дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

3.15 Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, и 12 решили заниматься туризмом. Кроме того было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, 5 изучали бухгалтерию и туризм, а 3 – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

3.16 При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% - журнал B, 50% - журнал C, 30% - журналы A и B, 20% - журналы B и C, 40% - журналы A и C, 10% - журналы A, B и C. Сколько процентов студентов:

а) не читает ни одного из журналов;

б) читает в точности 2 журнала;

в) читает не менее 2 журналов?

3.17 Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на a, ни на b, ни на c, ни на d?

№	***a***	***b***	***c***	***d***
1	4	5	6	7
2	2	3	4	5
3	3	4	5	8
4	6	7	3	2
5	5	8	9	4

№	***a***	***b***	***c***	***d***
6	3	4	5	6
7	2	4	5	7
8	3	7	6	11
9	11	3	9	10
10	11	8	5	4

№	***a***	***b***	***c***	***d***
11	7	9	5	3
12	8	5	2	9
13	3	8	16	7
14	13	9	5	3
15	3	5	6	13

4. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

1. Задача тестирования неисправностей устройства.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – совокупность возможных неисправностей некоторого технического устройства. Специалист по устранению неисправностей имеет возможность выделять совокупности признаков допустимых неисправностей X_1, X_2, …, $X_r \subseteq X$. Задача тестирования неисправностей устройства состоит прежде всего в том, чтобы по заданным совокупностям X_1, X_2, …, X_r уметь разделять несовместимые неисправности. При решении задачи используются вполне разделяющие семейства множеств.

2. Теория множеств является основой создания алгебраических систем, имеющих большое практическое применение при разработке математического обеспечения ЭВМ.

3. В современных языках программирования требуется, чтобы переменные объявлялись как принадлежащие к определенному типу данных. Тип данных представляет собой множество объектов со списком стандартных операций над ними. Определение типа переменных равносильно указанию множества, из которого переменным присваиваются значения. Кроме того, в ряде алгоритмических языков программирования для облегчения использования данного понятия при решении задач реализован отдельный тип данных с таким названием, а также ряд основных операций над объектами данного типа.

4. Теория множеств явилась фундаментом ряда новых математических дисциплин (теории функций действительного переменного, общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и др.).

Постепенно теоретико-множественные методы находят всё большее применение и в классических разделах математики. Например, в области математического анализа они широко применяются в теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, теории вероятностей и др.

5. Только теория множеств позволила отчётливо сформулировать понятие изоморфизма систем объектов, заданных вместе со связывающими их отношениями, и привела к пониманию того обстоятельства, что каждая математическая теория в её чистой абстрактной форме изучает ту или иную систему объектов лишь «с точностью до изоморфизма», то есть может быть без всяких изменений перенесена на любую систему объектов, изоморфную той, для изучения которой теория была первоначально создана.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что такое множество?

2. Какие существуют способы задания множеств?

3. Какие основные операции выполняются над множествами?

4. Перечислите элементы множества $A=\{x \mid x$ – целое и $x^2<100\}$.

5. Перечислите элементы множества $A=\{x \mid x$ – гласный звук$\}$.

6. Опишите множество $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ при помощи характеристического свойства.

7. Перечислите подмножества множества $\{a, b, c, d\}$.

8. Перечислите подмножества множества $\varnothing$.

9. Сколько подмножеств из k элементов имеет множество из n элементов ($k \le n$)?

10. Определите количество элементов в множестве $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

11 .Почему $\varnothing \neq \{\varnothing\}$?

12. Верно ли, что всякое множество есть объединение всех своих подмножеств?

13. Верно ли, что всякое множество есть объединение всех своих конечных подмножеств?

14. Верно ли, что всякое множество есть объединение всех своих одноэлементных подмножеств?

15. Существует ли множество всех множеств?

6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
2. Бурбакин Н. Теория множеств. - М.: Мир, 1965.
3. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М.: Наука, 1969.
4. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. – М.: Мир, 1973.
5. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970.
7. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.
8. Ященко И.В. Парадоксы теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.

Учебное издание

Семенова Ирина Владимировна

Морозова Марина Валериевна

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Методические указания