МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА"
(Самарский университет)

Г.В. ВОСКРЕСЕНСКАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования "Самарский национальный
исследовательский университет имени академика
С.П.Королева" в качестве сборника задач для студентов,
обучающихся по программам высшего образования
направления 03.03.02 Физика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2016

УДК 514.12
ББК 22.151.5
В 76

Рецензент канд. техн. наук, доц. В.Л. Шур

Воскресенская, Галина Валентиновна
В 76 **Аналитическая геометрия:** сб. задач / *Г.В. Воскресенская.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2016. – 32 с.

Сборник содержит задачи по разделам: прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве, деление отрезка в данном отношении, векторная алгебра, прямая на плоскости, кривые второго порядка, плоскость, прямая в пространстве, поверхности второго порядка. По каждой теме приведены подробные решения основных задач курса. Представлены варианты итоговой контрольной работы. Указаны задания для домашней работы.Набор задач соответствует новому учебному плану и рабочей программе по аналитической геометрии для студентов первого курса.

Предназначен для студентов, обучающихся по программам высшего образования направления 03.03.02 Физика.

Подготовлен на кафедре алгебры и геометрии.

УДК 514.12
ББК 22.151.5

1. Линейные операции над векторами. Деление отрезка в данном отношении

Задача 1.1.
На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $A(2,4,1)$ и $B(-3,2,5)$.
Решение. Пусть $M((0,0,z)$ — искомая точка. Тогда $|AM| = |MB|$.

$$|AM| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (z-1)^2},\ |MB| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (5-z)^2}$$

Отсюда после возведения в квадрат получим

$$(z-1)^2 + 20 = (5-z)^2 + 13$$
$$z = \frac{17}{8}$$

Ответ: $M(0,0,\frac{17}{8})$.
Задача 1.2.
Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами
$A(2,3,4),\ B(3,1,2),\ C(4,-1,3)$.
Решение. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан О. Найдем середину отрезка $[AB]$ — точку H :

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2},$$
$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2,$$
$$z_H = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Точка O делит отрезок $[CH]$ в отношении $\lambda = 2$.

$$x_O = \frac{x_C + \lambda x_H}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot\frac{5}{2}}{1+2} = 3,$$
$$y_O = \frac{y_C + \lambda y_H}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 2}{3} = 1,$$
$$z_O = \frac{z_C + \lambda z_H}{1+\lambda} = \frac{3+2\cdot 3}{3} = 3.$$

Ответ:$O(3,1,3)$.
Задача 1.3.
Даны три вершины параллелограмма $A(3,-5),\ B(5,-3),\ C(-1,3)$. Определить четвертую вершину D.
Решение.
Точкой пересечения M диагонали параллелограмма делятся пополам.
Найдем координаты точки M как середины отрезка $[AC]$.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1.$$

Точка M делит отрезок $[BD]$ в отношении $\frac{1}{2}$, точка D делит отрезок $[BM]$ в отношении $\lambda = -2$.

$$x_D = \frac{x_B - 2 \cdot x_M}{-1} = \frac{5 - 2 \cdot 1}{-1} = -3, \; y_D = \frac{y_B - 2 \cdot y_M}{-1} = \frac{-3 - 2 \cdot (-1)}{-1} = 1.$$

Ответ:$D(-3, 1)$.

Задача 1.4.

Вычислить модуль вектора $\vec{a} = \{2, 6, -3\}$.

Решение.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Ответ: 7.

Задача 1.5.

Вектор $\vec{AB} = \{3, 4\}$ имеет начало в точке $A(-2, 3)$. Найти координаты его конца.

Решение.

Координаты вектора $\vec{AB} = \{x_B - x_A, \; y_B - y_A\}, \; x_A = -2, \; y_A = 3$.

Следовательно, $x_B + 2 = 3, \; y_B - 3 = 4, \; x_B = 1, \; y_B = 7$.

Ответ: $B(1, 7)$.

Задача 1.6.

Найти орт вектора $\vec{a} = \{6, -2, -3\}$.

Решение.

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\vec{a_0} = \{\frac{6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}\}.$$

Ответ: $\vec{a_0} = \{\frac{6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}\}$.

Задача 1.7.

Найти сумму и разность векторов $\vec{a} = \{3, -5, 8\}, \; \vec{b} = \{-1, 1, -4\}$.

Решение.

$$\vec{a} + \vec{b} = \{3 - 1, -5 + 1, 8 - 4\} = \{2, -4, 4\},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{3 - (-1), -5 - 1, 8 - (-4)\} = \{4, -6, 12\},$$

Ответ: $\{2, -4, 4\}, \; \{4, -6, 12\}$.

Задача 1.8.

Даны три вектора

$\vec{p} = \{3, -2, 1\}, \; \vec{q} = \{-1, 1, -2\}, \; \vec{r} = \{2, 1, -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c} = \{11, -6, 5\}$

по базису из векторов $\vec{p}, \; \vec{q}, \; \vec{r}$.

Решение. $\vec{c} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ — разложение $\vec{c}$ по базису. Аналогичные соотношения верны для координат.

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma & = & 11 \\ -2\alpha + \beta + \gamma & = & -6 \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma & = & 5 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -7 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\alpha = 2,\ \beta = -3,\ \gamma = 1.$$

Ответ: $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

Аудиторное занятие.

1.1. Вычислить модуль вектора $\vec{a} = \{6, 3, -2\}$.

1.2. Даны точки $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 2, 1)$. Найти координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$.

1.3. Точка O — центр масс треугольника ABC. Доказать, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{O}$.

1.4. Векторы $\vec{AB} = \{2, 6, -4\}$ и $\vec{A} = \{4, 2, -2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

1.5. Найти орт вектора $\vec{a} = \{6, -2, -3\}$.

1.6. Даны три вектора
$\vec{a} = \{2, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{2, 2, -1\}$. Найти разложение вектора $\vec{d} = \{3, 7, -7\}$ по базису из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.7. Принимая в качестве базиса векторы $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{A} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC, определить разложение векторов, приложенных в вершинах треугольника и совпадающих с его медианами.

1.8. На плоскости даны четыре точки $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$, $D(-2, 3)$. Определить разложение векторов $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD} + \vec{BD} + \vec{CD}$, принимая в качестве базиса векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

1.9. Отрезок, ограниченный точками $A(1, -3)$ и $B(4, 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

1.10. Прямая проходит через точку $M_1(-12, -13)$ и $M_2(-2, -5)$. На этой прямой найти точку, абсцисса которой равна 3.

Домашнее задание.

1.11. Найти орт вектора $\{3, 4, -12\}$.

1.12. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = \{3, -5, 8\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, -4\}$.

1.13. Даны три вектора
$\vec{a} = \{3, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -2\}$, $\vec{c} = \{-1, 7\}$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

1.14. Даны два вектора
$\vec{p} = \{2, -3\}$, $\vec{q} = \{1, 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9, 4\}$ по базису из векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$.

1.15. Даны вершины треугольника $A(1, -3)$, $B(3, -5)$, $C(-5, 7)$. Определить середины его сторон.

1.16. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1, 1)$. Определить две другие его вершины.

2. Скалярное произведение

Задача 2.1.
Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3, 4, 7\}, \ \vec{b} = \{2, -5, 2\}$.
Решение.
Находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.
Ответ:0.
Задача 2.2.
Дано: $|\vec{a}| = 4, \ |\vec{b}| = 3$, угол ϕ между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\phi = 4 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ:$6\sqrt{3}$.
Задача 2.3.
Дано: $|\vec{a}| = 13, \ |\vec{b}| = 19, \ |\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.
Решение.

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2},$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$|\vec{a}| = 169, \ |\vec{b}| = 361,$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2,$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2 \cdot |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(169 + 361) - 24^2 = 484,$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 22.$$

Ответ:22.
Задача 2.4.
Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2, -4, 4\}, \ \vec{b} = \{-3, 2, 6\}$.
Решение.
Обозначим величину искомого угла через ϕ.

$$cos \ \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6, \ |\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 10.$$

$$cos \ \phi = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}, \ \phi = arccos \ \frac{5}{21}.$$

Ответ:$\phi = arccos \ \frac{5}{21}$.
Задача 2.5.

Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4),\ B(-4,-2,0),\ C(3,-2,1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

Решение.

Искомый угол — это угол между векторами $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$. Обозначим его ϕ. $\vec{BA} = \{3,0,4\},\ \vec{BC} = \{7,0,1\}$.

$$cos\phi = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|},$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 21+0+4 = 25,$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5,\ |\vec{BC}| = \sqrt{7^2+0^2+1^2} = 5\sqrt{2},$$

$$cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ:$\frac{\pi}{4}$.

Задача 2.6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2,1,-1\}$, удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$.

Решение.

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\vec{x} = \{2k,k,-k\},\ \vec{x}\cdot\vec{a} = 6k = 3,\ k = \frac{1}{2},$$

Ответ:$\vec{x} = \{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}$.

Аудиторное занятие.

2.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\phi = \frac{2\pi}{3},\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$.
Вычислить $1)\vec{a}\cdot\vec{b},\ 2)\vec{a}^{\ 2},\ 3)\vec{b}^{\ 2},\ 4)(\vec{a}+\vec{b})^{\ 2},\ 5)(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}),$
$6)(\vec{a}-\vec{b})^{\ 2},\ 7)(3\vec{a}+2\vec{b})^{\ 2}$.

2.2. Даны векторы $\vec{a} = \{4,-2,-4\}$, $\vec{b} = \{6,-3,2\}$.
Вычислить
$1)\vec{a}\cdot\vec{b},\ 2)\sqrt{\vec{a}^{\ 2}},\ 3)\sqrt{\vec{b}^{\ 2}},\ 4)(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}),\ 5)(\vec{a}+\vec{b})^{\ 2},\ 6)(\vec{a}-\vec{b})^{\ 2}$.

2.3. Вычислить косинус угла, образованного векторами
$\vec{a} = \{2,-4,4\}$, и $\vec{b} = \{-3,2,6\}$.

2.4.Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4),\ B(-4,-2,0),\ C(3,-2,1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

2.5.Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2,1,-1\}$, удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$.

2.6.Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам
$\vec{a} = \{3,2,2\},\ \vec{b} = \{18,-22,-5\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты,зная, что $|x| = 14$.

2.7.Найти вектор $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам
$\vec{a} = \{2,3,-1\},\ \vec{b} = \{1,-2,3\}$ и $\vec{x}\cdot\vec{c} = -6$, где $\vec{c} = \{2,-1,1\}$.

2.8.Даны векторы
$\vec{a} = \{2,-1,3\},\ \vec{b} = \{1,-3,2\},\ \vec{c} = \{3,2,-4\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если
$\vec{x}\cdot\vec{a}=-5,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=-11,\ \vec{x}\cdot\vec{c}=20.$
2.9.Даны три точки $A(-2,3,-4),\ B(3,2,5),\ C(1,-1,2),\ D(3,2,-4)$. Вычислить $pr_{\vec{CD}}\vec{AB}$.
2.10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\phi=\frac{\pi}{6}$. $|\vec{a}|=\sqrt{3},\ |\vec{b}|=1$.
Найти угол α между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

Домашнее задание.

2.11.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=8$. Вычислить $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c}),\ (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2,\ (\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

2.12. Даны векторы единичной длины $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

2.13.Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ был перпендикулярен к вектору $\vec{a}-\vec{b}$.

2.14. Определить при каком α векторы $\vec{a}=\{\alpha,-3,2\},\ \vec{b}=\{1,2,-\alpha\}$ взаимно перпендикулярны.

2.15.Даны вершины треугольника $A(3,2,-3),\ B(5,1,-1),\ C(1,-2,1)$. Определить внешний угол при вершине A.

2.16. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору
$\vec{a}=\{6;-8;-7,5\}$, образует с осью Oz острый угол. $|\vec{x}|=50$. Найти $\vec{x}$.

3. Векторное произведение

Задача 3.1.
Даны векторы $\vec{a}=\{3,-1,-2\},\ \vec{b}=\{1,2,-1\}$.
Вычислить координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.
Решение.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\}=\{5,1,7\}$$

Ответ: $\{5,1,7\}$.

Задача 3.2. Даны три точки $A(1,2,0),B(3,0,-3),C(5,2,6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь ABC равна $\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

$$\vec{AB}\{2,-2,-3\},\vec{AC}\{4,0,6\},$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\{\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\}=\{-12,-24,8\},$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{(-12)^2+24^2+8^2}=28,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

Ответ: 14.

Задача 3.3.

Вычислить синус угла, образованного векторами
$\vec{a} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 3, 6\}$.

Решение.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\alpha,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\} = \{-15, -10, 10\},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-15)^2 + 10^2 + 10^2} = 5 \cdot \sqrt{17},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \ |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 3 = 7,$$

$$\sin \ \alpha = \frac{5}{21} \cdot \sqrt{17}.$$

Ответ: $\frac{5}{21} \cdot \sqrt{17}$.

Задача 3.4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\cdot\vec{b}$ и $3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем

$$(\vec{a} + 3 \cdot \vec{b}) \cdot (3 \cdot \vec{a} + \vec{b}) = 3 \cdot \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9 \cdot \vec{b} \times \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} \times \vec{b} =$$

$$3 \cdot \vec{0} + \vec{a} \times \vec{b} - 9 \cdot \vec{a} \times \vec{b} + 3 \cdot \vec{0} = -8 \cdot \vec{a} \times \vec{b},$$

$$S = 8 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\frac{\pi}{6} = 4.$$

Ответ:4.

Задача 3.5. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B на сторону $[AC]$.

Решение.

Обозначим основание высоты через H.

С одной стороны,

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BH}| \cdot |\vec{AC}|$$

с другой стороны,

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Отсюда получим,

$$|BH| = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AC}|},$$

$$\vec{AB} = \{4, -5, 0\}, \ \vec{AC} = \{0, 4, -3\}.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\} = \{15, 12, 16\},$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 25, \ |\vec{AC}| = 5, \ |BH| = 5.$$

Ответ:5.

Аудиторное занятие.

3.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4.$
Вычислить $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|.$
3.2. Даны три точки $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6).$
Вычислить площадь треугольника $ABC.$
3.3. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1).$
Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B на сторону $[AC].$
3.4. Вычислить синус угла, образованного векторами
$\vec{a} = \{2, -2, 1\},\ \vec{b} = \{2, 3, 6\}.$
3.5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4, -2, -3\},\ \vec{b} = \{0, 1, 3\},$
образует с осью Oy тупой угол. Зная, что= $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.
3.6. Даны векторы $\vec{a} = \{3, -1, -2\},\ \vec{b} = \{1, 2, -1\}.$
Вычислить координаты вектора $\vec{a} \times \vec{b}.$
3.7.Даны векторы $\vec{a} = \{3, -1, -2\},\ \vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Вычислить координаты вектора $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}.$
3.8.Даны векторы $\vec{a} = \{3, -1, -2\},\ \vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Вычислить координаты вектора $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}).$
3.9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\phi = \frac{\pi}{6},\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 5$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|.$
3.10. Доказать, что $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^{\ 2} \cdot \vec{b}^{\ 2}.$

Домашнее задание.

3.11. Дано:
$|\vec{a}| = 10,\ |\vec{b}| = 2,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|.$
3.12.Дано: $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 26,\ |\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}.$
3.13. Даны векторы $\vec{a} = \{2, -3, 1\},\ \vec{b} = \{1, -2, 3\},\ \vec{c} = \{1, 2, -7\}$. Найти вектор $\vec{x}$, если
$\vec{x} \cdot \vec{a} = 0,\ \vec{x} \cdot \vec{b} = 0,\ \vec{x} \cdot \vec{c} = 10.$
3.14.Даны три точки $A(2, -1, 2), B(1, 2, -1), C(3, 2, 1).$
Вычислить $\vec{AB} \times \vec{BC},\ (\vec{BC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB}.$
3.15. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = \{8, -15, 3\},$
образует острый угол с осью $Ox,\ |\vec{x}| = 51$. Найти этот вектор.
3.16.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.
$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4.$
Вычислить $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|.$

4. Смешанное произведение

Задача 4.1. Показать, что векторы $\vec{a} = \{2, 5, 7\}$, $\vec{b} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{c} = \{1, 2, 2\}$ компланарны.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, то заданные векторы компланарны.

Задача 4.2.

Найти объем пирамиды с вершинами

$A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$, $D(5, 5, 6)$ и длину высоты BH.

Решение. Найдем координаты векторов

$$\vec{AB} = \{2, 1, 1\}, \ \vec{AC} = \{2, 3, 2\}, \ \vec{AD} = \{3, 3, 4\}.$$

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}|.$$

Найдем высоту.

$$|BH| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AC} \times \vec{AD}|},$$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \{6, -2, -3\},$$

$$|\vec{AC} \times \vec{AD}| = 7, \ |BH| = \frac{7}{7} = 1.$$

Ответ:1.

Задача 4.3.

Вычислить $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$.

Решение. Так как

$(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$, то эти векторы компланарны.

Следовательно, их смешанное произведение равно 0.

Аудиторное занятие.

4.1. Определить, какой является тройка $\vec{a} = \{1, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{c} = \{0, 0, 1\}$.

4.2. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках

$A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$.

Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

4.3.Даны вершины тетраэдра $A(2,3,1),\ B(4,1,-2),\ C(6,3,7),\ D(-5,-4,8)$.
Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

4.4.Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся
в точках $A(2,-1,1),\ B(5,5,4),\ C(3,2,-1),\ D(4,1,3)$.

4.5.Докажите, что точки $A(1,2,-1),\ B(0,1,5),\ C(-1,2,1),\ D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

4.6.Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны. $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{c}|=3$. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4.7.Даны векторы
$\vec{a}=\{1,-1,3\},\ \vec{b}=\{-2,2,1\},\ \vec{c}=\{3,-2,5\}$.
Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4.8.Компланарны ли векторы
$\vec{a}=\{2,-1,2\},\ \vec{b}=\{1,2,-3\},\ \vec{c}=\{3,-4,7\}$?

4.9. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})=2\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4.10.Доказать тождество $\vec{a}\cdot\vec{b}(\vec{c}+\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Домашнее задание.

4.11.Определить, какой является тройка $\vec{a}=\{1,1,0\},\ \vec{b}=\{1,-1,0\},\ \vec{c}=\{0,1,0\}$.

4.12.Определить, какой является тройка $\vec{a}=\{1,1,0\},\ \vec{b}=\{1,-1,0\},\ \vec{c}=\{0,0,1\}$.

4.13.Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Угол между векторами равен $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$. $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=3$.
Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4.14. Доказать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$,
удовлетворяющие тождеству $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, компланарны.

4.15.Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{2,3,-1\},\ \vec{b}=\{1,-1,3\},\ \vec{c}=\{1,9,-11\}$?

4.16.Компланарны ли векторы
$\vec{a}=\{3,-2,1\},\ \vec{b}=\{2,1,2\},\ \vec{c}=\{3,-1,-2\}$?

5. Прямая на плоскости

Задача 5.1. Дано общее уравнение прямой $2x+3y-4=0$. Выписать другие уравнения этой прямой, найти ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы этой прямой.

Решение. Если общее уравнение прямой задано формулой $Ax+By+C=0$, то ее нормальный вектор $\vec{N}=\{A,B\}$, ее направляющий вектор равен $\vec{a}=\{-B,A\}$. Находим $\vec{N}=\{2,3\},\ \vec{a}=\{-3,2\}$. Найдем координаты какой-нибудь точки на этой прямой: точка $(2,0)$ лежит на данной прямой, что можно проверить прямым вычислением.

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{2}$$

— каноническое уравнение.

$$y=\frac{-2}{3}\cdot x+\frac{4}{3}$$

— уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угловой коэффициент прямой равен $k=\frac{-2}{3}$.Найдем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{2}=t,$$

$$\begin{cases} x & = & 2-3t \\ y & = & 2t \end{cases}$$

$$2\cdot(x-2)+3\cdot(y-0)=0$$

—уравнение прямой с известным нормальным вектором, проходящей через известную точку.

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

—уравнение прямой в отрезках на осях.

$$y-0=\frac{-2}{3}\cdot(x-2)$$

— уравнение прямой с известным угловым коэффициентом, проходящей через известную точку.

Найдем нормальное уравнение прямой. Его формула имеет вид:

$$cos\ \phi\cdot x+sin\ \phi\cdot y-p.$$

Нормирующий множитель равен $\mu=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot y-\frac{4}{\sqrt{13}}=0.$$

— нормальное уравнение прямой.

Задача 5.2. составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3,-1)$ параллельно оси Oy.

Решение. Направляющий вектор оси Oy равен $\vec{j}=\{0,1\}$. Каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x+3}{0}=\frac{y+1}{1},$$

$$x=-3.$$

Ответ:$x=-3$.

Задача 5.3.Даны вершины треугольника $ABC: A(2,2),\ B(-2,-8),\ C(-6,-2)$. Составить уравнение медианы (BM).

Решение.

Найдем координаты точки M как середины отрезка $[AC]$.

$$x_M=\frac{2-6}{2}=-2,\ y_M=\frac{2-2}{2}=0,$$

$$(BM):\frac{x-(-2)}{-2-(-2)}=\frac{y-0}{-8},$$
$$(BM): x+2=0.$$

Ответ:$x+2=0.$

Задача 5.4.Даны стороны треугольника

$(AB): x+3y-7=0,\ (BC): 4x-y-2=0,\ (AC): 6x+8y-35=0.$

Найти уравнение высоты (BH).

Решение.

Прямая (BH) принадлежит пучку, определенному прямыми (AB) и (BC). Проверим, что сама прямая (AB) не является высотой.

$$\vec{N}_{(AB)}=\{1,3\},\ \vec{N}_{(AC)}=\{6,8\},$$
$$\vec{N}_{(AB)}\cdot\vec{N}_{(AC)}=6+24\neq 0.$$

Составим уравнение пучка:

$$(4x-y-2)+k\cdot(x+3y-7)=0,$$
$$(4+k)\cdot x+(-1+3k)\cdot y+(-2-7k)=0,$$
$$\vec{N}_{(BH)}=\{4+k,3k-1\},\ \vec{N}_{(AC)}\cdot\vec{N}_{(BH)}=30k+16=0,$$
$$k=\frac{-8}{15},$$
$$\frac{52}{15}\cdot x-\frac{39}{15}\cdot y+\frac{26}{15}=0.$$
$$52x-39y+26=0$$

—уравнение искомой высоты.

Ответ:$52x-39y+26=0.$

Задача 5.5.Составить уравнения биссектрис углов между прямыми

$x+y-5=0$ и $7x-y-19=0.$

Решение.

Пусть точка $M(x,y)$ — произвольная точка биссектрисы. Расстояния от M до обеих сторон треугольника равны:

$$\frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y-19|}{\sqrt{50}}.$$

Раскроем модули двумя способами:

$$5(x+y-5)+7x-y-19=4(3x+y-11)=0,\ 5(x+y-5)-(7x-y-19)=-2(x-3y+3)=0.$$

Ответ:$3x+y-11=0,\ x-3y+3=0.$

Задача 5.6. Найти угол между прямыми

$y=\frac{-2}{5}\cdot x+3,\ \frac{3}{7}\cdot x+\frac{2}{7}.$

Решение.Угловой коэффициент первой прямой равен $k_1=\frac{-2}{5}$, угловой коэффициент второй прямой равен $k_2=\frac{3}{7}$.

Имеем

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{3}{7} - (\frac{-2}{5})}{1 + (\frac{-2}{5}) \cdot \frac{3}{7}} = 1.$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 5.7. Найти угол между прямыми
$3x + y - 6 = 0,\ 2x - y + 5 = 0.$

Решение.

$$cos\ \phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 5.8. Даны уравнения одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $M(-2, 0)$. Составить уравнения остальных сторон.

Решение.Обозначим известную сторону через (AB). Диагональ (AC) и сторона (AB) образуют угол $\phi = \frac{\pi}{4}$,

$tg\ \phi = 1,\ k_{AB} = \frac{-1}{3},\ k_{AC}$ найдем из соотношения

$$1 = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}} = \frac{\frac{-1}{3} - k_{AC}}{1 - \frac{1}{3} \cdot k_{AC}},$$

$$1 - \frac{1}{3} \cdot k_{AC} = \frac{-1}{3} - k_{AC},$$

$$k_{AC} = -2.$$

Уравнение прямой (AC) :

$$y - 0 = -2 \cdot (x + 2),$$

$$2x + y + 4 = 0.$$

Найдем координаты вершины A, решая систему:

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Получим $A(-3, 2)$.

Стороны (AD) и (AB) перпендикулярны.

$$k_{AD} \cdot k_{AB} = -1,$$

$$k_{AD} \cdot (\frac{-1}{3}) = -1,$$

$$k_{AD} = 3.$$

Уравнение прямой (AD) :

$$y - 2 = 3 \cdot (x + 3),$$
$$3x - y + 11 = 0.$$

Найдем координаты точки C из условия, что M делит отрезок $[AC]$ пополам.

$$x_C = 2 \cdot x_M - x_A = -4 + 3 = -1,$$
$$y_C = 2 \cdot y_M - y_A = 0 - 2 = -2,$$
$$C(-1, -2).$$

Прямые (AD) и (BC) параллельны. Следовательно, $k_{AD} = k_{BC} = 3$.
Уравнение прямой (BC) :

$$y + 2 = 3(x + 1), \ 3x - y + 1 = 0.$$

Прямые (CD) и (AB) параллельны.

$$k_{CD} = k_{AB} = \frac{-1}{3}.$$

Уравнение прямой (CD) :

$$y + 2 = \frac{-1}{3} \cdot (x + 1), \ x + 3y + 7 = 0.$$

Ответ:$3x - y + 11 = 0, \ 3x - y + 1 = 0, \ x + 3y + 7 = 0.$

Аудиторное занятие.

5.1.Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через $M_0(2, 1)$:
1) параллельно данной прямой;
2) перпендикулярно данной прямой.

5.2.Найти точку Q,симметричную точке $P(-5, 13)$, относительно прямой
$2x - 3y - 3 = 0$.

5.3.Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(3, 2), B(5, -2), C(1, 0)$.

5.4. Определить угол между прямыми $5x - y + 7 = 0, \ 3x + 2y = 0$.

5.5. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

5.6.Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x - 3y + 5 = 0, \ 3x - y - 2 = 0$.

5.7.Вычислить расстояние между параллельными прямыми $3x - 4y - 10 = 0, \ 6x - 8y + 5 = 0$.

5.8.Из точки $M_0(-2, 3)$ под углом α к оси Ox направлен луч света, $tg \ \alpha = 3$. Дойдя до оси Ox, луч от нее отразился. Составить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

5.9.Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой

$3x-2y+7=0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

5.10. Даны середины сторон треугольника $M_1(2,1),\ M_2(5,3),\ M_3(3,-4)$. Составить уравнения его сторон.

Домашнее задание.

5.11. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$2x-3y+5=0,\ 3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2,-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника. **5.12.** Найти проекцию точки $P(-6,4)$ на прямую $4x-5y+3=0$. **5.13.** Составить уравнение прямой, если точка $P(2,3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую. **5.14.** Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x-2y-3=0,\ 2x+4y+7=0$. **5.15.** Вычислить расстояние между параллельными прямыми $5x-12y+26=0,\ 5x-12y-13=0$. **5.16.** Составить уравнения прямых, проходящих через $P(2,5)$, расстояние до которых от $Q(5,1)$ равно 3.

6. Кривые второго порядка

Задача 6.1. Найти каноническое уравнение эллипса $9x^2+25y^2-225=0$, его эксцентриситет, полуоси, фокусы, вершины, директрисы.

Решение.

$9x^2+25y^2=225,\ \ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

$a=5$ —большая полуось, $b=3$ — малая полуось,

$c^2=a^2-b^2=25-9=16,$

$F_1(-c,0)=F_1(-4,0)$ — левый фокус, $F_2(c,0)=F_2(4,0)$ — правый фокус,

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ —эксцентриситет, $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{4}$ — уравнения директрис,

вершины $(-5,0),\ (5,0),\ (0,3),\ (0,-3).$

Задача 6.2.

Составить каноническое уравнение эллипса, если:

1) фокальное расстояние равно $2c=10$, малая полуось $b=5$;

2)эксцентриситет $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, большая полуось $a=3$;

3) расстояние между фокусами равно 8, $e=\frac{1}{2}$.

Решение.

1)
$$c=\frac{10}{2}=5,\ c^2=a^2-b^2,\ a^2=c^2+b^2=25+25=50,$$
$$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1.$$

2)
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ a=3,\ c=\sqrt{3},\ b^2=a^2-c^2=9-3=6,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

3)

$$2c = 8,\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, c = 4,\ a = 8, b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48,$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Задача 6.3. Найти каноническое уравнение гиперболы $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, эксцентриситет, полуоси, фокусы, вершины, директрисы и асимптоты.

Решение.

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$

$a = 3$ —действительная полуось, $b = 2$ — мнимая полуось,

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13,$

$F_1(-c, 0) = F_1(-\sqrt{13}, 0)$ — левый фокус, $F_2(c, 0) = F_2(\sqrt{13}, 0)$ — правый фокус,

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ —эксцентриситет, $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$ — уравнения директрис,

$y = \pm\frac{2}{3} \cdot x$ — директрисы,

вершины $(-3, 0),\ (3, 0)$.

Задача 6.4.

Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $a = 3$, гипербола проходит через точку $(6, 2\sqrt{3})$,

2)$2a = 8,\ 2c = 10$,

3) гипербола является равнобочной и проходит через точку $(\sqrt{2}, 1)$.

Решение.

1)

$$a = 3,\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Подставим координаты точки:

$$\frac{36}{9} - \frac{12}{b^2} = 1,\ b^2 = 4,$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

2)

$$2a = 8,\ 2c = 10,\ a = 4,\ c = 5,\ c^2 = a^2 + b^2,\ 25 = 16 + b^2, b^2 = 9.$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

3)

$$a^2 = b^2,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Подставим координаты точки:

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1,\ a^2 = 1.$$

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Задача 6.5.
Найти вершину параболы $y^2 = 4x$, ее параметр, фокус, директрису.
Решение.
Вершина параболы находятся в точке $(0,0)$. Параметр $p = 2$.
$F(\frac{p}{2}, 0) = F(1,0)$ — фокус.
$x = -\frac{p}{2} = -1$ - директриса.
Задача 6.6.
Составить каноническое уравнение параболы, если
1) расстояние от фокуса до вершины равно 4,
2) фокус имеет координаты $(3,0)$,
3) директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$.
Решение. 1) $\frac{p}{2} = 4,\ p = 8,\ y^2 = 16x$.
2) $\frac{p}{2} = 3,\ p = 6,\ y^2 = 12x$.
3) $x = -15,\ \frac{p}{2} = 15,\ p = 30,\ y^2 = 60x$.

Аудиторное занятие.

В задачах $6.1 - 6.8,\ 6.11 - 6.16.$ исследовать кривые и сделать чертеж.
6.1.$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. **6.2.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. **6.3.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **6.4.**$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. **6.5.** $y^2 = 6x$. **6.6.** $y^2 = -6x$. **6.7.** $x^2 = 6y$. **6.8.** $x^2 = -6y$. **6.9.**Составить каноническое уравнение эллипса, если
1) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10,
2) $2c = 6,\ e = \frac{3}{5}$,
3)его большая ось равна 20, $e = \frac{3}{5}$.
6.10.Составить каноническое уравнение гиперболы, если
1)уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, расстояние между фокусами равно 20,
2) расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13},\ 2c = 26$.
3) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5},\ 2b = 6$.

Домашнее задание.

6.11.$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
6.12.$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
6.13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.
6.14.$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
6.15.$y^2 = \pm 4x$.
6.16.$x^2 = \pm 4y$.

7. Плоскость и прямая в пространстве

Задача 7.1.Точка $P = (2, -1, 1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Решение.

Вектор $\vec{OP} = \{2, -1, 1\}$ является перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость. Уравнение искомой плоскости:

$$2 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-1) = 0,\ 2x - y + z - 6 = 0.$$

Ответ:$2x - y + z - 6 = 0$

Задача 7.2. Найти угол между плоскостями $6x + 3y - 2z = 0,\ x + 2y + 6z - 12 = 0$

Решение.

$$cos\ \phi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 6}{\sqrt{36 + 9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4 + 36}}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ:$\frac{\pi}{2}$.

Задача 7.3. Из точки $P(2, 3, -5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Решение.

Основания перпендикуляров: $M_1(2, 3, 0),\ M_2(2, 0, -5),\ M_3(0, 3, -5)$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$15x + 10y - 6z - 60 = 0.$$

Ответ: $15x + 10y - 6z - 60 = 0$.

Задача 7.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 3y + 5z - 4 = 0,\ x - y - 2x + 7 = 0$, и параллельной оси Oy.

Решение.

Воспользуемся уравнением пучка плоскостей:

$$x + 3y + 5z - 4 + \lambda \cdot (x - y - 2z + 7) = 0.$$

$$(1 + \lambda) \cdot x + (3 - \lambda) \cdot y + (5 - 2\lambda) \cdot z + (-4 + 7\lambda) = 0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен $0 : 3 - \lambda = 0,\ \lambda = 3$. Подставив найденное значение в уравнение пучка, получим:

$$4x - z + 17 = 0.$$

Ответ:$4x - z + 17 = 0$.

Задача 7.5.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, -1, -5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0,\ 5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Решение.

В качестве нормального вектора $\vec{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n_1} = \{3, -2, 2\}$, $\vec{n_2} = \{5, -4, 3\}$ данных плоскостей.

$$\vec{N} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \{2, 1, -2\}.$$

Теперь используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(3, -1, -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}$. Получим

$$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0,\ 2x + y - 2z - 15 = 0.$$

Ответ:$2x + y - 2z - 15 = 0$.

Задача 7.6. Уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 & = & 0 \\ 5x + 4y - z & = & 0 \end{cases}$$

привести к каноническому виду.

Решение.

Исключив сначала y, затем z, получим $13x + 11z - 11 = 0$ и $17x + 11y - 22 = 0$. Отсюда получим

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{11(z-1)}{-13},\ \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Ответ:$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$.

Задача 7.7. Дана плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и вне ее точка $M(1, 1, 1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной плоскости.

Решение.

Нормальный вектор к плоскости $\vec{N} = \{1, 1, -2\}$ является направляющим вектором для искомой прямой.

Получим параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 1 - 2t \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, найдем $t = 1$.

Тогда $x_K = 2,\ y_K = 2,\ z_K = -1$.

Так как K — середина отрезка $[MN]$.

Получим,

$$\begin{cases} x_N & = & 2x_K - x_M \\ y_N & = & 2y_K - y_M \\ z_N & = & 2z_K - z_M \end{cases}$$

$$x_N = 3,\ y_N = 3,\ z_N = -3.$$

Ответ:$(3, 3, -3)$.

Задача 7.8. Дана прямая

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

и вне ее точка $M(1,1,1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной прямой.

Решение.

Уравнение плоскости, проектирующей точку M на данную прямую, имеет вид:

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0,\ 2x+3y-z-4=0.$$

Направляющий вектор данной прямой является нормальным вектором к этой плоскости.

Получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 3t \\ z &= -1-t \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, найдем $t=\frac{1}{14}$.

Найдем координаты проекции - точки K.

Тогда $x_K=\frac{8}{7},\ y_K=\frac{3}{14},\ z_K=\frac{-15}{14}$.

Так как K — середина отрезка $[MN]$.

Получим,

$$\begin{cases} x_N &= 2x_K-x_M \\ y_N &= 2y_K-y_M \\ z_N &= 2z_K-z_M \end{cases}$$

$$x_N=\frac{9}{7},\ y_N=\frac{-4}{7},\ z_N=\frac{-22}{7}.$$

Ответ:$(\frac{9}{7},\frac{-4}{7},\frac{-22}{7})$.

Аудиторное занятие.

7.1.Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,1,-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{N}=\{1,-2,3\}$.

7.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,4,-5)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{3,1,-1\}$ и $\vec{b}=\{1,-2,1\}$.

7.3. Определить, при каких значениях l и m следующие уравнения определяют параллельные плоскости $2x+ly+3z-5=0,\ mx-6y-6z+2=0$.

7.4. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1,-2,0)$ и от плоскости $3x-2y+6z-9=0$.

7.5.Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0,\ 2x-2y+z+5=0$. Вычислить его объем.

7.6.Найти точку Q, симметричную точке $P(1,3,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

7.7.Вычислить расстояние от точки $P(1,-1,-2)$ от прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

7.8.Найти проекцию точки $P(2,-1,3)$ на прямую

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= -7+5t \\ z &= 2+2t \end{cases}$$

7.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,-3)$ параллельно прямым

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

.

7.10.Найти проекцию точки $P(5,2,-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

Домашнее задание.

7.11.Точка $P=(2,-1,-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

7.12.Составить уравнение плоскости, проходящей через
$M_1(3,-1,2),\ M_2(4,-1,-1),\ M_3(2,0,2)$.

7.13. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстояние $d=4$.

7.14.Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}, \qquad 2x+3y+z-1=0.$$

7.15.Уравнение прямой

$$\begin{cases} x-2y+3z-4 &= 0 \\ 3x+2y-5z-4 &= 0 \end{cases}$$

привести к каноническому виду.

7.16.Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

8. Поверхности второго порядка

Задача 8.1.

Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны $\vec{a}=\{2,3,-4\}$, а направляющая дана уравнениями $x^2+y^2=9,\ z=1$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка цилиндра, проведем через нее образующую. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — точка пересечения этой образующей и направляющей. Тогда

$$\begin{cases} x_0 &= x-2t \\ y_0 &= y+3t \\ z_0 &= z+4t \end{cases}$$

Координаты (x_0,y_0,z_0) удовлетворяют уравнениям направляющей. Получим

$$\begin{cases} (x-2t)^2+(y+3t)^2 &= 9 \\ z-4t &= 1 \end{cases}$$

Выразим $t=\frac{z-1}{4}$ и подставим в первое уравнение.
Получим $(x-2\cdot\frac{z-1}{4})^2+(y+3\cdot\frac{z-1}{4})^2=9$.
Раскрыв все скобки и умножив обе части на 16, получим

$$16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz-26z+16x-24y-131=0.$$

Ответ: $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz-26z+16x-24y-131=0$.

Задача 8.2.

Составить уравнение конуса, вершина S которого находится в точке $(3,-1,-2)$, а направляющая дана уравнением $x^2+y^2-z^2=1,\ x-y+z=0$.

Решение.

Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка конуса, проведем прямую (MS). Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — точка пересечения этой прямой и направляющей.

$$(MS): \frac{x-3}{x_0-3}=\frac{y+1}{y_0+1}=\frac{z+2}{z_0+2},$$

$$t=\frac{x-3}{x_0-3}=\frac{y+1}{y_0+1}=\frac{z+2}{z_0+2}.$$

Выразим

$$(*) \qquad x_0=\frac{x+3t-3}{t}, \quad y_0=\frac{y-t+1}{t}, \quad z_0=\frac{z-2t+2}{t}.$$

Подставив в $x-y+z=0$ получим

$$t=\frac{2-x+y-z}{2}.$$

Теперь подставим это выражение в $(*)$. Затем полученные выражения для x_0,y_0,z_0 подставим в $x^2+y^2-z^2=1$.

После преобразований получим

$$3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-26z-4x+4y-4z+4=0.$$

Ответ: $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-26z-4x+4y-4z+4=0$.

Задача 8.3. Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим и составить их уравнения.

Решение.

Выразим $z: z=2x-12y-z+16$. Подставим в уравнение поверхности.

$$x^2-4x+(-4y^2+24y-32)=0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное уравнение относительно x при фиксированном y.

$$D=16(y-3)^2.$$

Значения x:

$$x=-2y+8, \quad x=-4+2y.$$

Прямолинейные образующие:

$$L_1:\begin{cases} 2x-12y-z+16 &= 0 \\ x+2y-8 &= 0 \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} 2x-12y-z+16 &= 0 \\ x-2y+4 &= 0 \end{cases}$$

Ответ:$L_1:\begin{cases} 2x-12y-z+16 &= 0 \\ x+2y-8 &= 0 \end{cases}$ $L_2:\begin{cases} 2x-12y-z+16 &= 0 \\ x-2y+4 &= 0 \end{cases}$

Задача 8.4.

Составить уравнение конуса с вершиной $S(5,0,0)$, образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Решение.

Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка конуса, тогда уравнение образующей (MS) :

$$\begin{cases} x &= 5+mt \\ y &= nt \\ z &= pt \end{cases}$$

Если точка M лежит на сфере, то так как это точка касания, следующее уравнение относительно t имеет единственное решение.

$$(5+mt)^2+n^2t^2+p^2t^2=9,$$
$$(m^2+n^2+p^2)t^2+10mt+16=0.$$

$$D=36m^2-64n^2-64p^2=0, \quad 9m^2-16n^2-16p^2=0.$$
$$m=\frac{x-5}{t}, \quad n=\frac{y}{t}, \quad p=\frac{z}{t}.$$
$$9\cdot\frac{(x-5)^2}{t^2}-16\cdot\frac{y^2}{t^2}-16\cdot\frac{z^2}{t^2}=0.$$

$$9x^2-16y^2-16z^2-6xy-90x+225=0.$$

Ответ:$9x^2-16y^2-16z^2-6xy-90x+225=0$.

Задача 8.5.

Написать уравнение сферы, проходящей через четыре точки
$M_1(1,1,0),\ M_2(7,-11,0),\ M_3(10,1,9),\ M_4(-2,-11,9)$.

Решение.

Уравнение сферы ищем в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Подставляя координаты точек в это уравнение, получим систему четырех уравнений

$$(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2=r^2,$$

$$(7-a)^2+(-11-b)^2+(0-c)^2=r^2,$$

$$(10-a)^2+(1-b)^2+(9-c)^2=r^2,$$

$$(-2-a)^2+(-11-b)^2+(9-c)^2=r^2.$$

Решая эту систему, находим

$$a=4,\ b=-5,\ c=6,\ r=9.$$

Ответ: $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$.

Задача 8.6.

Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой задана уравнениями $x^2+y^2=25,\ z=0$, а образующая составляет равные углы с осями координат.

Решение.

Уравнение образующей:

$$\begin{cases} x &= x_0+lt \\ y &= y_0+lt \\ z &= z_0+lt \end{cases}$$

Здесь (x,y,z) - координаты любой точки образующей, (x_0,y_0,z_0) - координаты точки направляющей, $l=m=n$, так как образующая составляет равные углы с осями координат.

Выразим (x_0,y_0,z_0) и подставим их в уравнения направляющей.

$$\begin{cases} x_0 &= x-lt \\ y_0 &= y-lt \\ z_0 &= z-lt \end{cases}$$

Так как $z_0=0$, то $z=lt$.

Получим $x_0=x-z,\ y_0=y-z$.

Уравнение искомой поверхности:

$$(x-z)^2+(y-z)^2=25.$$

Ответ: $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-25$.

Задача 8.7.

Уравнение поверхности

$$4x^2-9y^2-8x-36y-72z+184=0$$

привести к каноническому виду. Определить тип поверхности.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$4(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)-72z-4+36+184=0$$

$$4(x-1)^2-9(y+2)^2=72(z-3)$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=2(z-3).$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} X &= x-1 \\ Y &= y+2 \\ Z &= z-3 \end{cases}$$

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=2Z.$$

Ответ: гиперболический параболоид $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=2Z$.

Аудиторное занятие.

8.1.Составить уравнение сферы с центром $C(0,0,0)$ радиуса 9.

8.2.Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу, найти его полуоси и вершины.

8.3.Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе, найти ее параметр и вершину.

8.4. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1, \qquad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}.$$

8.5. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ y=0$ вокруг оси Oz.

8.6. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(3,-1,-2)$, а направляющая дана уравнением $x^2+y^2-z^2=1,\ x-y+z=0$.

8.7. Ось Oz является осью круглого конуса с вершиной в начале координат, точка $M(3,-4,7)$ лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

8.8.Составить уравнение конуса с вершиной $S(5,0,0)$, образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

8.9.Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны $\vec{a}=\{2,-3,4\}$, а направляющая дана уравнениями $x^2+y^2=9,\ z=1$.

8.10. Точка $M(-2,0,1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$. Определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через точку M.

Домашнее задание.

8.11.Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе, найти ее полуоси и вершины.

8.12. Доказать, что эллипсоид $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x-3y+12z-54=0$ и найти ее координаты.

8.13.Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \qquad \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

8.14.Составить уравнение конуса с вершиной $S(3,0,-1)$, образующие которого касаются эллипсоида $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$.

8.15.Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, параллельных плоскости $6x+4y+3z-17=0$.

8.16. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $x^2-y^2=z,\ \ x+y+z=0,$ а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

9. Контрольная работа

Вариант 1.

1) Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x+5y-4=0$ и проходящей через точку $M(3,2)$.

2) Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $C(1,1)$ и отсекает от координатного угла треугольник площадью 2.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) При каком l следующие плоскости перпендикулярны:

$\alpha:\ 3x+ly+3z-5=0,\ \beta:\ x+3y+2z-2=0.$

Вариант 2.

1) Найти угол между прямыми

$L_1:\ 5x-y+7=0;\ L_2:\ 3x+2y=0.$

2) Составить уравнение медианы в треугольнике ABC.

$A(3,2);\ B(5,-2),\ C(1,0).$

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Составить уравнение плоскости, которая проходит через Oz и точку $M(3,-4,7)$.

Вариант 3.

1) Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x-4y-10=0$ и отстоящих от нее на расстояние $d=3$.

2) Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(2,-5),\ (3,2)$.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,5,1)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

Вариант 4.

1) Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми $3x+4y-1=0,\quad 5x+12y-2=0$.

2) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $P(2,7)$, на расстоянии 5 от точки $Q(1,2)$.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$.

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,1,7),\ M_2(3,5,1)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{1,0,3\}$.

Вариант 5.

1) Через точку $M(3,5)$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+3y+8=0$.

2) Найти площадь квадрата, одна из вершин которого $M(2,5)$, а одна из сторон лежит на прямой $x+8y+1=0$.

3) Исследовать кривую $y^2=-8x$.

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,-1)$ перпендикулярно к прямой

$$\begin{cases} x-2y+z-3 &= 0 \\ x+y-z+2 &= 0 \end{cases}$$

Вариант 6.

1) Найти проекцию точки $P(-8,12)$ на прямую, проходящую через $M_1(2,-3)$ и $M_2(-5,1)$.

2) Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,10$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к данной прямой.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

4) При каких A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой

$$\begin{cases} x &= 3+2t \\ y &= 5-3t \\ z &= -2-2t \end{cases}$$

Вариант 7.

1) Через точки $M_1(-1,2)$ и $M_2(2,3)$ проведена прямая. Найти точку Q, симметричную $P(0,3)$ относительно этой прямой.

2) Составить уравнение медианы (M_1K) в треугольнике с вершинами
$M_1(3,2),\ M_2(5,-2),\ M_3(1,0)$.

3) Исследовать кривую $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{78}=1$.

4)Две грани куба лежат на плоскостях $4x-4y+z-1=0,\ 4x-4y+z+9=0$. Вычислить его объем.

Вариант 8.

1) Составить уравнение высоты (M_2H) в треугольнике с вершинами $M_1(3,2),\ M_2(1,0),\ M_3(5,-2)$.

2) Составить уравнение прямой, если точка $P(3,5)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.

4) Через точку $M(5,3,8)$ провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2+3t \\ y & = & 3+4t \\ z & = & 1+11t \end{array} \right.$$

Вариант 9.

1)Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,5)$, параллельно прямой $7x+8y+11=0$.

2)Даны вершины треугольника $M_1(3,2),\ M_2(1,0),\ M_3(5,-2)$. Составить уравнения медиан.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \qquad x+2y-2z+6=0.$$

Вариант 10.

1) Составить уравнение прямой, которая проходит через $P(12,6$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью 150.

2)Даны вершины треугольника $M(1,-2),\ P(0,3),\ S(1,1)$. Составить уравнения высот.

3) Исследовать кривую $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Составить уравнение грани (ABC) в тетраэдре $A(0,0,2),\ B(3,0,5),\ C(1,1,0),\ D(4,1,2)$.

Рекомендуемая литература.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 223с.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 309с.

3. КлетеникД.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1998. 122с.

ОТВЕТЫ.

Занятие 1. 1.1. $|\vec{a}|=7$ **1.2.**$\vec{AB}=\{-4,3,-1\}$ **1.4.**$\vec{AM}=\{3,4,-3\},\ \vec{BN}=\{0,-5,3\}$ **1.5.**$\{\frac{6}{7},\frac{-2}{7},\frac{-3}{7}\}$ **1.6.**$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ **1.7.**$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c};\ \vec{BN}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c};\ \vec{CP}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ **1.8.**$\vec{AD}=11\vec{AB}-7\vec{AC};\ \vec{BD}=10\vec{AB}-7\vec{AC};\ \vec{CD}=11\vec{AB}-8\vec{AC};\ \vec{AD}+\vec{BD}+\vec{CD}=32\vec{AB}-22\vec{AC}$. **1.9.** $(2,-1),\ (3,1)$ **1.10.**$(3,-1)$ **1.11.**$\{\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{-12}{13}\}$ **1.12.**$6;14$ **1.13.**$\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ **1.14.**$\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$ **1.15.**$\vec{AB}=\{2,-4\};\ \vec{BC}=\{-1,1\};\ \vec{AC}=\{-2,2\}$ **1.16.**$(5,-3),\ (1,-5)$

Занятие 2. 2.1. $-6; 9; 16; 13; -61; 37; 73$ **2.2.**$22; 6; 7; -200; 129; 41$ **2.3.**$cos\phi = \frac{5}{21}$ **2.4.**$\frac{\pi}{4}$ **2.5.**$\{1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$ **2.6.**$\{-4, -6, 12\}$ **2.7.**$\{-3, 3, 3\}$ **2.8.**$\{2, 3, -2\}$ **2.9.**$\frac{-47}{7}$ **2.10.**$arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$

2.11.$-62; 162; 373$ **2.12.**$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = \frac{-3}{2}$ **2.13.**$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ **2.14.**$\alpha = -6$ **2.15.**$arccos\frac{-4}{9}$ **2.16.**$\{-24, 32, 30\}$

Занятие 3. 3.1. 24 **3.2.**14 **3.3.**5 **3.4.**$sin\phi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$ **3.5.**$\{-6, -24, 8\}$ **3.6.**$\{5, 1, 7\}$

3.7.$\{10, 2, 14\}$ **3.8.**$\{20, 4, 28\}$ **3.9.**$|\vec{a} \times \vec{b}| = 15$ **3.11.**$|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$ **3.12.**± 30 **3.13.**$\{7, 5, 1\}$ **3.14.**$\{6, -4, -6\}, \ \{-12, 8, 12\}$ **3.15.**$\{45, 24, 0\}$ **3.16.**60

Занятие 4. 4.1.Правая. **4.2.**$(0, 8, 0), \ (0, -7, 0)$. **4.3.**11. **4.4.**3. **4.6.**24. **4.7.**-7. **4.8.**Да. **4.11.**Компланарны. **4.12.**Левая **4.13.**± 27. **4.15.**Да. **4.16.**Нет.

Занятие 5. 5.1.$2x + 3y - 7 = 0, \ 3x - 2y - 4 = 0$. **5.2.**$(11, -11)$. **5.3.**$2x + y - 8 = 0, \ x + 2y - 1 = 0, \ x - y - 1 = 0$. **5.4.**$\frac{\pi}{4}$. **5.5.**$5$. **5.6.**$4x - 4y + 3 = 0, \ 2x + 2y - 7 = 0$. **5.7.**$2, 5$. **5.8.**$3x - y + 9 = 0, \ 3x + y + 9 = 0$. **5.9.**$29x - 2y + 33 = 0$. **5.10.**$7x - 2y - 12, 5x + y - 28, \ 2x - 3y - 18 = 0$. **5.11.**$3x + 2y = 0, \ 2x - 3y - 13 = 0$. **5.12.**$(-2, -1)$. **5.13.**$2x + 3y - 13 = 0$. **5.14.**$4x + 1 = 0, \ 8y + 13 = 0$. **5.15.**$3$. **5.16.**$7x + 24y - 134 = 0, \ x - 2 = 0$.

Занятие 6. 6.9.$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1, \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ **6.10.**$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1, \ \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1, \ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Занятие 7. 7.1.$x - 2y + 3z + 3 = 0$. **7.2.**$x + 4y + 7z + 16 = 0$. **7.3.**$l = 3, \ m = -4$. **7.4.**$(0, 0, -2), \ (0, 0, \frac{-82}{13})$. **7.5.**$8$. **7.6.**$(-5, 1, 0)$. **7.7.**$7$. **7.8.**$(3, -2, 4)$. **7.9.**$9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **7.10.**$(1, 4, -7)$. **7.11.**$2x - y - z - 6 = 0$. **7.12.**$3x + 3y + z - 8 = 0$. **7.13.**$(0, 7, 0), \ (0, -5, 0)$. **7.14.**$(2, -3, 6)$. **7.15.**$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. **7.16.**$\frac{\pi}{3}$.

Занятие 8. 8.1.$x^2 + y^2 + z^2 = 81$ **8.2.**$3, \sqrt{3}, (2, 3, 0), (2, -3, 0), (2, 0, -\sqrt{3}), (2, 0, \sqrt{3})$ **8.3.**$15, (0, -6, -\frac{3}{2})$ **8.4.**$(3, 4, -2), (6, -2, 2)$ **8.5.**$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **8.6.**$3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$. **8.7.**$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{49} = 1$ **8.8.**$9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 90x + 225 = 0$. **8.9.**$16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$. **8.10.**$arccos \ \frac{1}{17}$. **8.11.**$4, 3, (4, 0, -1), (-4, 0, -1)$ **8.12.**$(6, -2, 2)$ **8.13.**$(4, -3, 2)$ **8.14.**$4x^2 - 15y^2 - 6z^2 - 12xz - 36x + 24z + 66 = 0$. **8.15.**$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{-2}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$. **8.16.**$x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$.

Учебное издание

Воскресенская Галина Валентиновна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

Публикуется в авторской редакции
Оформление выходных данных *Т.И.Кузнецовой*
Компьютерная верстка, макет *Г.В.Воскресенской*

Подписано в печать 20.10.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ N . Арт.-1/2016.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"
(Самарский университет)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34

Изд-во Самарского университета,
443086, Самара, Московское шоссе, 34