МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)"

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Электронные методические указания

САМАРА 2011

УДК 512.8

Составители:Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Рецензент Дегтярев А.А., к.т.н., доцент кафедры ТК

Алгебра и геометрия. Билинейные и квадратичные формы
[Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост.: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. - Электрон. текстовые и граф. дан. (306 Кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Билинейные и квадратичные формы"курса "Алгебра и геометрия".

Методические указания предназначены для студентов 6 факультета для бакалавров направления 010400.62 "Прикладная математика и информатика", изучающих дисциплину "Алгебра и геометрия (вариативная часть)"в 3 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Содержание

Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории билинейных и квадратичных форм. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных операторов.

Автор благодарит студентов факультета информатики Горецкую Т.А., Кузянина М.С. и Комарову М.С. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

1 Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах

1.1 Билинейные формы

Будем рассматривать формы в вещественном линейном пространстве.

Пусть $\mathcal{L}-$ вещественное линейное пространство.

Числовая функция $f(x, y)$, аргументами которой являются всевозможные векторы $x, y \in \mathcal{L}$, называется *билинейной формой (билинейным функционалом)*, если $\forall\, x, y, z \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

- $f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y)$;
- $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$;
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;
- $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Билинейная форма называется *симметричной (кососимметричной)*, если

$$f(x, y) = f(y, x) \quad (f(x, y) = -f(y, x)).$$

Примеры билинейных форм.

1. Скалярное произведение (x, y) в вещественном евклидовом пространстве является симметричной билинейной формой.
2. Если $f(x), g(y)$ – линейные формы, $x, y \in \mathcal{L}$, то $f(x)g(y)$ – симметричная билинейная форма.

Теорема 1. *Билинейная форма f(x,y) при заданном в n-мерном линейном пространстве базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ может быть однозначно представлена в следующем виде*

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{1}$$

где

$$a_{ij} = f(e_i, e_j), \tag{2}$$

а x_i, y_i – координаты в базисе e векторов x и y соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ – разложение векторов x и y по базису e.

Так как форма $f(x, y)$ линейна по каждому из аргументов x и y согласно (1), то

$$f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} f(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Чтобы доказать однозначность этого представления, предположим, что для $f(x,y)$ справедливо представление (1) с некоторыми коэффициентами a_{ij}. Беря в (1) $x = e_i, y = e_j$ мы сразу же получим выражения (2) для коэффициентов a_{ij}. □

Представление (1) называется *общим видом билинейной формы в произвольном базисе.*

Пусть $A_e = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица билинейной формы в базисе e.

$$f(x,y) = x_e^T A_e y_e, \quad f(x,y) = y_e^T A_e x_e. \tag{3}$$

Представления (3) называются *компактными представлениями билинейной формы в базисе e.* Первое из равенств (3) проверяется непосредственно, второе равенство можно получить транспонированием обеих частей первого.

Теорема 2. *Билинейная форма является симметричной тогда и только тогда, когда ее матрица в произвольном базисе e является симметричной.*

$$f(x,y) = f(y,x) \Leftrightarrow A_e = A_e^T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Необходимость.
$f(x,y) = f(y,x)$,
$f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.
Достаточность.
$A_e = A_e^T$,
$f(x,y) = y_e^T A_e^T x_e = y_e^T A_e x_e = f(y,x)$. □

Теорема 3. *Матрицы билинейной формы в базисах e и $f = eP_{e\to f}$ связаны соотношением*

$$A_f = P_{e\to f}^T A_e P_{e\to f},$$

где A_e, A_f– соответственно матрицы в базисах e и f , а $P_{e\to f}$– матрица перехода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3), с одной стороны,

$$f(x,y) = x_e^T A_e y_e \ = (\ \ x_e = P_{e\to f} x_f, \quad y_e = P_{e\to f} x_f y_f \ \ ) =$$

$$= x_f^T P_{e\to f}^T A_e P_{e\to f} y_f.$$

С другой стороны $f(x,y) = x_f^T A_f y_f$. Отсюда, с учетом произвольности x, y следует утверждение теоремы. □

Следствие. $rgA_e = rgA_f$, так как матрица $P_{e\to f}$– невырожденная, а умножение справа и слева на невырожденную матрицу говорит о том, что мы производим элементарные преобразования, неизменяющие ранга матрицы.

Рангом билинейной формы будем называть ранг ее матрицы в произвольном базисе.

Билинейная форма называется *вырожденной*, если ее ранг меньше размерности пространства, в котором она определена.

П р и м е р 1. *Составить матрицу билинейной формы*:
1. $x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$.
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$.

Решение.
1.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1.2 Квадратичные формы.

Рассмотрим симметричную билинейную форму $f(x, y)$ в вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Квадратичной формой (функцией , функционалом) будем называть вещественнозначную функцию $f(x, x)$, полученную из симметричной билинейной формы путем замены y на x, где $x \in \mathcal{L}$.

Соответствующую билинейную форму называют *полярной к квадратичной форме* $f(x, x)$.

Связь между квадратичной и полярной формой:
$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y, x + y) - f(y, y) - f(x, x))$.

В базисе e квадратичная форма $f(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в следующем общем виде:
$f(x, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$,
$a_{ij} = a_{ji}$,
или в компактной форме $f(x, x) = x_e^T A_e x_e$.

Рангом квадратичной формы будем называть ранг ее матрицы в произвольном базисе.

Квадратичная форма *вырожденная*, если ранг формы меньше размерности пространства, в котором она определена.

П р и м е р 2. *Составить матрицу билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в двумерном пространстве, если билинейная форма:* $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_1y_2$.

Решение. Матрица билинейной формы будет иметь вид
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая квадратичная форма:
$f(x,x) = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - 5x_2^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$.

Виды квадратичных форм.

1. Квадратичная форма $f(x,x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $\forall x \neq \theta\ f(x,x) > 0$ ($f(x,x) < 0$).

2. Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если $\exists x, y \in \mathcal{L}$, такие, что одновременно выполняются $f(x,x) > 0$ и $f(y,y) < 0$.

3. Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной)*, если $\forall x \quad f(x,x) \geq 0$ $(f(x,x) \leq 0)$ и $\exists x \neq \theta$, при котором $f(x,x) = 0$.

Теорема 4. *Пусть $f(x,y)$– симметричная билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме $f(x,x)$, тогда форма $f(x,y)$ определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если число, называемое скалярным произведением векторов x и y, обозначить символом $f(x,y)$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

1) $f(x,y) = f(y,x)$;
2) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$;
3) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$;
4) $f(x,x) \geq 0,\ f(x,x) > 0, x \neq \theta$.

Так как билинейная форма $f(x,y)$ полярная квадратичной форме $f(x,x)$ симметрична, то аксиома 1) выполняется. аксиомы 2) и 3) в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы. Аксиома 4) выполняется, так как квадратичная форма $f(x,x)$ положительно определена. Значит билинейная форма определяет скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве. □

1.3 Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Рассмотрим различные меоды приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т. е. рассмотрим методы выбора такого базиса $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, по отношению к которому квадратичная форма представляется в следующем *каноническом виде*:

$$f(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2, \tag{4}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты x в базисе f.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в выражении (4) называются *каноническими коэффициентами.*

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

Метод Лагранжа.

Теорема 5. *Любая квадратичная форма $f(x,x)$, заданная в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду* (4).

Доказательство. Проведем доказательство теоремы *методом Лагранжа.* Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $f(x,x) \neq 0$ (если форма $f(x,x) \equiv 0$, то ее матрица в любом базисе состоит из нулевых элементов, и поэтому такая форма по определению имеет канонический вид в любом базисе) и в данном базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ имеет вид

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $f(x,x)$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора x будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. (Напомним, что $f(x,x) \neq 0$ и поэтому хотя бы один коэффициент a_{ij} отличен от нуля). Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат (определитель матрицы этого преобразования равен 2, и поэтому это преобразование невырожденное):

$$\begin{aligned} &x_1' = x_1 - x_2, \\ &x_2' = x_1 + x_2, \\ &x_i' = x_i, \ i = 3, \ 4, \ \ldots, \ n. \end{aligned}$$

После этого преобразования коэффициент при x_i^2 будет равен $2a_{12}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (5) $a_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (5) ту группу слагаемых, которые содержат x_1. Получим

$$f(x,x) = a_{11}x_1^2 \ + \ 2a_{12}x_1x_2 \ + \ \ldots \ + \ 2a_{1n}x_1x_n \ + \sum_{i,j \ = \ 2}^{n} a_{ij}x_ix_j. \qquad (6)$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + x_2\frac{a_{12}}{a_{11}} + \ldots + x_n\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2 -$$

$$-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - \ldots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n.$$

Очевидно, выражение (6) можно теперь переписать так:

$$f(x,x) \ = \ a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 \ + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*x_ix_j, \qquad (7)$$

где a_{ij}^*–коэффициенты при x_ix_j, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$x_1' \ = \ x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$

$$x_2' \ = \ x_2,$$

$$\ldots$$

$$x_n' \ = \ x_n.$$

С помощью этого преобразования и представления (7) для $f(x,x)$ получим

$$f(x,x) \ = \ a_{11}(x_1')^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*x_i'x_j'. \qquad (8)$$

Итак, если форма $f(x,x) \ \neq \ 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (8).

Обратимся теперь к квадратичнй форме $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*x_i'x_j'$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $f(x,x)$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*x_ix_j \ \neq \ 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразования координат $x_2', \ \ldots, x_n'$, аналогичные описанным выше, и не меняя при этом координату x_1'. Очевидно, такого типа преобразования координат $x_1', \ x_2', \ \ldots, \ x_n'$ будут невырожденными.

Ясно что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $f(x,x)$ к каноническому виду (4).

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. $\Box$

Замечание 1. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим.* Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

Замечание 2. Если форма $f(x,x)$ приведена к каноническому виду (4), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты λ_i отличны от нуля. Оставляя в (4) лишь отличные от нуля λ_i и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $f(x,x)$:

$$f(x,x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2. \tag{9}$$

Ясно, что $r \leq n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (9) и условия $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$ вытекает, что ранг формы равен r. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

Метод Якоби.

При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $f(x,x)$ можно указать явные формулы перехода от данного $e = (e_1,\ e_2, ..., e_n)$ базиса к каноническому $e' = (e_1',\ e_2', ..., e_n')$ и указать явные формулы канонических коэффициентов λ_i.

Введем понятие треугольного преобразования базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $e = (e_1,\ e_2, ..., e_n)$ называется *треугольным,* если оно имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l} e_1' = e_1, \\ e_2' = \alpha_{21} e_1 + e_2, \\ e_3' = \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + e_3, \\ \ \ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_n' = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + ... + e_n. \end{array} \tag{10}$$

Пусть $f(x,x)-$ квадратичная форма. И пусть $A-$ матрица квадратичной формы в базисе e.

Пусть $\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots\ ,\ \Delta_n = |A|$ – угловые миноры матрицы A.

Теорема 6. *Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы $f(x,x)$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $e_1,\ e_2, ..., e_n$, которое приводит эту квадратичную форму к каноническому виду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коэффициенты b_{ij} квадратичной формы $f(x,x)$ в базисе e' вычисляются по формулам

$$b_{ij} = f(e'_i, e'_j). \tag{11}$$

Используя равенства (10) и линейное свойство квадратичной формы $f(x,x)$ по каждому аргументу, легко заметить, что соотношения (11) будут выполнены, если будут выполнены соотношения:

$$f(e_1, e'_j) = 0, \quad f(e_2, e'_j) = 0 \quad ... \quad f(e_{j-1}, e'_j) = 0, \quad j = 2, 3, ..., n. \tag{12}$$

Запишем формулы (12) в развернутом виде. Для этого подставим в левые части этих формул выражение

$$e'_j = \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j \tag{13}$$

из соотношений (10). Используя далее свойство линейности $f(x,x)$ по каждому аргументу и обозначение $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, получим в результате следующую систему уравнений для неизвестных коэффициентов α_{jk}:

$$\begin{cases} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{1j-1} + a_{1j} &= 0, \\ \alpha_{j1}a_{21} + \alpha_{j2}a_{22} + ... + \alpha_{jj-1}a_{2j-1} + a_{2j} &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ \alpha_{j1}a_{j-11} + \alpha_{j2}a_{j-12} + ... + \alpha_{jj-1}a_{j-1j-1} + a_{j-1j} &= 0, \end{cases} \tag{14}$$

Определитель этой системы равен Δ_{j-1}. По условию $\Delta_{j-1} \neq 0$. Следовательно, система (14) имеет единственное решение. Таким образом, можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого квадратичная форма $f(x,x)$ приводится к каноническому виду. □

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты α_{ji} искомого треугольного преобразования и формулы для канонических коэффициентов λ_j. Используя формулу Крамера находим выражение для коэффициентов:

$$\alpha_{ji} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}, \tag{15}$$

где $\Delta_{j-1,i}$ минор матрицы A, расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, ...j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., j$. Так как j-й столбец должен стоять на i-ом месте, а мы приписываем его справа, то необходимо домножить на знак перестановки j-го столбца на i-е место.

Вычислим канонические коэффициенты λ_j.

$\lambda_{ij} = b_{jj} = f(e'_j, e'_j) = f(e_j, e'_j) = f(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + ... + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j) =$
$= \alpha_{ij}a_{j1} + \alpha_{j2}a_{j2} + ... + \alpha_{jj-1}a_{jj-1} + a_{jj}.$

Подставляя выражение (15) для α_{ji}, $\quad i = 1, 2, ..., j-1$ в правую часть последнего соотношения, найдем

$\lambda_j =$

$$= \frac{(-1)^{j+1}\Delta_{j-1,1}a_{j1} + (-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2}a_{j2} + ... + (-1)^{i+j-1}\Delta_{j-1,j-1}a_{jj-1} + a_{jj}\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-1}}.$$

Числитель последнего соотношения представляет собой сумму произведений элементов строки с номером j в определителе Δ_j на алгебраические дополнения этих элементов в указанном определителе. Следовательно, этот числитель равен Δ_j. Поэтому

$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, ..., n,$

$\lambda_1 = f(e'_1, e'_1) = f(e_1, e_1) = a_{11} = \Delta_1.$

П р и м е р 3. *С помощью метода Якоби вычислить коэффициенты треугольного преобразования и канонические коэффициенты, если квадратичная форма имеет вид:*

$f(x, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

Решение.

Так как форма квадратичная, то матрица ее будет симметричной:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = 2; \quad \Delta_2 = 2; \quad \Delta_3 = 1.$

$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{1}{2}.$

$\alpha_{21} = -\frac{2}{2} = -1; \quad \alpha_{31} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_{32} = 0.$

1.4. Закон инерции квадратичных форм

Мы уже отмечали, что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразованияа, с помощью которого форма приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции квадратичных форм.*

Теорема 7 (закон инерции квадратичных форм) . Число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть e и f – канонические базисы квадратичной формы $f(x, x)$ ранга r и для $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$

$$f(x,x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_px_p^2 - a_{p+1}x_{p+1}^2 - ... - a_rx_r^2,$$

$$f(x,x) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_{p'}y_{p'}^2 - b_{p'+1}y_{p'+1}^2 - ... - b_ry_r^2,$$

где $a_i > 0,\ b_i > 0, i = 1, 2, ..., r$. Необходимо доказать, что $p = p'$.

1) Докажем, что $p \leq p'$. Предположим,что это не выполняется, т.е. $p > p'$. Рассмотрим два подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_p)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(f_{p'+1}, f_{p'+2}, ..., f_n)$,

$\dim(\mathcal{L}1 \bigcap \mathcal{L}_2) = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 - \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = p + (n - p') - \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$.

Так как $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \leq n,\ p > p'$, то $\dim(\mathcal{L}_1 \bigcap \mathcal{L}_2) > 0$.

Следовательно, существует $x_0 \neq \theta$ и $x_0 \in \dim(\mathcal{L}_1 \bigcap \mathcal{L}_2)$.

Пусть $x_0 = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + ...\alpha_pe_p = \beta_{p'+1}f_{p'+1} + ... + \beta_nf_n$.

Тогда

$$f(x_0, x_0) = a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + ... + a_p\alpha_p^2 = -b_{p'+1}\beta_{p'+1}^2 - ... - b_r\beta_r^2. \qquad (16)$$

Так как $x_0 \neq \theta$, то $a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + ... + a_p\alpha_p^2 > 0,\ -b_{p'+1}\beta_{p'+1}^2 - ... - b_r\beta_r^2 < 0$. Это противоречит (16), и значит, $p \leq p'$.

2) $p \geq p'$ доказывается аналогично. $\square$

Введем обозначения:

$i_+ = p$ – положительный индекс инерции – число положительных коэффициентов в каноническом разложении квадратичной формы.

$i_- = q$ – отрицательный индекс инерции – число отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

r – ранг квадратичной формы.

$s = p - q$ – сигнатура квадратичной формы.

Вид квадратичной формы

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \qquad (17)$$

называется *нормальным*.

Теорема 8 (критерий знакоопределенности квадратичной формы). *Для того чтобы квадратичная форма, заданная в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы в случае положительной определенности $p = n$, а в случае отрицательной определенности $q = n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.**

Пусть форма $f(x,x)$ положительно определена. Тогда выражение (17) примет вид $f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2$.

Если при этом $p < n$, то из последнего выражения следует, что для $x \neq \theta$ с координатами

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_p = 0,\ x_{p+1} \neq 0, \dots, x_n \neq 0$$

форма $f(x,x)$ обращается в нуль, а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы, поэтому $p = n$.

Достаточность. Пусть $p = n$. Тогда соотношение (17) имеет вид $f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$.

Ясно, что $f(x,x) \geq 0$, причем, если $f(x,x) = 0$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $x = \theta$. Следовательно, $f(x,x)$ – положительно определенная форма.□

Замечание. Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

Теорема 9 (критерий знакопеременности квадратичной формы). *Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы $p \neq 0$ и $q \neq 0$.*

Доказательство. **Необходимость.** Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ее представление (17) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные слагаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от нуля.

Достаточность. Пусть $p \neq 0$ и $q \neq 0$.
Тогда для вектора $x' = (0,\ 0 \dots 0,\ x_{p+1}, \dots, x_n)$ имеем $f(x', x') < 0$, а для вектора $x'' = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0,\ 0, \dots, 0)$ имеем $f(x'', x'') > 0$. Следовательно, форма $f(x,x)$ является знакопеременной. □

Теорема 10 (критерий полуопределённости квадратичной формы). *Для того, чтобы квадратичная форма $f(x,x)$ была полуопределённой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

для положительной полуопределённости: $p < n$, $q = 0$;

для отрицательной полуопределённости: $q < n$, $p = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай положительно полуопределённой квадратичной формы. Случай отрицательной полуопределенности рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть форма $f(x,x)$ положительно полуопределенная. Тогда, очевидно, $p < n$ и $q = 0$ (если бы $p = n$, то форма была бы положительно определённой).

Достаточность. Если $p < n$, $q = 0$, то $f(x,x) \geq 0$ и для
$x = (0,\ 0, \dots, x_{p+1}, \dots, x_n)$ имеем $f(x,x)$=0, т.е. $f(x,x)$ – положительно полуопределенная форма. □

П р и м е р 4.
Дана квадратичная форма $f(x,x) = {x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2$, $(n = 2)$. *Определить вид формы.*
Решение.
${x_1}^2 + 4x_1x_3 + {x_2}^2 + 2x_2x_3 + 4{x_3}^2 = ({x_1}^2 + 4x_1x_3 + 4{x_3}^2) + ({x_2}^2 + 2x_2x_3 + {x_3}^2) - -x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - {x_3}^2$.

Произведём замену:
$y_1 = x_1 + 2x_3$;
$y_2 = x_2 + x_3$;
$y_3 = x_3$.
Получим: ${y_1}^2 + {y_2}^2 - {y_3}^2$.
Следовательно, форма является знакопеременной $(p = 2,\ q = 1)$.

Критерий Сильвестра.

Пусть форма $f(x,x)$ в базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ определяется матрицей $A_e = (a_{ij})$:

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

и пусть

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n = |A|.$$

Теорема 11 (критерий Сильвестра).
Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определённой необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Для того, чтобы квадратичноая форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причём $\Delta_1 < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Докажем сначала, что из условия знакоопределенности квадратичной формы $f(x,x)$ следует $\Delta_i \neq 0$.

Убедимся, что предположение $\Delta_k = 0$ ведет к противоречию – при этом предположении $\exists x \neq \theta$, при котором квадратичная форма обращается в ноль, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, пусть $\Delta_k = 0$. Рассмотрим следующую квадратную однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = & 0, \end{cases}$$

По предположению $\Delta_k = 0$, следовательно, однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение. Далее умножим последовательно первое уравнение на x_1, второе – на x_2, последнее уравнение – на x_k и сложим все k уравнений. В результате получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы для $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ...0) \neq 0$. Это значение равно нулю, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому мы можем применить метод Якоби приведения формы к сумме квадратов и воспользоваться формулами для вычисления канонических коэффициентов:
$\lambda_1 = \Delta_1,\ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ ...,\ \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
Т. к. квадратичная форма положительно определённая, то $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$, следовательно, все $\Delta_i > 0$.

Если же $f(x, x)$ – отрицательно определенная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны и знаки угловых миноров будут чередоваться, причем $\Delta_1 < 0$.

Достаточность. Пусть все $\Delta_i > 0$, где $i = 1, 2, ..., n$, т.е. угловые миноры отличны от нуля, поэтому мы снова можем использовать метод Якоби.

$\Delta_i > 0$, следовательно, все $\lambda_i > 0$, отсюда по определению следует, что квадратичная форма будет положительно определённой.

Если же знаки Δ_i чередуются и $\Delta_1 < 0$, то все канонические коэффициенты $\lambda_i < 0$, т.е форма будет отрицательно определенной.$\square$

П р и м е р 5. *Дана квадратичная форма:*
$f(x, x) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,\ (n = 3)$.
Определить, является ли эта форма знакоопределённой.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0,\ \Delta_3 = |A| = 1 > 0.$$

Все $\Delta_i > 0$, следовательно, квадратичная форма положительно определённая.

2. Билинейные и квадратичные формы в комплексном линейном пространстве

Пусть $\mathcal{V}_n$ – комплексное линейное пространство. Комплекснозначную функцию двух аргументов $f(x, y)$, где $x, y \in \mathcal{V}$, будем называть *полуторалинейной формой*, если $\forall\ x, y, z \in \mathcal{V}_n,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения:

1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;
2) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$;
3) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;
4) $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$.

Полуторалинейную форму называют *эрмитовой*, если

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}\ \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис в комплексном линейном пространстве. Рассмотрим следующее выражение:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_i \tag{18}$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Матрица $A_e = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ называется *матрицей полуторалинейной формы*, а вид (18) называется *общим видом полуторалинейной формы.*

Компактное представление полуторалинейной формы имеет вид

$$f(x, y) = [x]_e{}^T A_e \overline{[y]}_e = \overline{[y]}_e A^T [x]_e. \tag{19}$$

Ранг полуторалинейной формы – это ранг её матрицы.

Полуторалинейная форма называется *вырожденной*,
если $\mathrm{rg} f(x, y) < \dim(\mathcal{V}_n)$.

Теорема 12. *Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда её матрица в любом базисе является эрмитовой.*

Теорема 13. *Матрицы полуторалинейной формы $f(x, y)$ в базисах e и f A_e и A_f связаны соотношением*

$$A_f = P^T{}_{e \to f} A_e \bar{P}_{e \to f}$$

Пусть $\mathcal{V}_n$ - комплексное линейное пространство, а $f(x, y)$ – эрмитовая полуторалинейная форма. Числовая вещественнозначная функция $f(x, x)$, которая получается из эрмитовой полуторалинейной формы заменой y на x, $x \in \mathcal{V}_n$, называется *эрмитовой квадратичной формой.* Соответственно $f(x, y)$ называется полярной полуторалинейной формой к эрмитовой форме.

Эрмитова форма может быть представлена в виде

$$f(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{x_j},$$

$a_{ij}=\overline{a}_{ij}$.

Запись в компактном виде:

$$f(x,x)=[x]_e^T A_e\overline{[x]}_e=\overline{[x]}_e {A_e}^T[x]_e.$$

<u>Канонический вид квадратичной формы в комплексном линейном пространстве.</u>

$$f(x,x)=\lambda_1|x_1|^2+\lambda_2|x_2|^2+...+\lambda_r|x_r|^2,$$

где r - ранг квадратичной формы, $\dim(\mathcal{V}_n)=n$.

Метод Лагранжа приведения к каноническому виду применим и для эрмитовой формы. Изменение алгоритма состоит лишь в том, что на каждом шаге определяется полный квадрат модуля.

Остаются справедливыми формулы метода Якоби, закон инерции квадратичных форм и критерий Сильвестра.

П р и м е р 6. *Составить матрицу данной эрмитовой полулинейной формы в двумерном пространстве и записать соответствующую квадратичную форму. Определить по критерию Сильвестра вид формы.*

$f(x,y)=2x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}-5x_2\overline{y_2}$.

<u>Решение</u>.

$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$.

$f(x,x)=2|x_1|^2+(1+i)x_1\overline{x_2}+(1-i)x_2\overline{x_1}-5|x_2|^2$,

$\Delta_1=2>0, \Delta_2=-12<0$, форма является знакопеременной.

3. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть билинейная форма задана в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$. Справедлива следующая теорема о специальном представлении такой формы.

Теорема 14. *Пусть $f(x,y)$ - билинейная квадратичная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, такой, что справедливо равенство:*

$$f(x,y) = (x, \varphi y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть y – любой фиксированный элемень пространства $\mathcal{E}_n$, тогда $f(x,y)$ представляет собой линейную форму аргумента x.

Лемма. *Пусть $f(x)$ – линейная форма в вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$. Тогда существует единственный элемент $h \in \mathcal{E}_n$, такой, что выполняется:*

$$f(x) = (x, h), \qquad \forall x \in \mathcal{E}_n. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Выберем произвольный ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$. Рассмотрим элемент h, координаты которого в выбранном базисе определяются соотношениями

$$h_k = f(e_k). \tag{$*$}$$

Таким образом, $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i e_i$, $\; h = (h_1, h_2, ..., h_n)$.

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Используя свойства линейной формы и равенство (*), получим

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i.$$

Так как в ортонормированном базисе $(x,h) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i h_i$, то получаем, что $f(x) = (x,h)$.

2) Докажем единственность. Пусть h_1 и h_2 – два вектора таких, что с помощью этих векторов форма $f(x)$ может быть представлена в виде (16). Очевидно, $\forall x \in \mathcal{E}_n$
$(x_1, h_1) = (x_1, h_2)$,
$(x_1, h_1) - (x_1, h_2) = 0$,
$(x_1, h_1 - h_2) = 0$,
Так как x - произвольный, предположим, что он равен $h_1 - h_2$. Получаем: $(h_1 - h_2, h_1 - h_2) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $h_1 - h_2 = \theta$,

следовательно, $h_1 = h_2$. $\square$

Поэтому по лемме можно указать такой однозначно определенный элемент $h \in \mathcal{E}_n$, что $f(x,y) = (x,h)$. Итак, каждому элементу $y \in \mathcal{E}_n$ по правилу (15) ставится в соответствие единственный элемент из $\mathcal{E}_n$. Таким образом, определен оператор φ: $h = \varphi y$. Из свойств билинейной формы и скалярного произведения следует линейность этого оператора.

2) Докажем единственность оператора φ. Пусть φ_1, φ_2 – два оператора таких, что с помощью этих операторов форма $f(x,y)$ может быть представлена в виде (15). Очевидно, для $\forall x, y$ справедливо соотношение $(x, \varphi_1 y) = (x, \varphi_2 y)$, из которого следует равенство $(x, \varphi_1 y - \varphi_2 y) = 0$.

Полагая в этом равенстве $x = \varphi_1 y - \varphi_2 y$ найдем

$$(\varphi_1 y - \varphi_2 y, \varphi_1 y - \varphi_2 y) = 0.$$

Таким образом, $\varphi_1 y = \varphi_2 y$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Следствие. Наряду с равенством (15) справедливо

$$f(x,y) = (\varphi x, y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \tag{17}$$

Теорема 15. *Пусть $f(x,y)$ – билинейная форма, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ и пусть $[f]_e = B$ – матрица линейного оператора, фигурирующего в равенстве (17), причем e – ортонормированный базис. Тогда*

$$a_{ij} = b_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n,$$

где a_{ij} – элементы матрицы билинейной формы в этом базисе.

Доказательство. $a_{ij} = (\varphi e_i, e_j) = (\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik} e_k, e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik} (e_k, e_j)$. Так как базис e – ортонормированный, то из всех слагаемых последней суммы не равно нулю будет лишь то, которое получается при $k = j$, следовательно, $a_{ij} = b_{ij}$ $\square$.

Теорема 16. *Билинейная форма $f(x,y)$, определённая в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, является симметричной тогда и только тогда, когда оператор φ, фигурирующий в (17), является самосопряженным*

$$f(x,y) = f(y,x) \Leftrightarrow (\varphi x, y) = (x, \varphi y).$$

Доказательство.
Необходимость. $(\varphi x, y) = f(x,y) = f(y,x) = (\varphi x, y) = (x, \varphi y)$.

Достаточность. $f(x,y) = (\varphi x, y) = (x, \varphi y) = (\varphi y, x) = f(y,x)$. $\square$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе.

Теорема 17. *Пусть $f(x,y)$ – симметричная билинейная форма, определённая в $\mathcal{E}_n$, тогда существует ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$ и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, такие, что $\forall x \in \mathcal{E}_n$ справедливо представление*

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2,$$

где$[x]_e = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для билинейной формы справедливо $f(x,y) = (\varphi x, y)$.

Так как она симметричная, то по предыдущей теореме φ будет самосопряжённым. Для самосопряжённого оператора можно указать ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$ из собственных векторов этого оператора. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные значения, отвечающие собственным векторам и пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $\varphi x = \lambda x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$.

$f(x,x) = (\varphi x, x)$, т. к. базис $e_1, e_2, ..., e_n$ – ортонормированный, то получим:

$$(\varphi x, x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2. \ \square$$

Замечание. *Канонический базис квадратичной формы $f(x,x)$ совпадает с ортонормированным базисом из собственных векторов сопряженного оператора, а канонические коэффициенты – с отвечающими им собственными значениями.*

Пусть A – матрица линейного оператора и матрица квадратичной формы в базисе e.

$A = [\varphi]_e = [f(x,x)]_e$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$

$\Lambda = {P^{-1}}_{e \to e'} A P_{e \to e'}$, где $P_{e \to e'}$ – ортогональная, т.е. ${P^{-1}}_{e \to e'} = P^T_{e \to e'}$.

П р и м е р 7. *Найти канонический вид квадратичной формы $f(x,x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$, к которому она приводится ортогональным преобразованием и указать одно из таких ортогональных преобразований*

$(n = 2)$.

<u>*Решение*</u>.
$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9,$

$f(x', x') = (x'_1)^2 + 9(x'_2)^2$

Для того, чтобы найти ортогональное преобразование, с помощью которого форма приводится к каноническому виду, необходимо найти соответствующие собственные векторы для собственных значений, проверить их на ортогональность и пронормировать, выписать по столбцам в матрицу перехода.
$x_e = P_{e\to e'} x_e,$

$$P_{e\to e'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду</u>.

Теорема 18. *Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ - симметричные билинейные формы, определённые в вещественном линейном пространстве, причём квадратичная форма, полученная из билинейной формы $g(x, y)$ является положительно определённой. Тогда существует базис $e_1, e_2, ..., e_n$, в котором справедливо представление*

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i^2, \tag{18}$$

$$g(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{19}$$

где $x_e = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как $g(x, y)$ является полярной к положительно определенной квадратичной форме $g(x, x)$, то по теореме

$$(x, y) = g(x, y). \tag{20}$$

Введя таким образом скалярное произведение, мы переходим в евклидово пространство $\mathcal{E}_n$. Для $\mathcal{E}_n$ по теореме (представление квадратичной формы в каноническом виде в ортонормированном базисе): $f(x,x) = \sum \lambda x_i^2$.

С другой стороны, в любом ортонормированном базисе $(x,x) = g(x,x)$.

$$g(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \ \square$$

Один из способов поиска общего базиса, в котором формы $f(x,x)$ и $g(x,x)$ имеют канонический вид (18) и (19) состоит в следующем.

Пусть $A = [f(x,x)]_e$, $\Lambda = [f(x,x)]_{e'}$,
$B = [g(x,y)]_e$, $E = [g(x,x)]_{e'}$, $g(x,x)$ – положительно определенная,
$\Lambda = P^T_{e\to e'} A P_{e\to e'}$,
$A = (P^T_{e\to e'})^{-1} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1}$,
$E = P^T_{e\to e'} B P_{e\to e'}$,
$B = (P^T_{e\to e'})^{-1} E (P_{e\to e'})^{-1}$,
$B^{-1} = P_{e\to e'} P^T_{e\to e'}$,
$B^{-1}A = P_{e\to e'} P^T_{e\to e'} (P^T_{e\to e'})^{-1} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1} = P_{e\to e'} \Lambda (P_{e\to e'})^{-1}$,
$B^{-1} A P_{e\to e'} = P_{e\to e'} \Lambda$ – получили определение собственных значений и собственных векторов матрицы $(B^{-1}A)$.

$$|B^{-1}A - \lambda E| = 0,$$
$$|A - \lambda B| = 0.$$

П р и м е р 8. *Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных форм является знакоопределённой. Найти замену координат, приводящих эти две формы к нормальному, и записать канонический вид этих форм.*
$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$,
$f = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$.

Решение.
$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix},$
$|A - \lambda B| = 0, \qquad \lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -4,$
$f(x',x') = 5{x'}_1^2 - 4{x'}_2^2$,
$g(x',x') = {x'}_1^2 + {x'}_2^2$.

Задание

1. Дана матрица билинейной формы в базисе e_1, e_2, e_3, и соотношения между новыми и старыми базисными векторами. Найти матрицу билинейной формы в новом базисе $e_1',\ e_2',\ e_3'$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

0. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' &= \tfrac{2}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 1. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{2}{3}e_3 \\ e_2' &= 2e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e_2' &= \tfrac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 3. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 4e_3 \\ e_2' &= \tfrac{4}{5}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{4}{5}e_3 \\ e_2' &= -4e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 5. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 - 5e_3 \\ e_2' &= \tfrac{5}{6}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{5}{6}e_3 \\ e_2' &= -5e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 7. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' &= \tfrac{3}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + 4e_3 \\ e_2' &= \tfrac{4}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$ 9. $\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + \tfrac{3}{2}e_3 \\ e_2' &= 3e_1 + e_2 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

Номер варианта состоит из двух цифр - номера матрицы и номера системы. Например, вариант 46 - четвертая матрица, шестая система.

2. Преобразовать квадратичную форму по методу Лагранжа и найти матрицу перехода к новому базису

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$

3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - x_3^2$

5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$

8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$

10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$

11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$

12.$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$

13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

14. $x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$

15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$

16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$

17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$

18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$

19. $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

20. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$

21.$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$

22. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$

23. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

24. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$

25. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.-320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*М.: Высшая школа, 1998.- 320.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 496 с.

5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* Мн.: Выш. школа, 1980.-192 с.

Учебное издание

Билинейные и квадратичные формы

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.