МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)"

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Электронные методические указания

САМАРА 2011

УДК 512.8

Составители:Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Рецензент Дегтярев А.А., к.т.н., доцент кафедры ТК

Алгебра и геометрия. Алгебра матриц
[Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост.: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. - Электрон. текстовые и граф. дан. (365 кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Методические указания содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Алгебра матриц"курса "Алгебра и геометрия", а также рекомендуются в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов 6 факультета для бакалавров направлений: 010400.62 "Прикладная математика и информатика", 010900.62 "Прикладные математика и физика", изучающих дисциплину "Алгебра и геометрия"в 1 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Содержание

1. Понятие матрицы. Операции над матрицами

1.1. Теоретические сведения

Терминология и обозначения.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность mn чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы.

Матрицу обозначают прописными латинскими буквами, при этом саму таблицу заключают в скобки (либо круглые, либо квадратные, либо двойные вертикальные):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначают строчными латинскими буквами, снабженными двумя индексами: a_{ij} – элемент матрицы, расположенный в i-й строке j-м столбце. В этих обозначениях матрица размера $m \times n$ в общем виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используются обозначения :

$A = (a_{ij})$ – матрица A с элементами a_{ij};

$\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$.

Матриц размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей* n*-го порядка.*

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее внедиагональные элементы a_{ij}, $i \neq j$ равны нулю.

Обозначение: $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной.*

Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной.* Отметим, что для каждого порядка n существует своя единичная матрица.

Обозначение: E или I.

Матрица O, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1}, то $k_i < k_{i+1}$.

Эти свойства означают, что все нулевые строки являются последними и что все элементы, расположенные слева и под первым ненулевым элементом каждой строки, равны нулю.

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой)ступенчатой* матрицы.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной*.

Операции над матрицами. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

.

Обозначение: $A = B$.

Суммой матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Обозначение: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Свойства операции сложения:

$\forall\ A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + O = O + A = A$;
4. $A + (-A) = -A + A = O$.

Разностью матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

Обозначение: $X = A - B$.

Очевидно, что для $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Обозначение: $C = \alpha A$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
4. $1 \cdot A = A$;
5. $-A = (-1)A$.

Произведением матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

Обозначение: $C = AB$.

!*Произведение AB определено лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.*

Свойства операции умножения матриц:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$,

выполненные для любых матриц A, B, C, для которых левые части равенств имеют смысл.

Целой положительной степенью A^k $(k > 1)$ *квадратной матрицы* называется произведение k матриц, каждая из которых равна A.

Нулевой степенью квадратной матрицы A называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$называется ***транспонированной*** к матрице A, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. При транспонировании матрицы A ее строки становятся столбцами A^Tс теми же номерами, а столбцы – строками.

Свойства операции транспонирования матриц:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$;
4. $(A^T)^T = A$,

выполненные для любых матриц A, B, для которых левые части равенств имеют смысл.

П р и м е р 1. *Найти произведение матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times2}$ $\Rightarrow$ *произведение* AB *определено (число столбцов матрицы* A *равно числу строк матрицы* B *и равно трем)* *и* $AB = C \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

По формуле (3) находим

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot3 \\ 4\cdot1+5\cdot2+0\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot0+0\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix},$$

т.е. c_{ij} – элементы матрицы C, которые получаются перемножением i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

П р и м е р 2. *Найти значение многочлена* $f(C)$, *если* $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $C = AB$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> По формуле (3) $C = AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $C^2 = CC = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$;

Используя формулы (1) и (3) вычисляем

$$f(C) = C^2 - 2C + 5E = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Задание

1. Найти произведения матриц AB, BA, BC, CB, AC, CA, если они определены.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$.

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$.

11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

17. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$.

22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$.

23. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$.

24. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

26. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

27. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T$.

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

29. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T$.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}^T$.

2. Найти значение многочлена $f(C)$ от матрицы C, если $C = AB$.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $f(x) = 3x^3 - 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $f(x) = 2x^2 + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

5. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

6. $f(x) = -2x^2 + 5,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

7. $f(x) = x^2 - 5x + 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$

8. $f(x) = 2x^2 + 6x - 1,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

9. $f(x) = x^2 - 4x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $f(x) = -3x^2 + 4,$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$ $\quad B = E.$

11. $f(x) = 3x^2 - x + 2,$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

12. $f(x) = -5x^2 + 2x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $f(x) = 4x^2 - x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $f(x) = -2x^2 + 5, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = E.$

15. $f(x) = -x^2 + 2x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

16. $f(x) = 2x^2 + x + 1, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $f(x) = 2x^3 - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

18. $f(x) = -3x^2 + x + 2, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

19. $f(x) = 3x^2 - 4, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = E.$

20. $f(x) = -x^2 + 2x - 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

21. $f(x) = 3x^3 - 5, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

22. $f(x) = 5x^2 - x + 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

23. $f(x) = 3x^2 - 2x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

24. $f(x) = -3x^2 - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = E.$

25. $f(x) = -x^2 + 2x - 5, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $f(x) = 2x^2 - x + 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

27. $f(x) = 4x^2 + x - 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

28. $f(x) = 4x^2 - x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

29. $f(x) = 4x^2 - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = E.$

30. $f(x) = 4x^2 + 2x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Определители. Основные методы вычисления определителей.
2.1. Теоретические сведения

Терминология и обозначения.

Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, в которой

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$;

2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$

называется *перестановкой* из чисел $i = 1, 2, \dots, n$.

Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$ и порядок – в противном случае. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначается символами $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ или $N(\alpha)$.

Определителем n-го порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем, если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{N(\alpha)}$. Для обозначения определителя приняты символы $\Delta, |A|, \det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \qquad (4)$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$.

Каждое произведение в сумме (4) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{N(\alpha)}$ – его *знаком*.

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя n-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Определение (4) для $n = 2$ и $n = 3$ приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Свойства определителя.

1. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

2. Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании: $|A| = |A^T|$.

Следствие. В определении (4) определителя можно поменять ролями строки и столбцы:

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

т.к. эта сумма равна $|A^T|$.

3. Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.

4. При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

5. Если каждый элемент некоторой i-й строки матрицы представлен в виде суммы:

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей: $\Delta = \Delta' + \Delta''$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \ldots & a'_{in} + a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.

7. Определитель матрицы, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

8. Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.

9. Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.

Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***минором*** k-го порядка матрицы A и обозначается

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Минор порядка $n-k$, оставшийся после вычеркивания в квадратной матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ строк и столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно, называется ***дополнительным минором к минору*** $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

Число

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{\sum_{p=1}^{k}(i_p + j_p)} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

называется ***алгебраическим дополнением*** к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

П р и м е р 3. *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти алгебраическое дополнение к минору M^{13}_{34}.

Решение. *Вычеркнем из данной матрицы 1-ю и 3-ю строки, 3-й и 4-й столбцы. Минор*

$$\overline{M}^{13}_{34} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

является дополнительным к минору M^{13}_{34}. Алгебраическим дополнением к минору M^{13}_{34} будет

$$(-1)^{1+3+3+4} \overline{M}^{13}_{34} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Теорема Лапласа. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$. Пусть в матрице A выбраны произвольные k строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$ и строку (столбец) с номером i, то минорами первого порядка, расположенными в i-й строке (столбце), будут сами элементы $a_{ij}(a_{ji})$. Обозначив через A_{ij} алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}, получим из теоремы Лапласа, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}. \tag{7}$$

Представление определителя (7) называется ***разложением определителя по i-й строке (столбцу)***.

П р и м е р 4. *Дана матрица*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов 2-го столбца.

Решение.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Теорема. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей*:

$$\det AB = \det A \det B.$$

Основные методы вычисления определителей.

1. Приведение к треугольному виду. Этот метод заключается в преобразовании матрицы определителя к такому виду, когда элементы, стоящие по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю. Полученный определитель по свойству 1 равен произведению элементов главной диагонали (побочной диагонали, умноженной на $(-1)^{n(n-1)/2}$).

Для вычисления определителя таким способом используют ***метод Гаусса***, который приводит определитель n-го порядка матрицы $A = (a_{ij})$ к верхнему треугольному виду:

1. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки (столбцы) матрицы определителя так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

2. Умножаем 1-ю строку матрицы определителя последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{n1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots n$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента a_{11}.

3. Повторяем процедуру п.1-2, применяя ее к измененной подматрице $(n-1)$-го порядка, у которой в верхнем левом углу стоит элемент $\tilde{a}_{22}$ и так далее.

Замечание. Преобразование определителя легче производить с целыми числами, поэтому диагональный элемент, если возможно, выбирают равным единице, меняя строки (столбцы) местами или вынося общий множитель строки (столбца) за знак определителя.

П р и м е р 5. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 3 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

приведением к треугольному виду.

Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 1-ой строки:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе ко 2-ой строке прибавим 1-ю и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-2), получим:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к 3-й строке 2-ю, умноженную на (-2), и к 4-й строке – 2-ю, умноженную на (-1), получим:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе к 4-ой строке прибавим 3-ю, умноженную на (-2), получим:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, данный определитель приведен к треугольному виду, и, следовательно,

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 15 = -180.$$

2. Метод понижения порядка основан на использовании формул (7). Формула разложения определителя по строке (столбцу) принимает особенно простой вид, когда в этой строке (столбце) все элементы равны нулю, кроме одного.

Пример 6. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

методом понижения порядка.

Решение. *Вычтем из 3-й строки 4-ю и получим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по 3-й строке:

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к 3-му столбцу 2-ой, умноженный на 6, получим:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 16 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по 2-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot 25 = 75.$$

2.2. Задание

Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду и методом понижения порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Обратная матрица.

3.1. Теоретические сведения

Терминология и обозначения.

Матрица A^{-1} называется ***обратной к матрице*** A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрица A, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой.*

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц A и A^{-1} одинакового порядка.

Кваратная матрица A называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A называется *присоединенной* к матрице A.

Теорема (критерий обратимости). *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}. \tag{8}$$

Свойства обратной матрицы.

1. $E^{-1} = E$, так как $E \cdot E = E$
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$.

Вычисление обратной матрицы.

Соотношение (8) дает явный вид обратной матрицы. Оно полезно в теоретических исследованиях и совершенно неэффективно для практического вычисления (разве что для матриц второго порядка) вследствие большого объема требуемых вычислений. Для получения обратной матрицы к матрице n-го порядка согласно (8) требуется вычислить n^2 определителей $(n-1)$-го порядка и один определитель n-го порядка. В вычислительной математике используются различные дополнительные приемы вычисления обратной матрицы, которые по объему вычислений равносильны вычислению всего лишь двух определителей n-го порядка. Рассмотрим один из таких методов, в основе которого лежит *метод Гаусса*:

1) формируем расширенную матрицу $(A|E)$ приписыванием к матрице A справа матрицы E того же порядка;

2) с помощью метода Гаусса, производя элементарные преобразования **только над строками**, приводим сформированную расширенную матрицу к виду $(E|B)$, что всегда возможно, если A не вырождена.

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующих типов:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

б) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

в) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Тогда $A^{-1} = B$.

П р и м е р 7. *Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

и если существует, то найти ее.

<u>Решение.</u> Так как $\det A = -6 \neq 0$, *то матрица* A *невырожденная и* A^{-1} *существует.*

Способ 1. Найдем матрицу A *по формуле (8). Алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы* A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Найдем A^{-1} *с помощью расширенной матрицы и метода Гаусса. Составим расширенную матрицу*

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Прибавим к 3-й строке 1-ю, получим

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки, тогда

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Прибавив ко 2-й строке 3-ю, умноженную на (-1), получим

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Умножив 2-ю строку на $1/3$*, а 3-ю-на* $1/2$*, имеем*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Вычтем из 1-й строки 3-ю, тогда

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Задание

Найти матрицу, обратную данной, если она существует, двумя способами:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
19. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
24. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
25. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
26. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
28. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
29. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Ранг матрицы.
4.1. Теоретические сведения

Терминология и обозначения. *Рангом* ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю.

Обозначение: rg A, rang A и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, то $\mathrm{rg}A \leq \min(m, n)$;

2) равенство $\mathrm{rg}A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:

   а) в матрице A существует ненулевой минор r-го порядка,

   б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\mathrm{rg}A = r > 0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которым расположен базисный минор, – базисными строками и столбцами.

Разумеется, у матрицы может быть не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

Метод Гаусса вычисление ранга матрицы.

Теоретическую основу этого метода для решения данной задачи составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования не изменяют ее ранга;

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме.

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхне (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

П р и м е р 8. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы на месте a_{11} *оказалась единица:*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим 1-ю строку матрицы на -2, -5, -7 и прибавим соответственно ко 2-й, 3-й, 4-й строкам, получим

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поменяем местами 3-ю и 4-ю строки и 3-й и 4-й столбцы, получим

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rgA = 3$, *так как трапециевидная матрица имеет три ненулевых строки.*

4.2. Задание

Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \\ 6 & -3 & 17 & -38 & 23 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 & -6 \\ 4 & 3 & -9 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & 8 & -7 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -10 & -15 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.- 384.

Учебное издание

Алгебра матриц

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.