МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)"

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Электронные методические указания

САМАРА 2011

УДК 512.8

Составители:Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Рецензент Дегтярев А.А., к.т.н., доцент кафедры ТК

Алгебра и геометрия. Линейные пространства [Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост.: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. - Электрон. текстовые и граф. дан. (430Кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Линейные пространства"курса "Алгебра и геометрия".

Методические указания содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Линейные пространства"курса "Алгебра и геометрия", а также рекомендуются в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов 6 факультета для бакалавров направления 010400.62 "Прикладная математика и информатика", изучающих дисциплину "Алгебра и геометрия (вариативная часть)"во 2 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Содержание

Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории линейных пространств. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных пространств.

Автор благодарит студентов факультета информатики Стрилец Т.С. и Силакову М.В. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

1. Линейные пространства

1.1 Понятие линейного пространства

Рассмотрим множества объектов любой природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определены операция сложения двух элементов и операция умножения на число элемента этого множества. Такие множества, называемые линейными пространствами, обладают целом рядом общих свойств, которые и будут установлены ниже.

Множество $\mathcal{L}$ элементов любой природы будем называть *линейным пространством*, если выполнены следующие требования.

I. Имеется правило, посредством которого $\forall x, y \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $z \in \mathcal{L}$, называемый *суммой* и обозначаемый $z = x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого $\forall x \in \mathcal{L}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ставится в соответствие элемент $u \in \mathcal{L}$, называемый *произведением элемента* x *на число* λ и обозначаемый $u = \lambda x$.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{L}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\exists \theta \in \mathcal{L} : x + \theta = x$;
4) $\forall x \ \exists x' \in \mathcal{L}$(противоположный элемент): $x + x' = \theta$;
5) $1 \cdot x = x$;
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$;
7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
8) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$.

Если число $\lambda \in \mathbb{R}$, то множество $\mathcal{L}$ называется вещественным линейным пространством. Если число $\lambda \in \mathbb{C}$, то множество $\mathcal{L}$ называется комплексным линейным пространством.

Примеры линейных пространств.

1. Множество функций $C_{[a,b]}$, определенных и непрерывных на $[a, b]$. Операции сложения таких функций и умножения их на вещественные числа определены обычными правилами математического анализа. Элементарно проверяется справедливость восьми аксиом, в частности, нулевым элементом является функция, тождественно равная нулю на отрезке $[a, b]$. Это позволяет заключить, что $C_{[a,b]}$ является линейным пространством.

2. Множество $P_n(x)$ алгебраических многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, с операциями, опеределенными так же, как в предыдущем примере. Заметим, что множество $P_n(x)$, если его рассматривать на отрезке $[a, b]$, является подмножеством линейного пространства $C_{[a,b]}$, рассмотренного в предыдущем примере.

П р и м е р 1. *Определить, является ли множество матриц* $M^{2\times 2}$ *вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, *где* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *линейным пространством?*

Решение.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}$, *тогда*

$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 2 \end{pmatrix}$.

$C \notin M^{2\times 2}$, *следовательно, множество не является ни вещественным, ни комплексным линейным пространством.*

П р и м е р 2. *Определить, является ли множество матриц* $S^{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, *вещественным линейным пространством*?

Решение.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$, *тогда*

$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times 2}$,

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \end{pmatrix} \in S^{2\times 2}$, *где* $\lambda \in \mathbb{R}$, *все 8 аксиом выполняются тоже, следовательно, множество матриц является вещественным линейным пространством.*

Свойства линейного пространства.

1. Любое линейное пространство имеет только один нулевой элемент.

2. Каждый элемент линейного пространства имеет только один противоположный элемент.

3. Если элемент $(-x)$ противоположен элементу x, то элемент x является противоположным для $(-x)$.

4. Для любых двух элементов a и b уравнение $a + x = b$ относительно x имеет решение, и притом единственное.
   Разностью двух элементов $b - a$ называется такой элемент x, который является решением уравнения $a + x = b$;

5. Произведение произвольного элемента линейного пространства на число 0 равно нулевому элементу: $0 \cdot x = \theta$.

6. Элемент, противоположный данному элементу x, равен произведению x на число -1: $(-x) = (-1)x$.

7. Произведение нулевого элемента на любое число есть нулевой элемент: $\lambda\theta = \theta$.

1.2 Базис и размерность линейного пространства

<u>Линейно независимые и линейно зависимые системы элементов</u>.
Рассмотрим произвольное линейное пространство $\mathcal{L}$ с элементами $x, y, \ldots, z$.

Линейной комбинацией элементов $x, y, \ldots, z$ пространства $\mathcal{L}$ мы будем называть сумму произведений этих элементов на произвольные числа, т.е. выражения вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, в зависимости от того, вещественное или комплексное пространство $\mathcal{L}$.

Элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация элементов $x, y, \ldots, z$ с указанными числами является нулевым элементом пространства $\mathcal{L}$, т.е. имеет место равенство

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z = \theta. \tag{1}$$

Элементы $x, y, \ldots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются *линейно независимыми*, если равенство (1) выполняется только при условии $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.*

П р и м е р 3. *Выяснить, является ли линейно независимой каждая из следующих систем элементов*:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*вещественнозначных матриц* ;

2) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$ *в пространстве* $C_{(-\infty,+\infty)}$ *вещественнозначных функций, непрерывных на* $[a, b]$?

Решение.

1) *Составим линейнейную комбинацию данных матриц*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевой матрице $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *только в том случае, когда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *а это означает, что данная система матриц является линейно независимой.*

2) *Составим линейную комбинацию данных функций и приравняем ее к нулевому элементу (функции, тождественно равной нулю):*

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos 2x = \theta.$$

Это равенство справедливо, например, при $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = -1$, *следовательно, данная система элементов является линейно зависимой.*

Свойства систем элементов.

1. Если в системе элементов есть нулевой элемент, то эта система будет линейно зависимой.

2. Если подсистема элементов линейно зависимая, то вся система будет линейно зависимой.

3. Любая подсистема линейно независимой системы элементов линейно независимая.

4. Если система элементов $x, y, \ldots, z$ линейно независимая, а система элементов $x, y, \ldots, z, z'$ линейно зависимая, то z' представляется в виде линейной комбинации элементов $x, y, \ldots, z$.

Система линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ называется *базисом пространства* $\mathcal{L}$, если для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ найдутся числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \tag{2}$$

При этом равенство (2) называется *разложением элемента x по базису* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *координатами* элемента x (относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Любой элемент $x \in \mathcal{L}$ может быть разложен по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ единственным образом, т.е. координаты любого элемента x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяются однозначно.

Значение базиса заключается также и в том, что операции сложения элементов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами – координатами этих элементов.

Теорема 2. *При сложении любых двух элементов линейного пространства $\mathcal{L}$ (относительно любого базиса пространства $\mathcal{L}$) их координаты складываются, а при умножении произвольного элемента на любое число λ соответствующие координаты этого элемента умножаются на число λ.*

Примеры базисов различных пространств.

1. Для линейного пространства матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ базисом является, например, система элементов $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Для линейного пространства многочленов степени не выше двух базисом является, например, система элементов $1, x, x^2$. Координатами элемента $5 - x - x^2$ данного пространства в этом базисе будут $(x_1, x_2, x_3)^T = (5, -1, 1)^T$.

П р и м е р 4. *Определить, какая из следующих систем элементов является базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ векторов с вещественными коэффициентами:*

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Решение.

Системы элементов 2, 4 являются базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$, т.к. эти системы линено независимые и любой элемент этого пространства представляется в виде линейной комбинации элементов одной из этих систем.

Системы элементов 1, 3 не являются базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$*, т.к. система 3 является линейно зависимой, а через систему 1 нельзя представить в виде линейной комбинации любой элемент этого пространства.*

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *n-мерным*, если в нем существует линейно независимая система из n элементов, а любая система из $n+1$ элементов линейно зависимая. При этом число n называется *размерностью* пространства $\mathcal{L}$.

Обозначение: $\dim(\mathcal{L})$.

Линейное пространство L называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

Обозначение: $\dim(L) = \infty$.

Примеры размерностей линейных пространств.

1. $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.
2. $\dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$.
3. $\dim(P_n(x)) = n + 1$.

Теорема 3. *Если $\mathcal{L}$ – линейное пространство размерности n, то в нём любая линейно независимая система из n элементов образует базис.*

Теорема 4. *Если в пространстве $\mathcal{L}$ существует базис из n элементов, то это пространство размерности n.*

1.3 Подпространства линейных пространств

Подмножество $\mathcal{L}'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется *линейным подпространством*, если выполняются для этого подмножества следующие требования:

I. Если $x, y \in \mathcal{L}'$, то $x + y \in \mathcal{L}'$.

II. Если $x \in \mathcal{L}', \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\lambda x \in \mathcal{L}'$.

Теорема 5. *Линейное подпространство само является линейным пространством.*

Рассмотрим для линейного пространства $\mathcal{L}$ линейные подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство $\{\theta\}$. Эти два подпространства называются *несобственными*, а все остальные *собственными.*

Примеры линейных подпространств.

1. В линейном пространствеа V_3 свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют:

   а) все векторы, параллельные данной плоскости;

   б) все векторы, параллельные данной прямой.

2. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений от n переменных можно рассматривать как вектор в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Множествотаких векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

Понятие линейной оболочки.

Рассмотрим элементы $x, y, \ldots, z \in \mathcal{L}$. *Линейной оболочкой* элементов $x, y, \ldots, z$ будем называть совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество элементов вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Обозначение: $L(x, y, \ldots, z)$.

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой элементов своего базиса.

Например, линейное подпространство, заданное однородной системой уравнений, является линейной оболочкой фундаментальной системы решений (ФСР).

Линейная оболочка произвольных элементов $x, y, \ldots, z$ линейного пространства $\mathcal{L}$, очевидно, является подпространством основного линейного пространства $\mathcal{L}$.

П р и м е р 5. *Являются ли каждое подмножество линейного пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ линейным подпространством:*

а) множество симметричных матриц;

б) множество вырожденных матриц?

Решение.

а) сумма симметричных матриц есть симметричная матрица; при умножении симметричной матрицы на число получаем также симметричную матрицу, следовательно, множество симметричных матриц является линейным подпространством.

б) рассмотрим сумму вырожденных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

полученная матрица невырожденная ($\det \neq 0$)*. Следовательно, множество вырожденных матриц не является линейным подпространством.*

Теорема 6 (о монотонности размерности). *Размерность любого подпространства $\mathcal{L}'$ n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ не превосходит размерности n пространства $\mathcal{L}$. Если размерности линейного пространства и линейного подпространства совпадают, то подпространство совпадает с пространством.*

Теорема 7. *Если система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является базисом k-мерного подпространства $\mathcal{L}'$ n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$, то этот базис можно дополнить элементами $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ так, что система $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ будет являться базисом всего пространства $\mathcal{L}$.*

Теорема 8 (о размерности линейной оболочки). *Размерность линейной оболочки $\dim(L(x, y, \ldots, z))$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе $x, y, \ldots, z$. В частности, если система $x, y, \ldots, z$- линейно независимая, то размерность линейной оболочки системы $x, y, \ldots, z$ равна числу элементов в этой системе, а сами элементы $x, y, \ldots, z$ образуют базис линейной оболочки.*

Рангом системы элементов в линейном пространстве называют размерность линейной оболочки этой системы элементов.

Если в качестве системы элементов рассматривать строки (столбцы) матрицы, то получим следующее определение ранга матрицы: *ранг матрицы*-максимальное число линейно независимых строк(столбцов) матрицы.

Сумма и пересечение подпространств.

Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ – линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. *Суммой подпространств* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество всевозможных элементов x, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \tag{3}$$

где $x_i \in \mathcal{L}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$.

Обозначение: $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_k$.

Представление (3) элемента x называется *разложением элемента x по подпространствам $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$*.

Пересечением подпространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ называется множество

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in \mathcal{L} | x_i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Замечание. Пересечение подпространств не может быть пустым множеством, т.к. всегда содержит нулевой элемент θ пространства.

Примеры суммы и пересечения линейных подпространств.

Пусть V_3 – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости OXY.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости OXZ.

$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ – все пространство V_3, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ – множество векторов, параллельных оси OX.

Теорема 9. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства* $\mathcal{L}$ *являются линейными подпространствами пространства* $\mathcal{L}$.

Теорема 10. *Для любых линейных подпространств* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$ *справедливо равенство:*

$$\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2).$$

Прямая сумма подпространств.

Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение в ней по слагаемым подпространства единственно.

Обозначение: $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_k$.

Пример прямой суммы линейных подпространств.

Пусть V_3 – линейное пространство геометрических векторов трехмерного пространства.

$\mathcal{L}_1$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных оси OY.

$\mathcal{L}_2$ – линейное подпространство, состоящее из векторов, параллельных плоскости OXZ.

$L_1 \oplus L_2 = V_3$.

Теорема 11. *Для того чтобы n-мерное пространство* $\mathcal{L}$ *представляло собой прямую сумму подпространств* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *достаточно, чтобы пересечение* $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$ *и чтобы* $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(L_2)$.

1.4 Преобразование координат при преобразовании базиса

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $\dim \mathcal{L} = n$.

Выясним, как меняются координаты элемента при переходе от базиса e к e'. Так как элементы базиса e' являются элементами линейного пространства $\mathcal{L}$, то каждый из них можно разложить по базису e.

$$\begin{array}{c} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array} \tag{4}$$

Коэффициенты a_{ij} в равенстве (4) образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\,n\times n}$, которая называется *матрицей перехода* от базиса e к e'.

Обозначение: $P_{e\to e'}$.

Равенства (4) в матричном виде могут быть записаны : $e' = eP_{e\to e'}$.

Теорема 12. *Матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.*

Теорема 13. *Координаты элемента x в базисах e и e' связаны между собой следующим образом:*

$$x_e = P_{e\to e'}x_{e'}.$$

П р и м е р 6. *В линейном пространстве многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами заданы два базиса:*
$e : e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2;$
$e' : e'_1 = 1, \quad e'_2 = x - 1, \quad e'_3 = (x-1)^2$. *Найти* $P_{e\to e'}$.

Решение.
$1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$
$x - 1 = -1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3;$
$(x-1)^2 = 1\cdot e_1 - 2\cdot e_2 + 1\cdot e_3. \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

П р и м е р 7. *Найти координаты элемента x в базисе e', если* $x_e = 3e_1 - 2e_2; \quad e'_1 = 5e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = e_1 + e_2.$

Решение.
$x_{e'} = P^{-1}_{e\to e'}x_e; \quad P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \; P^{-1}_{e\to e'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$
$x_{e'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \end{pmatrix}.$

2. Евклидовы пространства

2.1 Понятие вещественного евклидова пространства

Вещественное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *вещественным евклидовым пространством*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства $\forall x, y \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом (x, y).

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{E}$ и $\forall \in \mathbb{R}$

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Пример вещественного евклидова пространства.

Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C_{[a,b]}$, где скалярное произведение задано:

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

П р и м е р 8. *Является ли вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ вещественным евклидовым пространством, если паре векторов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ поставлено в соответствие число:*
$(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2$.

<u>*Решение.*</u> *Проверяем выполнение четырех аксиом:*

1. $(x, y) = x_1 x_2 y_1 y_2 = y_1 y_2 x_1 x_2 = (y, x)$;

2. $(x + y, z) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) z_1 z_2 \neq (x, z) + (y, z)$.

вторая аксиома не выполняестся, следовательно, данное вещественное пространство не является вещественным евклидовым пространством.

Свойства скалярного произведения.

1) $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$;

2) $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$;

3) $(x, \theta) = 0$;

4) $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y),\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$;

5) если $x, y \in \mathcal{E}$ такие, что $\forall z \in \mathcal{E}$ выполняется равенство $(x,z) = (y,z)$, то $x = y$.

Теорема 14. (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливо неравенство*

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Основные метрические понятия.

Длиной элемента x евклидова пространства, будем называть арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого элемента.

Обозначение: $|x|$.

$$|x| = \sqrt{(x,x)}.$$

Из аксиом скалярного произведения вытекают следующие факты:

- Любой элемент $x \in \mathcal{E}$ имеет длину, при этом

  $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad$ и $\quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

- $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|\,, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

В новой терминологии неравенство Коши-Буняковского может быть записано следующим образом:

$$|(x,y)| \leq |x||y|.$$

Элемент, длина которого равна единице, называется *нормированным.*

Любой ненулевой элемент можно нормировать, поделив его на длину.

Теорема 15. В евклидовом пространстве $\forall x, y \in \mathcal{E}$ *справедливы следующие неравенства (неравенства треугольника)*

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

Углом в вещественном евклидовом пространстве будем называть угол $\varphi \in (0;\pi]$, который определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}} = \frac{(x,y)}{|x|\,|y|}. \tag{5}$$

Корректность определения следует из неравенства Коши-Буняковского.

П р и м е р 9. *Найти в евклидовом пространстве непрерывных на [0;1] вещественно-значных функций $C_{[0,1]}$:*

1) длину элемента $f(x) = x$;

2) скалярное произведение $f(x) = x$; $g(x) = e^x$;

3) угол между элементами $g(x) = x$ и $f(x) = 1$,

если скалярное произведение задано следующим образом: $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.

Решение.

1. $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}, \quad |f(x)| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

2. $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{cc} e^x dx = dv & v = e^x \\ u = x & du = dx \end{array} \right\} = xe^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = (xe^x - e^x)\big|_0^1 = e^x(x-1)\big|_0^1 = 1.$

3. *Воспользуемся формулой (5).*

   - $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2};$
   - $(g(x), g(x)) = \int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}; \quad \sqrt{(g(x), g(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}};$
   - $(f(x), f(x)) = \int\limits_0^1 dx = x\big|_0^1 = 1; \quad \sqrt{(f(x), f(x))} = 1;$

$$\cos\varphi = \frac{(f(x), g(x))}{\sqrt{(f(x), f(x))}\sqrt{(g(x), g(x))}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = 30°.$$

2.2 Ортогональные и ортонормированные базисы

Элементы $x, y \in \mathcal{E}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю $(x, y) = 0$.

Согласно свойству скалярного умножения нулевой элемент ортогонален любому элементу.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортогональной*, если выполняется $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Систему, состоящую из одного элемента, будем считать ортогональной.

Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = 0, \ i \neq j;$$
$$(e_i, e_j) = 1, \ i = j.$$

Теорема 16. *Ортогональная система ненулевых элементов является линейно независимой.*

Следствие. Ортонормированная система элементов является линейно независимой.

Так как евклидово пространство является линейным пространством, то правомерно говорить о размерности и базисах этого пространства. Евклидово пространство может быть конечномерным и бесконечномерным.

Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему элементов, то этот *базис* называют *ортогональным*.

Если в линейном пространстве все базисы равноправны, то в евклидовом пространстве наличие скалярного произведения позволяет выделить ортогональный и ортонормированный базисы, которые более удобны и играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли декартовой прямоугольной системы координат в аналитической геометрии.

Теорема 17. *Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $\mathcal{E}_n$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Рассматриваемое доказательство носит название *ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – произвольный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_n$.

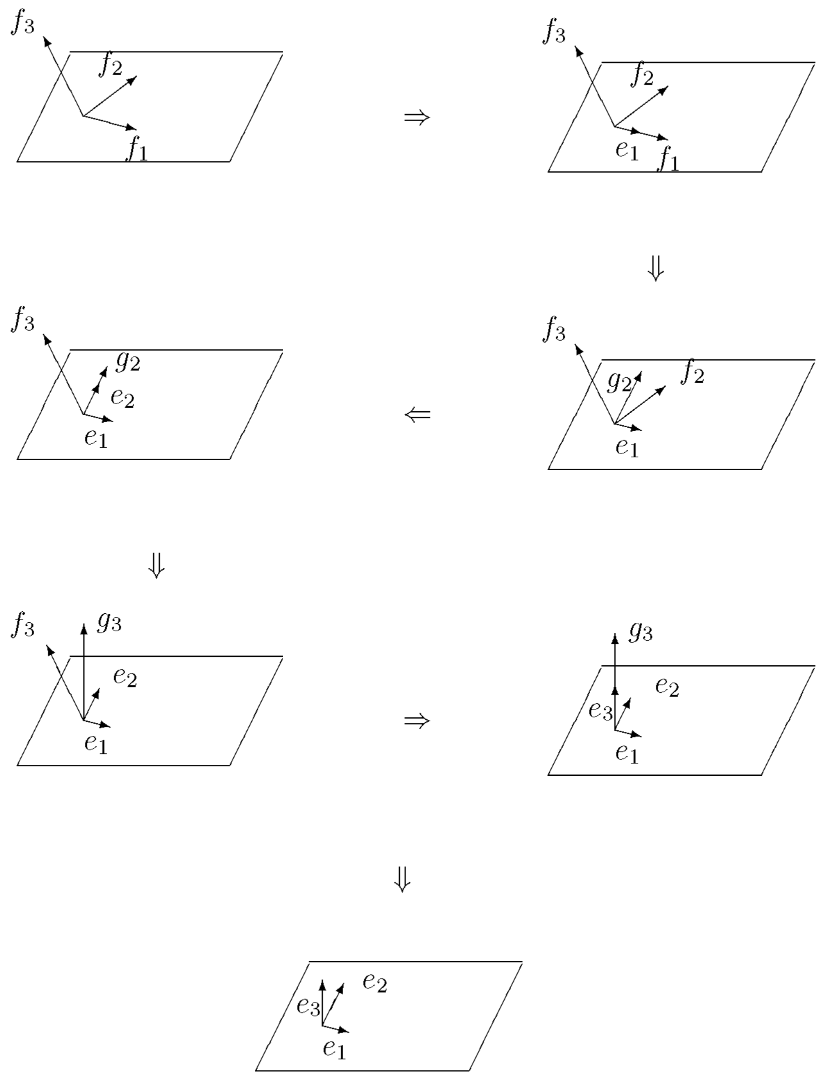
Модифицируя этот базис, мы будем строить новый $e_1, e_2, \ldots, e_n$, который будет ортонормированным.

Введем дополнительно систему элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1, \quad \ldots, \quad g_n = f_n - (f_n, e_1)e_1 - \ldots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}, \ldots, e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

Рассмотрим пример при $n = 3$.



Для обоснования алгоритма нужно показать, что ни один из последовательно вычисленных элементов g_i не является нулевым (иначе процесс оборвался бы преждевременно) и что все элементы g_i попарно отогональны.

Тогда и элементы e_i образуют ортогональную систему, но при этом длина каждого из них равна единице.

Ортогональная система из n ненулевых элементов согласно теореме 14 линейно независимая и поэтому в n-мерном евклидовом пространстве является базисом.

Докажем по методу математической индукции.

1. Докажем для $n = 1$.

   $g_1 \neq 0$, т.к. $g_1 = f_1$, то систему, состоящую из одного элемента, считают ортогональной.

2. Пусть выполняется при $n = k$.

3. Докажем для $n = k + 1$.

Вычислим новый элемент g_{k+1} по формуле

$$g_{k+1} = f_{k+1} - (f_{k+1}, e_1)e_1 - \ldots - (f_{k+1}, e_k)e_k. \qquad (*)$$

Предположив, что $g_{k+1} = \theta$, получим, что

$$f_{k+1} = (f_{k+1}, e_1)e_1 + \ldots + (f_{k+1}, e_k)e_k,$$

т.е. элемент f_{k+1} является линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, которые выражаются через $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Следовательно, f_{k+1} является линейной комбинацией $f_1, f_2, \ldots, f_k$, а следовательно, система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ линейно зависимая. Но это противоречит условию линейной независимости системы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Итак, предположение о том, что $g_{k+1} = \theta$, привело к противоречию.

Покажем, что элемент g_{k+1} ортогонален каждому из элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Умножим скалярно (*) на e_i, где $i \leq k$. Учитывая, что элементы $e_1, e_2 \ldots e_k$ образуют ортонормированную систему, получим:

$$(g_{k+1}, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i)(e_i, e_i) = (f_{k+1}, e_i) - (f_{k+1}, e_i) = 0,$$

Следовательно, элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_{k+1}$, где $e_{k+1} = \frac{g_{k+1}}{|g_{k+1}|}$, образуют ортонормированную систему. $\square$

В вычислениях удобны формулы, где сначала последовательно вычисляются элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$, а затем проводится их нормировка, приводящая к элементам $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$g_1 = f_1; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)g_1}{(g_1, g_1)}; \quad \ldots \quad ; g_n = f_n - \frac{(f_n, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} - \ldots - \frac{(f_n, g_{n-1})g_{n-1}}{(g_{n-1}, g_{n-1})};$$

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}; \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}; \quad \ldots \quad ; e_n = \frac{g_n}{|g_n|}.$$

П р и м е р 10. *В евклидовом пространстве дан базис:*

$$f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad f_2 = (1, 1, 1)^T; \quad f_3 = (0, 2, 3)^T.$$

По этому базису построить ортонормированный базис. Скалярное произведение задано стандартным образом

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

<u>*Решение.*</u>

$$g_1 = f_1 = (3, 1, 2)^T; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} = \frac{1}{7}(-2, 4, 1)^T;$$

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)g_1}{(g_1, g_1)} - \frac{(f_3, g_2)g_2}{(g_2, g_2)} = \frac{1}{3}(-2, -2, 4)^T;$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, 2)^T; \quad e_2 = \frac{7}{\sqrt{21}}(-2, 4, 1)^T; \quad e_3 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(-2, -2, 4)^T.$$

2.3 Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей

Пусть $x, y \in \mathcal{E}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис этого пространства, x, y в этом базисе представляются:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n,$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(e_i, e_j). \tag{6}$$

В матричном виде (6) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, \Gamma_e \, [y]_e \,, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \text{ – матрица Грама.}$$

Матрица Грама является симметричной: $\Gamma_e = \Gamma_e^T$.

Если базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный, то $\Gamma_e = E$, а (7) перепишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \, [y]_e$$

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ заданы два базиса: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $P_{e \to e'} = (a_{ij})$ – матрица перехода, $\Gamma_{e'} = (g'_{ij})$ – матрица Грама.

Согласно определению матрицы перехода:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k.$$

Тогда элемент матрицы *Грама* представим в виде:

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} (e_k, e_l).$$

В матричной записи это эквивалентно:

$$\Gamma_{e'} = P_{e \to e'}^{T} \Gamma_e P_{e \to e'}.$$

Теорема 18. *Система элементов* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{E}$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы* Грама *этой системы равен нулю:*

$$det \Gamma_a = 0.$$

Теорема 19. *Определитель матрицы* Грама *любого базиса положителен.*

П р и м е р 11. *Дано вещественное евклидово пространство, где скалярное произведение задано следующим образом:*

$$(x, y) = 4x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2.$$

Вычислить матрицу Грама Γ_e *стандартного базиса*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и матрицу Грама Γ_f, *базиса* f:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. *Вычислим матрицу Грама, воспользовавшись формулой:*

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем Γ_f двумя способами:

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = P_{e\to f}^T \Gamma_e P_{e\to f}$$

$P_{e\to f}$ – это координаты базиса f в базисе e выписанные по столбцам:

$$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

- *Воспользуемся формулой:*

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.4 Ортогональная матрица

Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если она удовлетворяет условию

$$Q^T Q = E.$$

Примеры ортогональных матриц.

1. Единичная матрица E.
2. Матрица Гивенса (вращения) $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Свойства ортогональной матрицы.

- $\det Q = \pm 1$.
- $Q^{-1} = Q^T$.
- Если Q – ортогональная, то Q^T – тоже ортогональная матрица.
- $QQ^T = E$.
- Пусть Q_1, Q_2 – ортогональные матрицы одного порядка, тогда $Q_1 Q_2$ – ортогональная матрица.
- Пусть Q – ортогональная, тогда Q^{-1} – тоже ортогональная матрица.

Если матрица ортогональная, то удобно находить к ней обратную, например

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2.5 Ортогональное дополнение

Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$. Элемент $x \in \mathcal{E}$ *ортогонален к линейному подпространству* $\mathcal{H}$, если x ортогонален любому элементу $y \in \mathcal{H}$.

Множество элементов из вещественного линейного евклидова пространства ортогональных линейному подпространству $\mathcal{H}$ называется *ортогональным дополнением* $\mathcal{H}^\perp$.

Теорема 20. *Ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ является линейным подпространством.*

Теорема 21. *Пусть $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, тогда*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = \mathcal{E}.$$

Следствие. Если $\mathcal{H}$ – линейное подпространство $\mathcal{E}$, то для любого $f \in \mathcal{E}$ существует и при том единственное разложение

$$f = g + h. \tag{8}$$

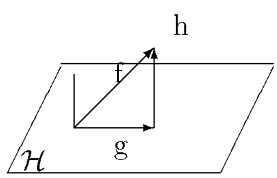
где $g \in \mathcal{H}, \quad h \in \mathcal{H}^\perp$.

В разложении (8)

g – ортогональная проекция элемента f на подпространство $\mathcal{H}$;

h – ортогональная составляющая элемента f.

Нахождение разложения (8) называется *задачей о перпендикуляре*. Этот термин заимствован из геометрии. Чтобы получить разложение геометрического вектора, достаточно опустить перпендикуляр из конца вектора f на плоскость.



Имея ввиду эту аналогию, называют

f – наклонной к подпространству $\mathcal{H}$;

h – перпендикуляром, опущенным на подпространство $\mathcal{H}$.

Аналогия с геометрическими векторами состоит не только в названии. Отметим несколько тех свойств g и h в разложении (8), которые имеют место и в геометрии т.к.

$$(f, f) = (g + h, g + h) = (g, g) + (h, h),$$

то

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2 \,. \tag{9}$$

$$|h| \leq |f|.$$

Последнее неравенство свидетельствует о том, что длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной. Равенство (9) называется *теоремой Пифагора в евклидовом пространстве*

П р и м е р 12. *В евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением построить* $L^{\perp}$ *для подпространства* $L(a_1, a_2)$, *где* $a_1 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $a_2 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T$.

Решение.

Пусть $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$ *– элемент ортогонального дополнения.*

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

определяет ортогональное дополнение.

Найдем ФСР данной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4; \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

$$X^* = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad L^{\perp}:\ L(e_1, e_2).$$

П р и м е р 13. *Найти ортогональную проекцию* $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ *на подпространство* $L(b_1, b_2)$, *где* $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$f = g + h; \quad g = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2;$$

$$f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + h.$$

Умножаем последнее равенство скалярно, сначала на b_1, *затем на* b_2. *Учитывая, что* $(b_1, h) = 0, \quad (b_2, h) = 0$ *, так как они ортогональны, получаем*

$$\begin{cases} (b_1, f) = \alpha_1(b_1, b_1) + \alpha_2(b_1, b_2), \\ (b_2, f) = \alpha_1(b_2, b_1) + \alpha_2(b_2, b_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2, \\ 9 = -3\alpha_1 + 6\alpha_2; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3.$$

$$g = 3b_1 + 3b_2; \quad g = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.6 Понятие унитарного пространства

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным*, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого двум элементам $x, y \in \mathcal{U}$ ставится в соответствие комплексное число называемое скалярным произведением и обозначаемое символом (x, y).

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:
$\forall x, y, z \in \mathcal{U}, \quad \forall \lambda \in$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Примеры комплексных евклидовых пространств.

1. Множество комплексно-значных функций $C^*_{[a,b]} : z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t),\ \ y(t)$ – вещественно-значные функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$.

   Операции сложения этих функций и умножения их на комплексные числа заимствуем из анализа. Скалярное произведение двух любых таких функций определим соотношением
$$(z_1(t), z_2(t)) = \int_a^b z_1(t)\overline{z_2(t)}dt.$$

2. Множество вектор-столбцов с комплексными координатами
$$x, y \in \mathbb{C}^n,\ \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

   Скалярное произведение введено следующим образом
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

П р и м е р 14. *Можно ли в унитарном пространстве квадратных матриц 2-ого порядка ввести скалярное произведение по формуле* $(A, B) = a_1\overline{a_2} - b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} - d_1\overline{d_2}$, *где* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$?

Решение. *Проверим четвертую аксиому.* $(A, A) = a_1\overline{a_1} - b_1\overline{b_1} + c_1\overline{c_1} - d_1\overline{d_1}$. *Неравенство* $(A, A) \geq 0$ *выполняется только тогда, когда* $|a_1|^2 + |c_1|^2 \geq |b_1|^2 + |d_1|^2$. *Следовательно, ввести скалярное произведение по данной формуле нельзя.*

Свойства скалярного произведения.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
2. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.
3. $(x, \theta) = 0$.
4. $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i, y),\ \ \alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n.$
5. Если $x, y \in \mathcal{U} : \forall z \in \mathcal{U}$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

Теорема 22 (Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве). *Для* $\forall x, y \in \mathcal{U}$*справедливо следующее неравенство*
$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Длина в унитарном пространстве вводится таким же образом как в вещественном евклидовом пространстве: $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Понятие угла в унитарном пространстве вводить не имеет смысла, т.к. $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Понятие ортогонального и ортонормированного базиса, процесс ортогонализации системы элементов, понятие ортогонального дополнения, ортогональной проекции элемента на подпространство без изменения определений и общих схем рассуждений переносится на унитарное пространство.

2.7 Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей в унитарном пространстве

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ задан некоторый базис $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Рассмотрим $x, y \in \mathcal{U}$, $\quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (e_i, e_j). \tag{10}$$

Формула (10) в матричном виде запишется следующим образом:

$$(x, y) = [x]_e^T \Gamma_e [\bar{y}]_e,$$

где Γ_e – матрица Грама

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_e = E$ и

$$(x, y) = [x]_e^T [\bar{y}]_e.$$

Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ даны два базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, тогда справедлива формула:

$$\Gamma_{e'} = P^T_{e \to e'} \Gamma_e \bar{P}_{e \to e'}.$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma_{e'} = P^T_{e \to e'} \bar{P}_{e \to e'}$.

П р и м е р 15. *Векторы $x, y \in \mathcal{U}$, унитарного пространства заданы в базисе e_1, e_2 координатными столбцами $[x]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$, $[y]_e = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}^T$, соответственно, и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $f_1 = e_1 + ie_2$, $\quad f_2 = -3ie_1 + 4e_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса e_1, e_2 и скалярное произведение (x, y).*

<u>*Решение.*</u>

$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & 4 \end{pmatrix}$; $P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$;

$\Gamma_e = P_{f\to e}^T \Gamma_f \bar{P}_{f\to e}$;

$\Gamma_e = \begin{pmatrix} 4 & -i \\ 3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$(x, y) = [x]_e^T \Gamma_e [\bar{y}]_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 3i.$

2.8 Унитарная матрица

Матрица R называется *унитарной*, если выполняется равенство

$$\bar{R}^T R = E.$$

Свойства унитарной матрицы:

1. $\det R = \pm 1$.

2. $\bar{R}^T = R^{-1}$.

3. Если R – унитарная матрица, то $\bar{R}^T$ – тоже унитарная матрица.

4. $R\bar{R}^T = E$.

5. Если R_1 и R_2 – унитарные матрицы, то $R_1 R_2$ – унитарная матрица.

6. Если R – унитарная матрица, то R^{-1} – тоже унитарная матрица.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество $\mathbb{C}^{2\times 2}$ всех комплексных матриц второго порядка.

2. Образуют ли базис в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матвиц второго порядка элементы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и если образуют, то найти в указанном базисе координаты элемента

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \mathrm{tr}XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису $\mathbf{e_1} = (1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{e_2} = (0,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{e_3} = (2,\ -1,\ 0)$ построить ортонормированный базис.

6. Найти длину вектора $\mathbf{x} = (1,\ i)$ с заданным скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (1,\ -i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (1,\ -1)$.

Вариант 2

1. Является ли множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов $1+3x+5x^2,\ 2x+6x^2,\ 1+x+x^2$, и если образует, то найти в указанном базисе координаты элемента $1+x+3x^2$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1 x_2 y_1 y_2$;

б) $3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2$?

5. Является ли ортогональным базисом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

а) $(0,\ 1,\ 0),\ (-6,\ 0,\ 4)$;

б) $(2,\ 1, 4),\ (3,\ 0,\ 5)$;

в) $(-1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 5,\ 0),\ (0,\ 0,\ 9)$;

г) $(1,\ 1,\ 3),\ (-1,\ -2,\ 1),\ (7,\ -4,\ -1)$.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама Γ этого базиса: $(1,\ i),\ (2i,\ 1),\ \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ i)$.

Вариант 3

1. Является ли множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3) | a_i \in \mathbb{R})\}$ данная система векторов:

а) $(1,\ 2, 7),\ (0,\ 3,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)$;

б) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0)$;

в) $(3,\ 0,\ 5),\ (1,\ 2, 1)$;

г) $(1,\ 2, 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (-1,\ 7,\ 2),\ (3,\ 4,\ 6)$.

3. В пространстве V_3 найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к базису:

а) $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ -\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{j},\ \mathbf{i},\ \mathbf{k}$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x = \alpha_1 + \beta_1 i;\ y = \alpha_2 + \beta_2 i$ поставлено в соответствие число $\beta_1 \cdot \beta_2$?

5. Установить, образуют ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(-1,\ 3),\ (6,\ 2),\ n = 2;$

б) $(5,\ 1),\ (3,\ -1),\ n = 2;$

в) $(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 7,\ 0),\ (0,\ 0,\ 2),\ n = 3;$

г) $(0,\ 0,\ 0,\ 5),\ (0,\ 0{,}1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 0),\ n = 4;$

д) $(-2,\ 3,\ 0,\ 0),\ (3,\ 2,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 2{,}5,\ 0),\ n = 4.$

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама Γ этого базиса: $(1+i,\ i),\ (1,\ 1-i),\ \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$

7. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(1,\ 3,\ -1,\ 1)$.

Вариант 4

1. Является ли множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij})(a_{ij} \in \mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ к базису $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4$.

4. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbb{C}$, если каждой паре элементов $x = \alpha_1 + \beta_1 i;\ y = \alpha_2 + \beta_2 i$ поставлено в соответствие число $(\alpha_1 + \beta_1 i)(\overline{\alpha_2 + \beta_2 i}) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 0)$, $\mathbf{g}_2 = (-1,\ 1,\ 1,\ 3)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама Γ этого базиса: $(1+i,\ 3),\ (1+2i,\ 6+2i),\ \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}.$

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Является ли множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij}), (a_{ij} \in \mathbb{R})$ второго порядка данная система элементов:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$

3. В пространстве $P_2(x)$ найти матрицу перехода от базиса $x^2,\ x,\ 1,$ к базису $(x+1)^2,\ (x+1),\ 1.$

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{g}_2 = (1,\ 1,\ -1,\ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Найти скалярное произведение и длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства по их координатам в базисе и матрице Грама Γ этого базиса: $(i,\ 2),\ (1+i,\ 3),\ \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (2+i,\ 0,\ 2-i)$ на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} = (-1,\ i,\ 1+i)$.

Вариант 6

1. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

а) множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$;

б) множество функций, неотрицательных на $[a, b]$.

2. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система элементов:

а) $1,\ x,\ x^2$; б) $3,\ x-2,\ x+1$; в) $1,\ (x-2),\ (x-2)^2$;
г) $3x+3,\ x^2-1,\ x^2+3x+2$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ к базису $\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ поставлено в соответствие число:

а) $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$; б) $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$?

5. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-1, 1]$ (операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$:
а) $1,\ x^2$; б) $x^2,\ x^3$; в) $1,\ \sin \pi x,\ \cos \pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x, \dots,\ \sin n\pi x,\ \cos n\pi x$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки вектора $(i,\ 1,\ 1+i)$.

Вариант 7

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами:

а) степени не выше n; б) степени n; в) степени выше n?

2. Выяснить, является ли базисом система элементов в линейном пространстве $P_n(x)$ многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше n:

а) $2x+3,\ x-1,\ n=1$; б) $x^3-2x^2+2,\ x^2+5,\ 5,\ n=3$?

3. Дана матрица
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора:
а) $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; б) $\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

4. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где $k \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, если каждой паре функций $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$ поставлено в соответствие число
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(a_m \cos mx + b_m \sin mx)dx?$$

5. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n = 5$;

б) $(1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $n = 5$.

6. В комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-1,\ 1+i)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ i,\ 1)$, $(i,\ 1,\ 0)$.

Вариант 8

1. Является ли множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц размеров $m \times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (1\ \ -1)^T$, $\mathbf{b} = (1\ \ -1)^T$, $\mathbf{c} = (1\ \ -1)^T$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Пусть $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – базис n-мерного линейного комплексного пространства. Является ли данное пространство унитарным, если каждой паре векторов $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n$ этого пространства поставлено в соответствие число $\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3)$; $\mathbf{g_2} = (0,\ 3,\ -2)$; $\mathbf{g_3} = (0,\ 1,\ -1)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти:

а) длину вектора $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$;

б) скалярное произведение векторов $(i,\ i,\ i, \ldots,\ i)$ и $(i,\ 2i,\ 3i, \ldots,\ ni)$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормиро-

ванном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 \qquad\quad & = & 0, \\ x_1 - 3x_2 - \qquad\quad 8x_4 & = & 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Вариант 9

1. Пусть $\mathbb{R}^{1\times 2}$- множество всех вещественных матриц вида $(a_1\ a_2)$. Является ли это множество вещественным линейным пространством, если операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством: $\alpha(a_1\ , a_2) = (a_1\ \alpha a_2)$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов $(1-t)^3,\ t^3,\ 1,\ t+t^2$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_2,\ \mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2$;

б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;

б) $9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g_1} = (1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{g_2} = (0,\ 2,\ 0),\ \mathbf{g_3} = (0,\ 0,\ 3)$.

6. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением выяснить, являются ли ортогональными векторы:

а) $(i,\ 2,\ i),\ (i,\ -1,\ i)$;

б) $(1-i,\ 2,\ i),\ (3,\ 2-i,\ i)$;

в) $(3+i,\ 2,\ i),\ (-3+5i,\ 18,\ 11)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = (2+i,\ i,\ 2-i)$ на линейную оболочку векторов $\mathbf{a}_1 = (1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (i,\ 0,\ -i)$.

Вариант 10

1. Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество положительных чисел, в котором операция сложения определена равенством $x + y = xy$, а операция умножения на число $\alpha \in \mathbb{R}$ – равенством $\alpha x = x^\alpha$. Является ли множество $\mathbb{R}^+$ с указанными операциями вещественным линейным пространством?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ -1)^T,\ \mathbf{b} = (-1\ 1)^T,\ \mathbf{c} = (2\ -2)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\ \mathbf{x} = \mathbf{e}'_1 - 3\mathbf{e}'_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $2x_1y_1 + 3x_2y_2$, а)$n = 2$, б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 0,\ 0),\ \ \mathbf{g}_2 = (0,\ 1,\ -1),\ \ \mathbf{g}_3 = (1,\ 1,\ 1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\ |\mathbf{a}|,\ |\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = i\mathbf{e}_1 + (i-1)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (3+i)\mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора
$\mathbf{x} = (1+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов
$\mathbf{a}_1 = (-1,\ i,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (1+i,\ 1-i,\ 0)$.

Вариант 11

1. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

а) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

б) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой.

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:
$\mathbf{a} = (-3\ \ 2\ \ 0)^T,\ \mathbf{b} = (-3\ \ 6\ \ -15)^T,\ \mathbf{c} = (0\ \ -4\ \ 15)^T$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_2,\ \ \mathbf{x} = 2\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i),\ (1,\ 1)$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f,g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти:

а) длину элемента $\cos x + \sin x$;

б) скалярное произведение элементов $\sin 2x,\ \sin 3x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора
$\mathbf{x} = (-2+i,\ 1+i,\ 1)$ на линейную оболочку векторов
$\mathbf{a}_1 = (1,\ -2,\ i),\ \mathbf{a}_2 = (1,\ 0,\ 3i)$.

Вариант 12

1. Является ли вещественным линейным пространством множество:

а) геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}| > a$, где a – фиксированное число;

б) векторов трехмерного пространства,перпендикулярных данной прямой?

2. Выяснить, является ли базисом данная система векторов в пространстве V_3:

а) $\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{k}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$.

4. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$;

б) $2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1, 1, 0, 0), \ \mathbf{g}_2 = (0, 0, 1, 1), \ \mathbf{g}_3 = (1, 0, 1, 1), \ \mathbf{g}_4 = (0, 1, 0, -1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \ |\mathbf{a}|, \ |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4 + i)\mathbf{e}_2, \ \mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3 - i)\mathbf{e}_2, \ |\mathbf{e}_1| = 2, \ |\mathbf{e}_2| = 3$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений: $x_1 + ix_2 = 0$.

Вариант 13

1. Является ли вещественным линейным пространством множество решений системы линейных однородных уравнений?

2. Доказать, что многочлены $2t + t^5, \ t^3 - t^5, \ t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше пятой, и найти координатный столбец многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ по данному базису построить ортонормированный:
$\mathbf{g}_1 = (1, 0, 1, 2), \ \mathbf{g}_2 = (-1, 0, -1, 0), \ \mathbf{g}_3 = (0, 0, 2, 1), \ \mathbf{g}_4 = (0, 1, 1, 1)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = (1+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2}$, $|\mathbf{e}_2| = 1$.

7. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - \phantom{2x_2 -{}} x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 & = & 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Вариант 14

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$;

б) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$?

2. Найти координаты каждого из указанных элементов пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в базисе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:
а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:
а) $x_1\bar{y}_2$;
б) $(3+i)x_1\bar{y}_2 + (3-i)x_2\bar{y}_1$?

5. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$ $\left((f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\right)$, по данному базису $g_1 = 1$, $g_2 = x$ построить ортонормированный.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 - (3+4i)\mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = 3i\mathbf{e}_1 + (i-2)\mathbf{e}_2$.

7. Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:
$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на L и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно L вектора $\mathbf{x} = (1,\ -2,\ 3,\ -4)$.

Вариант 15

1. Является ли комплексным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами:

а) степени не выше n; б) степени n; в) степени выше n?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ 2\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (1\ 0\ 1\ 3)^T.$

3. Даны два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если: $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^n$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$, а)$n = 2$, б)$n \geq 3$?

5. В евклидовом пространстве V_3 даны два ортогональных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ такой, при котором векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют ортогональный базис, если: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

6. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, (операция скалярного произведения введена следующим образом: $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$) найти угол между элементами $\sin x$ и $\cos x$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ -ix_1 + (2+i)x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных функций, непрерывных во всех точках [a,b] числовой оси, кроме $x_0 \in [a, b]$?

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов: $\mathbf{a} = (1\ 1\ 1\ 1)^T,\ \mathbf{b} = (1\ 1\ 1\ 3)^T,\ \mathbf{c} = (3\ -5\ 7\ 2)^T,\ \mathbf{d} = (1\ -7\ 5\ -2)^T.$

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным расположениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = 7\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$;

б) $x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметическо-

го пространства со стандартным скалярным произведением: $(2-i,\ i)$, $(4-i,\ 2-3i)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1| = 3$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 4$.

7. Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на L и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно L вектора $\mathbf{x} = (8,\ -2,\ 8,\ 3)$.

Вариант 17

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

$$\text{а)}\ L = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{array} \right) \middle| \, d_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n};$$

$$\text{б)}\ L = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{array} \right) \middle| \, d_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}?$$

2. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис, найти координаты вектора $\mathbf{c} = \mathbf{2e_1} - \mathbf{4e_2}$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$;

б) $5x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением: $(1,\ i,\ 1)$, $(2-i,\ i-1,\ 2)$.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $|\mathbf{e}_3| = 3$.

7. Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на L и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно L вектора $\mathbf{x} = (2,\ 3,\ -1,\ -2)$.

Вариант 18

1. Является ли вещественным линейным пространством множество

а) всех сходящихся последовательностей;

б) всех расходящихся последовательностей?

2. Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $b = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{d} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4. Является ли унитарным пространство $\mathbb{C}^2$, если паре векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$;

б) $x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$?

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ 2,\ 0)$, $\mathbf{g}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), |\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + (4+i)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + (3-i)\mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$.

7. Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на L и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$, относительно L вектора $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ -2,\ 3)$.

Вариант 19

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 1$; б) $2f(0) - 3f(1) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства вещественных матриц $\mathbb{R}^{3\times 2}$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$
$\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}_3 = 4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $(1,\ i,\ 1,\ i)$, $(1,\ i,\ 1,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Даны векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, если:
$\mathbf{a} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b} = (2+i)\mathbf{e}_1 + (2+i)\mathbf{e}_2,\ |\mathbf{e}_1| = 1/\sqrt{2},\ |\mathbf{e}_2| = 1.$

7. Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (10 \quad -20 \quad 10)^T$. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(0\ 1\ 0)^T$.

Вариант 20

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: а) $f(0) = 0$; б)$f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = 0$?

2. Выяснить размерность пространства многочленов степени не выше четвертой $P_4(x)$ и указать один из базисов этого пространства.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ к базису
$(x-1)^2,\ x-1,\ 1$ в пространстве многочленов $P_2(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \det XY$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а

в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. В унитарном пространстве $\mathbb{C}^3$ по данному базису построить ортонормированный: $\mathbf{g}_1 = (1,\ 1,\ i),\ \mathbf{g}_2 = (i,\ 1,\ 1),\ \mathbf{g}_3 = (1,\ i,\ 1)$.

6. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $F(x, y) = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + a_{21}x_2\bar{y}_1 + a_{22}x_2\bar{y}_2$ задавала унитарное скалярное произведение.

7. Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой вектора, заданного в некотором ортонормированном базисе пространства координатным столбцом $\mathbf{a} = (4\ 3\ 2\ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)^T$.

Вариант 21

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством: $L = \{f(x) \mid\ |f(x)| \leq 3\} \subset F_{[a,b]}$,
где $F_{[a,b]}$ – множество всех вещественных функций, область определения которых – отрезок $[a, b]$.

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 1)$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ 2x - 3$ к базису $x + 1,\ x$ в пространстве многочленов $P_1(x)$.

4. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T D Y$ (D – диагональная матрица порядка n с положительными элементами на главной диагонали). Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1 + i,\ 2 + i,\ 1 - i),\ (-2,\ 4 + i,\ 1 - i),\ (1,\ 2 + i,\ 2 - i)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ 0),\ \mathbf{f}_2 = (1,\ -1)$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпростран-

ства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 & = 0, \\ (1+i)x_1 + \quad 3x_2 + ix_3 & = 0, \\ -ix_2 + \ x_3 & = 0. \end{cases}$$

Вариант 22

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{\alpha + \ln(x^2+1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$;

б) $L = \{\ln(x^2+1)^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_{(-\infty,+\infty)}$?

2. Систему многочленов $t^5+t^4,\ t^5-3t^3,\ t^5+2t^2,\ t^5-t$ дополнить до базиса пространства $P_5(t)$.

3. Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Найти координаты $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и координаты $\mathbf{e}_1$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X,Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
$(1,\ i,\ 1),\ (i,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1)$.

6. В арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компонент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов $\mathbf{f}_1 = (1/2,\ 1/2),\ \mathbf{f}_2 = (-1/2,\ 1/2)$.

7. Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 0)^T,\ \mathbf{a}_2 = (2\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(1\ \ 0\ \ 2\ \ -2)^T$.

Вариант 23

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ |a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. Проверить, образуют ли элементы $\mathbf{e}_1 = (2, 2, -1), \mathbf{e}_2 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, 2)$ базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, и если образуют, найти координаты элемента $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n $(n \geq 2)$ задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X\bar{Y}^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/\sqrt{3}\,(1,\ -1,\ 0,\ 1),\ 1/\sqrt{3}\,(1,\ 1,\ -1,\ 0)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T,\ \mathbf{y}_e = (0\ 1)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 + \quad (1-i)x_3 & = & 0, \\ -ix_1 + \ 2x_2 + (-1-i)x_3 & = & 0, \\ 3x_1 + 6ix_2 + \ (3-3i)x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Вариант 24

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_i > 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

б) $L = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ a_1 + a_2 + a_3 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 2, 1)$.

3. Какая из данных матриц может быть матрицей перехода от одного базиса к другому и объяснить почему: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

4. В линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n ($n \geq 2$) задана функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} \bar{X} Y^T$. Определить, может ли заданная функция служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

5. Систему векторов $1/2\,(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $1/2\,(1,\ -1,\ 1,\ -1)$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ 1)^T$, $\mathbf{y}_e = (1\ 3)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

7. В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,\ -i,\ 3)$, $(2i,\ 2,\ 6i)$, $(1-i,\ -1-i,\ 3-3i)$.

Вариант 25

1. Является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

а) $L = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

б) $L = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$;

в) $L = \{a \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$?

2. Определить является ли система элементов $1,\ t + 1,\ t^2 + 1,\ t^3 + 1,\ t^4 + 1,\ t^5 + 1$ базисом в пространстве $P_5(t)$, и если является, то найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в этом базисе.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:
$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 = -4\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

4. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе вещественного линейного двумерного пространства. Найти условия на вещественные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для

того, чтобы функция $F(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$ задавала евклидово скалярное произведение.

5. Ортогональную систему векторов $(1,\ 1,\ i,\ i)$, $(1,\ -1,\ i,\ -i)$ комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортогонального базиса.

6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ унитарного пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами $\mathbf{x}_e = (1\ \ i)^T$, $\mathbf{y}_e = (1 + i\ \ 2)^T$ соответственно и известна матрица Грама $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$ базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = -3i\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$.

7. Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1\ 4\ \ -1\ 0)^T$. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора $\mathbf{x}$, заданного в том же базисе координатным столбцом $(2\ 1\ 1\ 0)^T$.

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.-320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*М.: Высшая школа, 1998.- 320.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 496 с.

5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* Мн.: Выш. школа, 1980.-192 с.

Учебное издание

Линейные пространства

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.