МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)"

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Электронные методические указания

САМАРА 2011

УДК 512.8

Составители:Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Рецензент Дегтярев А.А., к.т.н., доцент кафедры ТК

Алгебра и геометрия. Системы линейных уравнений
[Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост.: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. - Электрон. текстовые и граф. дан. (274 кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Методические указания содержат теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Системы линеных уравнений"курса "Алгебра и геометрия", а также рекомендуются в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов 6 факультета для бакалавров направлений: 010400.62 "Прикладная математика и информатика", 010900.62 "Прикладные математика и физика", изучающих дисциплину "Алгебра и геометрия"в 1 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Содержание

1. Условие совместности линейной системы

Системой m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = & b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены, x_j – неизвестные величины, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Система (1) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется *неоднородной*.

Решением системы (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система уравнений вида (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система вида (1)называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Совместная система вида (1)называется *неопределенной*, если у нее существуют по крайней мере два различных решения.

В матричной форме система (1) может быть записана в виде

$$Ax = b \qquad (2),$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

<u>Исследовать и решить систему – это значит:</u>

- установить, совместна она или несовместна;
- если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:
  - в случае определенной системы найти единственное ее решение;
  - в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Рассмотрим однородную СЛАУ

$$Ax = 0 \tag{3}$$

Однородная СЛАУ (3) всегда совместна, ибо она всегда обладает *тривиальным* (*нулевым*) решением $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема. *Однородная система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $rgA < n$.

Составим расширенную матрицу B системы (2), приписав к основной матрице A системы (1) столбец свободных членов: $B = [A|b]$. Матрица B называется *расширенной матрицей* системы (2).

Теорема (Кронекера – Капелли). *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

2. Нахождение решений систем линейных уравнений с квадратной матрицей

2.1. Теоретические сведения

Прежде чем рассматривать системы общего вида, исследуем простейший класс систем (2),когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и $|A| \neq 0$.

Теорема. *СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу невырожденности матрицы A для нее существует обратная матрица A^{-1}. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \tag{4}$$

является решением системы (2). Это решение единственно, так как если y - другое решение системы (2), то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части этого тождества слева на A^{-1}, получим, что $x = y$. $\square$

Правило Крамера. Решение (4) может быть записано покомпонентно, если воспользоваться явным выражением для обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$.

Действительно, $x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b$ или, в соответствии с тем, что

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

компоненты вектора x находятся как

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти соотношения при рассмотрении свойств определителя означают, что

$$x_i = |A_i|/|A|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4$'$}$$

где A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца стол бцом свободных членов.

Формулы (4’) называются *правилом Крамера.*

Замечание. Правило Крамера дает решение системы в явном виде и в некотором смысле носит алгоритмический характер. Однако правило Крамера полезно лишь в теоретических исследованиях и противопоказано для практического использования в приложениях. В самом деле, для решения систем n-го порядка по правилу Крамера требуется вычислить $(n+1)$ определителей n-го порядка, тогда как большинство современных методов решения систем по объему вычислений равносильны вычислению одного определителя.

П р и м е р 1. *Решить матричным способом (с помощью обратной матрицы)СЛАУ*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> *Запишем систему в матричной форме* $Ax = b$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A| = -3 \neq 0$, *то для матрицы* A *существует обратная матрица*

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

и решение матричным способом находится по формуле (3). Итак

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2. *Решить методом Крамера СЛАУ*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> *Так как определитель матрицы системы*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

то можно применить формулы Крамера. Тогда

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 14;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 21.$$

По формулам (4') находим решение СЛАУ:

$$x_1 = |A_1|/|A| = -1; \quad x_2 = |A_2|/|A| = 2; \quad x_3 = |A_3|/|A| = 3.$$

2.2. Задание

Найти решение данной системы уравнений для двух различных столбцов свободных членов

а) матричным способом;

б) по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ -x_1+2x_2+4x_3 &= b_2, \\ 5x_1+3x_2 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=1,\ b_2=-1,\ b_3=0,$ б) $b_1=2,\ b_2=-1,\ b_3=3.$

2. $\begin{cases} -x_1-2x_2+3x_3 &= b_1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3 &= b_2, \\ x_1+4x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=2,\ b_2=-2,\ b_3=1,$ б) $b_1=3,\ b_2=1,\ b_3=5.$

3. $\begin{cases} 4x_1-2x_2 &= b_1, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3 &= b_2, \\ 3x_1-2x_2+x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=3,$ б) $b_1=2,\ b_2=-1,\ b_3=-2.$

4. $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+3x_3 &= b_1, \\ x_1-2x_2 &= b_2, \\ 4x_1-3x_2+5x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=-3,\ b_2=-2,\ b_3=4,$ б) $b_1=-3,\ b_2=5,\ b_3=0.$

5. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ 4x_1-\ \ x_2 &= b_2, \\ x_1+\ \ x_2-2x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=-3,\ b_2=2,\ b_3=1,$ б) $b_1=7,\ b_2=3,\ b_3=0.$

6. $\begin{cases} 5x_1+\ \ x_2+2x_3 &= b_1, \\ -x_1+2x_2 &= b_2, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=-6,\ b_2=-5,\ b_3=1,$ б) $b_1=-11,\ b_2=-2,\ b_3=11.$

7. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+\ \ x_3 &= b_1, \\ 3x_1-2x_2+\ \ x_3 &= b_2, \\ -x_2+2x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=7,\ b_2=-6,\ b_3=5,$ б) $b_1=2,\ b_2=3,\ b_3=-13.$

8. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3 &= b_1, \\ 2x_1+\ \ x_2-2x_3 &= b_2, \\ x_2-\ \ x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=8,\ b_2=-8,\ b_3=4,$ б) $b_1=-2,\ b_2=3,\ b_3=-3.$

9. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3 &= b_1, \\ 4x_1+2x_2 &= b_2, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3 &= b_3, \end{cases}$ а) $b_1=9,\ b_2=-4,\ b_3=2,$ б) $b_1=4,\ b_2=5,\ b_3=1.$

10. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ -2x_1 + 4x_3 = b_2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 11,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,$ б) $b_1 = -3,\ b_2 = 2,\ b_3 = -2.$

11. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = b_1, \\ 2x_2 - x_3 = b_2, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 10,\ b_2 = -9,\ b_3 = -8,$ б) $b_1 = -4,\ b_2 = 17,\ b_3 = 1.$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = b_1, \\ 3x_1 + x_2 = b_2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 7,\ b_2 = 5,\ b_3 = -2,$ б) $b_1 = -11,\ b_2 = -36,\ b_3 = 1.$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = b_1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b_2, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 9,\ b_2 = -7,\ b_3 = 12,$ б) $b_1 = -11,\ b_2 = 36,\ b_3 = 1.$

14. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ 2x_1 + 4x_2 = b_2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 23,\ b_2 = -5,\ b_3 = 21,$ б) $b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = 31.$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = b_2, \\ -x_1 + 7x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 17,\ b_2 = -11,\ b_3 = 13,$ б) $b_1 = 9,\ b_2 = 16,\ b_3 = -21.$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b_1, \\ 9x_1 - 3x_2 = b_2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 14,\ b_2 = 14,\ b_3 = 14,$ б) $b_1 = -6,\ b_2 = 13,\ b_3 = 1.$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_1, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = b_2, \\ -x_1 - 2x_2 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 23,\ b_2 = -3,\ b_3 = -2,$ б) $b_1 = 2,\ b_2 = -5,\ b_3 = 8.$

18. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = b_1, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 = b_2, \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -2,\ b_2 = 0,\ b_3 = -3,$ б) $b_1 = -8,\ b_2 = 1,\ b_3 = 26.$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1, \\ 2x_2 - 3x_3 = b_2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -4,\ b_2 = 1,\ b_3 = 15,$ б) $b_1 = 0,\ b_2 = 7,\ b_3 = -10.$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = b_2, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 30,\ b_2 = -9,\ b_3 = 1,$ б) $b_1 = -12,\ b_2 = -7,\ b_3 = 0.$

21. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = b_1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 100,\ b_2 = -20,\ b_3 = 5,$ б) $b_1 = -1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 41.$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = b_1, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = b_2, \\ 2x_2 + x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 3,\ b_2 = -40,\ b_3 = 5,$ б) $b_1 = -70,\ b_2 = 11,\ b_3 = 1.$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1, \\ x_1 + x_3 = b_2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 27,\ b_2 = 1,\ b_3 = -1,$ б) $b_1 = -1,\ b_2 = 19,\ b_3 = 0.$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1, \\ 3x_1 - x_2 = b_2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 37,\ b_2 = 0,\ b_3 = 2,$ б) $b_1 = 3,\ b_2 = -5,\ b_3 = 5.$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1, \\ 3x_1 - x_2 = b_2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 37,\ b_2 = 0,\ b_3 = 2,$ б) $b_1 = 3,\ b_2 = -5,\ b_3 = 5.$

26. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = b_1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = b_2, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = -3,\ b_2 = -5,\ b_3 = 2,$ б) $b_1 = -10,\ b_2 = 15,\ b_3 = 10.$

27. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = b_1, \\ 2x_1 + x_3 = b_2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 4,\ b_2 = -12,\ b_3 = -4,$ б) $b_1 = 1,\ b_2 = 6,\ b_3 = 5.$

28. $\begin{cases} -x_1 - 5x_3 = b_1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b_2, \\ 4x_1 + 2x_2 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 13,\ b_2 = -2,\ b_3 = -4,$ б) $b_1 = -1,\ b_2 = 6,\ b_3 = 5.$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = b_1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 13,\ b_2 = 9,\ b_3 = 11,$ б) $b_1 = -1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -3.$

30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = b_1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = b_2, \\ 3x_2 - 9x_3 = b_3, \end{cases}$ а) $b_1 = 2,\ b_2 = -2,\ b_3 = 9,$ б) $b_1 = -47,\ b_2 = 1,\ b_3 = -12.$

3. Нахождение решений систем линейных уравнений общего вида

Пусть СЛАУ (1) совместна и $rgA = rgB = r$. Будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

.

Рассмотрим укороченную систему из первых r уравнений системы (1), т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = & b_r. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема. *Укороченная система эквивалентна исходной системе.*

Если $r = n$, то система (5) имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей.

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называются *свободными*.

Запишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Решим систему (6) относительно главных неизвестных:

$$\begin{gathered} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2} \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{7}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_r$ – некоторые однозначно определенные из (6) функции.

Соотношения (7) при произвольных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы.* В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, где $c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ – известные числа, называется *частным решением.*

Для однородной системы линейных уравнений в случае, когда она имеет бесконечное множество решений, из всей их совокупности выделяют так называемую фундаментальную систему решений.

Фундаментальной системой решений (ФСР) называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

ФСР существует тогда и только тогда, когда $r < n$, и может быть найдена следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ следующие $n - r$ наборов решений: $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения главных неизвестных. Тем самым найдем $n - r$ решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)^T, \\ e_2 & = & (c_{21}, c_{22}, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, 0, 0, \ldots, 1)^T. \end{array} \tag{8}$$

Совокупность решений (8) называется *нормальной фундаментальной системой решений.*

В общем случае свободным неизвестным придают $n - r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида $(c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}), \ldots, (c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,r+1} & \cdots & ca_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n - r$ линейно независимых решений системы:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n})^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})^T. \end{array}$$

Фундаментальная система решений $e_1, \ldots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Представление (9) решения называется *общим решением однородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений* (в отличие от общего решения (7) через свободные неизвестные).

Связь между решениями однородной и неоднородной систем.

Однородная система (3), полученная из системы (2) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (2).

Между решениями обеих систем существует тесная связь.

1. Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.

2. Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.

Найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (9) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$x = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где c – частное решение (2), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – ФСР (3). Представление (10) решения называется *общим решением неоднородной ситемы* уравнений *через фундаментальную систему решений.*

4. Метод Гаусса исследования и решения систем
4.1. Теоретические сведения

Для начала рассмотрим метод Гаусса приведения системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Мы не случайно выбрали это приведение. Для систем с верхней трапециевидной матрицей чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Пусть $B = [A|b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ – расширенная матрица системы (2).

Алгоритм этого метода заключается в следующем:

1. а) Элемент a_{11} назовем *ведущим (главным)* элементом 1-го шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним ненулевые элементы 1-го столбца. Если $a_{11} = 0$, то переставляем строки матрицы B(столбцы матрицы A) так, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$.

   б) Умножаем 1-ю строку матрицы B последовательно на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$ и складываем со 2-ой, 3-й, $\ldots m$-ой строками соответственно, получая нули в 1-ом столбце ниже элемента a_{11}.

   После выполнения 1-го шага матрица B переходит в матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right).$$

   Если при этом все строки матрицы A, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, т.к. матрица уже приведена к верхней трапециевидной форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \neq O,$$

   то переходим ко 2-му шагу.

2. Этот шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

   описанного выше 1-го шага.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от 1-го шага ко 2-му. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большое через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат.

Итак, *исследование и решение систем линейных уравнений общего вида с использованием метода Гаусса проводится по следующей схеме:*

1. Система линейных уравнений (2) приводится к системе с верхней трапециевидной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right), \qquad (11)$$

   где $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$

   При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы A, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

2. Устанавливается совместность системы с верхней трапециевидной матрицей (система с матрицей (11) совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$, т.е ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.).

3. Если $r = n$, то система система станет системой с треугольной матрицей

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = & b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \qquad & \\ a_{rr}x_r = & b_r \end{array}\right.,$$

   которая имеет единственное решение. Найти его несложно: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{rr}x_r = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array}\right. \qquad (12)$$

   Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (12) с треугольной матрицей.

П р и м е р 3. *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-3x_3 & = & 7, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3 & = & -1, \\ 4x_1+7x_2-5x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Решение. *Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B=\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 2 & 3 & 1 & | & -1 \\ 4 & 7 & -5 & | & 6 \end{array}\right)$$

и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Прибавив ко 2-й строке 1-ю, умноженную на (-2), и к 3-й строке – 1-ю, умноженную на (-4), получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 7 & | & -15 \\ 0 & -1 & 7 & | & -22 \end{array}\right).$$

Из 3-й строки вычтем 2-ю:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 7 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & | & -7 \end{array}\right).$$

Отсюда имеем $rgA = 2 \neq rgB = 3$ *и согласно теореме Кронекера-Капелли система является несовместной.*

П р и м е р 4. *Исследовать и решить систему линейных уравнений, если она совместна, с использованием метода Гаусса*

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+\ \ x_2-2x_3+3x_4 \qquad\quad & = & -3, \\ 3x_1+2x_2+\qquad\quad x_4+2x_5 & = & 0, \\ 7x_1+4x_2-4x_3+7x_4+2x_5 & = & -6, \\ 5x_1+3x_2-2x_3+4x_4+2x_5 & = & -3. \end{array}\right.$$

Решение. *Выпишем расширенную матрицу системы*

$$B=\left(\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & -2 & 3 & 0 & | & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & | & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & | & -3 \end{array}\right).$$

и с помощью метода Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Чтобы не производить действий с дробями, вначале вычтем из 1-й строки 2-ю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -4 & 7 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -2 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

Умножим 1-ю строку на 3,7,5 и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & -3 & -18 & 21 & -12 & -27 \\ 0 & -2 & -12 & 14 & -8 & -18 \end{array}\right).$$

Умножим 2-ю строку на (-3),(-2) и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Имеем $rgA = rgB = 2$, следовательно, система является совместной. Т.к. $rgA = rgB = 2 <$ n-числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных умножим 2-ю строку на (-1) и сложим с 1-й строкой:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Исходная система эквивалентна следующей:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x_1 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 & = & 6, \\ -x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5 & = & -9. \end{array} \right.$$

В качестве главных неизвестных возьмем x_1, x_2, тогда свободными будут x_3, x_4, x_5. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -6 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5, \\ x_2 & = & 9 - 6x_3 + 7x_4 - 4x_5. \end{array} \right.$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+4c_1-5c_2+2c_3 \\ 9-6c_1+7c_2-4c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Если положить $c_1 = -2,\ c_2 = -3,\ c_3 = 0$, *то получим частное решение*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 5. *Найти общее решение и ФСР для системы однородных линейных уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+\ \ x_3+2x_4+5x_5 &= 0, \\ 6x_1+5x_2+3x_3+4x_4+7x_5 &= 0, \\ 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+\qquad\ \ 2x_4+8x_5 &= 0. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Выпишем матрицу системы (расширенную матрицу не имеет смысла выписывать, т.к. система однородная)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

и с помощью метод Гаусса приведем ее к верхней трапециевидной матрице. Умножим 1-ю строку на (-2),(-3), (-1) и сложим соответственно со 2-й, 3-й, 4-й строками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим 2-ю строку на (-2),1 и сложим соответственно с 3-й, 4-й строками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $rgA = 2 <$ n-числа неизвестных, то система имеет нетривиальное решение.

Найдем общее решение системы. Для простоты выделения базисных переменных вычтем из 1-й строки 2-ю:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 8x_5 & = & 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 - 3x_5 & = & 0. \end{cases}$$

В качестве главных неизвестных возьмем $x_1,\ x_3$, тогда свободными будут x_2, x_4, x_5. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 & = & -(4x_2 + 2x_4 + 8x_5)/3, \\ x_3 & = & x_2 + 3x_5. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4c_1 + 2c_2 + 8c_3)/3 \\ c_1 \\ c_1 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Найдем ФСР, которая состоит из трех векторов e_1, e_2, e_3, т.к. $n - rgA = 5 - 2 = 3$. Придадим свободным неизвестным значения $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$, получим

$$e_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0$, получим

$$e_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, считая $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,$ *имеем*

$$e_3 = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение через ФСР можно записать теперь следующим образом

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$

В качестве частного решения можно взять один из векторов ФСР. Полученное частное решение можно использовать для проверки правильности решения. Подставив в каждое из уравнений исходной системы значения частного решения, убеждаемся, что они обращаются в верные равенства.

4.2. Задание

1. Иследовать и решить систему с помощью метода Гаусса:

1) выяснить совместность системы;

2) указать ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы;

3) в случае совместной системы найти общее решение системы и, если множество решений бесконечно, то указать одно частное решение.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

8. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &= \ 4, \\ 4x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= \ 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= \ 2, \\ 2x_1 + \ \ 5x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= \ 1, \\ \ \ x_1 - \ \ 7x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 &= \ 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 &= \ 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= \ 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= \ 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= \ 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= \ 8, \\ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \qquad\quad x_5 &= \ 2, \\ 18x_1 + 20x_2 - 24x_3 + 29x_4 + 39x_5 &= 12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 &= \ 29, \\ 27x_1 + 24x_2 - 39x_3 + 47x_4 &= \ 55, \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 &= 115, \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 &= \ 50. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + \ \ 41x_5 &= 28, \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + \ \ 62x_5 &= 43, \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + \ \ 83x_5 &= 58, \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \ \ 4x_4 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \ \ 7x_4 &= 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - \ \ x_3 - \ \ 5x_4 &= 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + \ \ 4x_4 &= \ \ 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ \ 8x_4 &= \ \ 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 &= -11, \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + \ \ \ x_4 &= \ \ 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ 4x_4 &= \ 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ \ 6x_4 &= \ 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \ \ 8x_4 &= \ 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 17x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 15, \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 10, \\ 12x_1 - 10x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 16x_1 + 6x_2 + 22x_3 - 10x_4 = 14, \\ 56x_1 + 21x_2 + 77x_3 - 35x_4 + 195x_5 = 49, \\ 40x_1 + 15x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 = 35, \\ 8x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 7, \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 18x_1 + 19x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4, \\ 27x_1 + 29x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 17x_1 - 29x_2 - 36x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 22, \\ 34x_1 - 58x_2 - 72x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 44, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4-5x_5 &= 1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4+2x_5 &= -1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 2, \\ x_1-2x_2-6x_4 &= 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5 &= 5, \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5 &= 8, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+6x_4+10x_5 &= 7, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5 &= 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 9x_1+6x_2+11x_3+3x_4+5x_5 &= 4, \\ 6x_1+4x_2+2x_3+2x_4+5x_5 &= -4, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 &= -7, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5 &= 2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+8x_3-6x_4+4x_5 &= 9, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5 &= 4, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5 &= 11, \\ 3x_1+6x_2+9x_3-7x_4+4x_5 &= 17. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x_1+9x_2+4x_3+6x_4 &= 8, \\ 10x_1+15x_2+8x_3+10x_4 &= 12, \\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4 &= 6, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4 &= 5. \end{cases}$

2. Найти общее решение и ФСР для системы однородных линейных уравнений.

1. $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0.$

2. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5 &= 0, \\ 3x_1+13x_2+7x_3+2x_4+4x_5 &= 0, \\ 3x_1+9x_2+6x_3-8x_5 &= 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+7x_3+3x_4-x_5 &= 0, \\ 3x_1-10x_2-14x_3-5x_4-6x_5 &= 0, \\ 3x_1-2x_2-2x_3+6x_4+2x_5 &= 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5 &= 0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3+3x_4-2x_5 &= 0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3-x_4+2x_5 &= 0, \\ 2x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5 &= 0, \\ -x_1+2x_2+2x_3-x_4-x_5 &= 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ \ x_3 - 3x_4 - \ \ x_5 & = & 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 & = & 0, \\ \ \ x_1 + \quad + \ x_3 - \ \ x_4 - 2x_5 & = & 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - \ \ 3x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 0, \\ -x_1 - \ \ 5x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 & = & 0, \\ x_1 - 11x_2 - \qquad 3x_4 + 5x_5 & = & 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 & = & 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 & = & 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + \ \ x_5 & = & 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 + 3x_5 & = & 0, \\ x_1 + \ \ x_2 + \qquad 4x_4 + 4x_5 & = & 0, \\ x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + \qquad x_5 & = & 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -8x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 + 2x_5 & = & 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 6x_5 & = & 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 & = & 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 & = & 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - \ \ x_5 & = & 0, \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + \ \ 3x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ \ x_4 - \ \ 2x_5 & = & 0, \\ 55x_1 + 33x_2 - 22x_3 + 11x_4 - 22x_5 & = & 0, \\ 65x_1 + 39x_2 - 26x_3 + 13x_4 - 26x_5 & = & 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + \qquad 2x_3 + \ \ x_4 - 2x_5 & = & 0, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 & = & 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = & 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 & = & 0, \\ -x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + x_4 - 4x_5 & = & 0, \\ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 - x_4 - \ \ x_5 & = & 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 & = & 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 & = & 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 - 4x_5 & = & 0, \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 - \qquad 2x_5 & = & 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 & = & 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 + 3x_5 & = & 0, \\ x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 - 4x_4 & = & 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 & = & 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+3x_3+4x_4-x_5 = 0, \\ 2x_1+4x_2+x_3+2x_4-3x_5 = 0, \\ -2x_1+3x_2+x_3+x_4-2x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4-5x_5 = 0, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4+x_5 = 0, \\ 4x_1+3x_2-9x_3-7x_4-9x_5 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ 5x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5 = 0, \\ -x_1+5x_2+x_3-3x_4-x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-4x_4+2x_5 = 0, \\ -6x_1+12x_2-3x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ -4x_1+8x_2-2x_3-2x_4+x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+5x_4+x_5 = 0, \\ -2x_1+3x_2+2x_3-x_4-5x_5 = 0, \\ -x_1+x_2+x_3+4x_4-4x_5 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5 = 0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5 = 0, \\ 2x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4+5x_5 = 0, \\ -x_1+x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_2+2x_3-5x_4+7x_5 = 0, \\ x_1+x_2+2x_3-2x_4+4x_5 = 0, \\ 3x_1+3x_2+2x_3-5x_4+7x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ -x_1-x_3+x_4+3x_5 = 0, \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4-x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5 = 0, \\ 2x_1+6x_2-5x_3+2x_4-x_5 = 0, \\ 4x_1+9x_2-13x_3+4x_4-3x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5 = 0, \\ 6x_1-3x_2+3x_3+4x_4-x_5 = 0, \\ 4x_1-2x_2+3x_4-3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 = 0, \\ -3x_1+3x_2-4x_3+5x_4-x_5 = 0, \\ -2x_1+2x_2-3x_3+4x_4 = 0. \end{cases}$

30. $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 & = & 0, \\ 14x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 28x_4 - 14x_5 & = & 0, \\ 22x_1 - 11x_2 + 11x_3 - 44x_4 - 22x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.- 384.

Учебное издание

Системы линейных уравнений

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.