МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)»

А.А. Дегтярев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тесты для самоконтроля знаний студентов

Электронные тесты

САМАРА

2011

Автор:	ДЕГТЯРЕВ Александр Александрович

Настоящие тесты предназначены для самостоятельной работы студентов, изучающих курс «Численные методы математической физики».

Материалы ориентированы на студентов, обучающихся по направлению 010400.62 – «Прикладная математика и информатика».

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 1

1. Метод решения уравнений математической физики, использующий дискретизацию всех независимых переменных:
а) метод Фурье разделения переменных;
б) метод моментов;
в) метод конечных разностей;
г) метод прямых.

2. Общее решение сеточного уравнения $6u_{i+1} - 5u_i + u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

а) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ б) $c_1 2^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ в) $c_1\left(\frac{1}{2}\right)^i + c_2 i\left(\frac{1}{3}\right)^i$ г) $c_1 20^i + c_2(-1)^i$

3. Пусть функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t. Тогда погрешность аппроксимации дифференциального оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$

разностным $L_h u_h = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} + \beta u_i^k$, $i = \overline{0, I-1}$, $k = \overline{0, K-1}$

на сетке $x_i = ih$, $i = \overline{0, I}$, $h = \frac{l}{I}$;

$t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \frac{T}{K}$

характеризуется величиной:

а) $\mathrm{O}(h^2, \tau)$ б) $\mathrm{O}(h, \tau)$ в) $\mathrm{O}(h, \tau^2)$ г) $\mathrm{O}(h)$ д) $\mathrm{O}(\tau)$ е) $\mathrm{O}(h^2, \tau^2)$

4. Построение консервативных разностных схем для решения краевых задач математической физики осуществляется с помощью
а) метода замены производных разностными отношениями
б) метода неопределенных коэффициентов
в) интегро-интерполяционного метода
г) метода моментов

5. Разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h_x} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad k = \overline{0, K-1} \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$ является

а) безусловно устойчивой

б) устойчивой при условии $\frac{h_t}{h_x} \le \frac{1}{2}$

в) устойчивой при условии $a^2 \frac{h_t}{h_x} \le 1$

г) неустойчивой.

6. Предположим, что для численного решения краевой задачи математической физики $Lu = f$ построена разностная схема $L_h u_h = f_h$. Затем, на последовательности сгущающихся сеток с помощью этой схемы получена последовательность сеточных решений $\{u_h\}$.

Говорят, что разностная схема $L_h u_h = f_h$ сходится, если для последовательности $\{u_h\}$ выполняется условие:

а) $\lim\limits_{h\to 0}\left\| L_h u_h - [Lu]_h \right\|_{F_h} = 0$

в) $\lim\limits_{h\to 0}\left\| u_h - [u]_h \right\|_{U_h} = 0$

б) $\lim\limits_{h\to 0}\left\| L_h [u]_h - L_h u_h \right\|_{F_h} = 0$

г) $\lim\limits_{h\to 0}\left\| u_h \right\|_{U_h} = \lim\limits_{h\to 0}\left\| [u]_h \right\|_{U_h}$

7. Для получения экономичной разностной схемы решения 2-й краевой задачи теплопроводности в прямоугольнике следует применить:
а) метод установления;
б) интегро-интерполяционный метод;
в) метод расщепления;
г) метод конечных рядов Фурье.

8. Пусть $\overline{D}_h$ - сеточный аналог двумерной области $\overline{D}$, заданной на плоскости xOy. Пусть Γ_h - сеточная граница, а D_h - множество внутренних узлов сеточной области $\overline{D}_h$. Сетку предполагаем равномерной как по x, так и по y.

Если сеточная функция $v_{i,j}$ во всех внутренних узлах области $\overline{D}_h$ удовлетворяет условию

$$\Lambda_x v_{i,j} + \Lambda_y v_{i,j} \ge 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in D_h,$$

где $\Lambda_x v_{i,j} = \dfrac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2}$; $\qquad \Lambda_y v_{i,j} = \dfrac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_y^2}$,

то она …
а) достигает своего наибольшего значения хотя бы в одной точке границы Γ_h;
б) достигает своего наибольшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$;
в) достигает своего наименьшего значения хотя бы в одной точке границы Γ_h;
г) достигает своего наименьшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$.

9. Применение метода Ритца для решения задачи Дирихле относительно уравнения Пуассона приводит к необходимости решения …
а) системы линейных алгебраических уравнений;
б) интегрального уравнения;
в) системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
г) интегро-дифференциального уравнения.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 2

1. Метод решения уравнений математической физики, требующий применения регулярной сетки:
   а) метод Фурье разделения переменных;
   б) метод моментов;
   в) метод конечных разностей;
   г) метод Ритца.

2. Общее решение сеточного уравнения $2u_{i+1} - 5u_i + 2u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ б) $c_1 2^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ в) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2 i\left(\frac{1}{3}\right)^i$ г) $c_1 2^i + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^i$

3. Пусть функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$. Тогда погрешность аппроксимации дифференциального оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$

   разностным $L_h u_h = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}$, $i = \overline{0, I-1}$, $k = \overline{0, K-1}$

   на сетке $x_i = ih$, $i = \overline{0, I}$, $h = \frac{l}{I}$;

   $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \frac{T}{K}$

   характеризуется величиной:

   а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(h, \tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Предположим, что для решения краевой задачи математической физики выбран метод сеток, причём предпочтение отдано нерегулярным сеткам. Тогда для построения разностной схемы следует применить:
   а) метод замены производных разностными отношениями;
   б) вариационно-разностный метод;
   в) метод прямых;
   г) метод Фурье разделения переменных.

5. Разностная схема

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a^2 \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h_x} = 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \quad k = \overline{1, K} \end{cases}$$

   является

   а) безусловно устойчивой
   в) устойчивой при условии $a^2 \frac{h_t}{h_x} \le 1$
   б) устойчивой при условии $\frac{h_t}{h_x} \le \frac{1}{2}$
   г) неустойчивой

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Говорят, что последовательность $\{u_h\}$ сходится к функции $u(x) \in U$, если

а) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h - [u]_h\right\|_{U_h} = 0$

б) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h\right\|_{U_h} = \left\|u\right\|_U$

в) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h\right\|_{U_h}$

г) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \left\|u_h\right\|_{U_h}$

7. Метод расщепления позволяет:
   а) заменить классическую постановку краевой задачи математической физики вариационной;
   б) представить решение краевой задачи математической физики в виде конечного ряда Фурье;
   в) исследовать сходимость минимизирующей последовательности, полученной методом Ритца;
   г) заменить многомерную краевую задачу математической физики последовательностью задач меньшей размерности.

8. Принцип максимума применяется для … разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле относительно уравнения Пуассона.
   а) построения;
   б) исследования корректности;
   в) оценки вычислительной сложности;
   г) повышения порядка точности.

9. Рассмотрим краевую задачу математической физики в операторной форме

$$Lu = f,\quad u \in U_\Gamma \subset U,\quad f \in F,$$ где

U - полное нормированное функциональное пространство;

U_Γ - множество функций u, которые удовлетворяют краевым условиям, и для которых Lu имеет смысл;

L - дифференциальный оператор;

F - гильбертово функциональное пространство, содержащее счётный базис $f_i,\quad i = 0,1,2,\ldots$.

Возьмём некоторую функцию $v \in U_\Gamma$, заданную с точностью до I неизвестных параметров, и запишем невязку $\delta f = Lv - f$.

Метод приближенного решения краевой задачи, основанный на решении системы уравнений вида

$$(\delta f, f_i) = 0,\quad i = 1,2,\ldots,I,$$

где $(\cdot\ ,\ \cdot)$ - скалярное произведение, относится к классу …

а) вариационных;
б) конечно-разностных;
в) вероятностных;
г) проекционных.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 3

1. Проекционным методом решения уравнений математической физики является:
а) метод вычислительного эксперимента;
б) метод Ритца;
в) метод конечных разностей;
г) метод моментов.

2. Общее решение сеточного уравнения $9u_{i+1} - 6u_i + u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

а) $c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$ б) $c_1 2^i + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$ в) $c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2 i \left(\frac{1}{3}\right)^i$ г) $c_1 5^i + c_2 (-1)^i$

3. Погрешность аппроксимации задачи Коши
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = \exp\left(-x^2/a^2\right) \end{cases}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \le t \le T$$
разностной схемой $\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + 2\dfrac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} \\ u_i^0 = \exp\left(-x_i^2/a^2\right) \end{cases}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = \overline{0, K-1}$

на сетке $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
$t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \dfrac{T}{K}$

характеризуется величиной:

а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(h, \tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Если решение краевой задачи математической физики имеет сильные или слабые разрывы, то для построения аппроксимирующей разностной схемы следует использовать:
а) метод замены производных разностными отношениями;
б) метод неопределенных коэффициентов;
в) интегро-интерполяционный метод;
г) метод Рунге.

5. Разностная схема
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} - b u_i^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \quad u_I^k = \beta^k, \quad k = \overline{1, K} \end{cases}$$
является:

а) безусловно устойчивой

б) устойчивой при условии $a^2 \dfrac{h_t}{h_x^2} \le \dfrac{1}{2}$

в) устойчивой при условии $a^2 \dfrac{h_t}{h_x^2} - b \le \dfrac{1}{2}$

г) неустойчивой

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Говорят, что нормы семейства пространств сеточных функций $\{U_h\}$ согласованы с нормой в пространстве U, если для любого $u \in U$ справедливо равенство:

а) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h - [u]_h\right\|_{U_h} = 0$

б) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h\right\|_{U_h} = \left\|u\right\|_U$

в) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h\right\|_{U_h}$

г) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \left\|u\right\|_U$

7. Предположим, что для краевой задачи с нелинейным уравнением теплопроводности построена аппроксимирующая разностная схема. Тогда можно утверждать, что для сходимости сеточного решения к решению краевой задачи …

а) недостаточно того, чтобы эта схема была устойчивой;
б) необходимо, чтобы разностная схема была устойчивой;
в) достаточно, чтобы разностная схема была устойчивой;
г) необходимо и достаточно, чтобы разностная схема была устойчивой.

8. Дана разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Lambda u_{i,j} = \varphi_{i,j}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}; \\ u_{0,j} = \alpha_j, \quad u_{I,j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, J-1}; \\ u_{i,0} = \gamma_i, \quad u_{i,J} = \delta_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \end{cases}$$

где $\Lambda u_{i,j} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{cases} v_{i,j}^{k+1} = (E + \tau\Lambda) v_{i,j}^k - \tau\varphi_{i,j}^k, \quad k = 0,1,2,\ldots \\ v_{i,j}^0 = \xi_{i,j} \end{cases},$$

где $v_{i,j}^k$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $u_{i,j}$.

Предложенный итерационный процесс сходится к решению разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, если выполняется условие:

а) $0 < \tau < 1$;
б) $\max\limits_{n=1,\ldots,N} |\lambda_n| < 1$, где λ_n, $n = \overline{1, N}$ - собственные числа оператора Λ;
в) $\min\limits_{n=1,\ldots,N} |1 + \tau\lambda_n| < 1$, где λ_n, $n = \overline{1, N}$ - собственные числа оператора Λ;
г) $\max\limits_{n=1,\ldots,N} |1 + \tau\lambda_n| < 1$, где λ_n, $n = \overline{1, N}$ - собственные числа оператора Λ.

9. Метод Галеркина представляет собой частный случай …

а) метода наименьших квадратов;
б) метода моментов;
в) метода Ритца;
г) метода Монте-Карло.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 4

1. К численным методам решения уравнений математической физики относится :
   а) метод Фурье разделения переменных;
   б) метод моментов;
   в) метод конечных разностей;
   г) операционный метод.

2. Общее решение сеточного уравнения $u_{i+1} - 4u_i - 5u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ б) $c_1 2^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ в) $c_1(-1)^i + c_2 i(-1)^i$ г) $c_1 5^i + c_2(-1)^i$

3. Погрешность аппроксимации задачи Коши
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + e^{-x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ 0 \le t \le T \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$
разностной схемой
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \dfrac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h} + e^{-x_i^2}, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\quad k = \overline{0, K-1} \\ u_i^0 = 0 \end{cases}$$
на сетке $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
$t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \dfrac{T}{K}$
характеризуется величиной:
   а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(h, \tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Метод замены производных разностными отношениями используется для построения:
   а) консервативных разностных схем;
   б) разностных схем на регулярных сетках;
   в) разностных схем на нерегулярных сетках;
   г) вариационно-разностных схем.

5. Разностная схема
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} - a^2 \dfrac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$
является

   а) безусловно устойчивой
   б) устойчивой при условии $\dfrac{h_t}{h_x} \le \dfrac{1}{2}$
   в) устойчивой при условии $a^2 \dfrac{h_t}{h_x} \le 1$
   г) неустойчивой.

6. Предположим, что для численного решения краевой задачи математической физики $Lu = f$ построена линейная разностная схема $L_h u_h = f_h$. Затем, на последовательности сгущающихся сеток с помощью этой схемы получена последовательность сеточных решений $\{u_h\}$.

   Для сходимости последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ к решению u исходной краевой задачи достаточно, чтобы разностная схема …:

   а) аппроксимировала краевую задачу математической физики и удовлетворяла условию необходимого признака устойчивости Неймана;

б) аппроксимировала краевую задачу математической физики и была устойчивой;

в) была безусловно устойчивой;

г) аппроксимировала краевую задачу математической физики со вторыми порядками относительно шагов дискретизации независимых переменных.

7. Метод «предиктор-корректор» целесообразно применить для решения …

а) уравнения Лапласа в прямоугольнике;

б) 1-й краевой задачи для линейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами;

в) нелинейной краевой задачи теплопроводности;

г) задачи Дирихле относительно уравнения Пуассона.

8. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x,y), \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y; \\ u(x,0) = u(x,l_y) = 0, \quad 0 \le x \le l_x; \\ u(0,y) = u(l_x,y) = 0, \quad 0 \le y \le l_y. \end{cases}$$

Метод, согласно которому исходная задача заменяется вспомогательной начально-краевой задачей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \varphi(x,y), \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < t < +\infty; \\ v(x,y,0) = \xi(x,y), \quad 0 \le x \le l_x, \quad 0 \le y \le l_y; \\ v(x,0,t) = v(x,l_y,t) = 0, \quad 0 \le x \le l_x, \quad 0 < t < +\infty; \\ v(0,y,t) = v(l_x,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le l_y, \quad 0 < t < +\infty, \end{cases}$$

решение которой при больших значениях t рассматривается как приближение к решению исходной задачи, называется методом …

а) «предиктор-корректор»;

б) установления;

в) расщепления;

г) Галеркина.

9. Рассмотрим краевую задачу математической физики в операторной форме

$$Lu = f, \quad u \in V_\Gamma \subseteq V, \quad f \in F,$$

где V и F - полные нормированные функциональные пространства;

L - дифференциальный оператор с областью определения V_Γ (V_Γ - множество функций, удовлетворяющих граничным условиям, для которых Lu имеет смысл).

Предположим, что для этой краевой задачи осуществлена вариационная постановка, связанная с минимизацией функционала $J(u)$, определённого на множестве V.

Предположим, что множество V_Γ содержит счетный базис, состоящий из функций v_i, $i = 1,2,\dots$.

Обозначим через V_Γ^I - линейную оболочку первых I базисных функций v_i.

В соответствии с методом Ритца минимизация функционала $J(u)$, осуществляется на множестве …

а) V_Γ и приближенное решение задачи ищется в виде $u = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i v_i$, где a_i - неизвестные коэффициенты;

б) V_Γ^I и приближенное решение задачи ищется в виде $u^{(I)} = \sum\limits_{i=0}^{I} a_i v_i$, где a_i - неизвестные коэффициенты;

в) V и приближенное решение задачи ищется в виде $u^{(I)} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i v_i$, где a_i - неизвестные коэффициенты;

г) V_{Γ}^{I} и приближенное решение задачи ищется в виде $u^{(I)} = \sum_{i=0}^{I} v_i$.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 5

1. Метод решения уравнений математической физики, использующий дискретизацию части независимых переменных:
а) метод Фурье разделения переменных;
б) метод моментов;
в) метод конечных разностей;
г) метод прямых.

2. Общее решение сеточного уравнения $u_{i+1} - 4u_i + 4u_{i-1} = 0$, $i = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ имеет вид:

а) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ б) $c_1 2^i + c_2 i 2^i$ в) $c_1 2^i + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^i$ г) $c_1 2^i + c_2 i$

3. Пусть функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t. Тогда погрешность аппроксимации дифференциального оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$

разностным $L_h u_h = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a^2 \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{h}$, $i = \overline{0, I-1}$, $k = \overline{0, K-1}$

на сетке $x_i = ih$, $i = \overline{0, I}$, $h = \frac{l}{I}$;

$t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \frac{T}{K}$

характеризуется величиной:

а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(\tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(h, \tau)$) е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Если для решения краевой задачи математической физики построена сходящаяся разностная схема, то для повышения точности сеточного решения, вычисляемого с помощью этой схемы, можно использовать:
а) метода наименьших квадратов;
б) метод Рунге;
в) метод мажоранты;
г) метода моментов.

5. Если для некоторой двухслойной разностной задачи Коши с линейным постоянным оператором перехода выполняется условие признака Неймана, то эта разностная схема:
а) устойчива;
б) сходится;
в) может быть устойчивой;
г) неустойчива.

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Для того, чтобы всякая сходящаяся последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ имела единственный предел $u(x)\in U$ необходимо и достаточно, чтобы …

а) выполнялось условие $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_h-[u]_h\right\|_{U_h}=0$;

б) нормы семейства пространств $\{U_h\}$ были невырожденными;

в) выполнялось условие $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h}=\|u\|_U$;

г) нормы семейства пространств $\{U_h\}$ были согласованными с нормой в пространстве U.

7. Предположим, что для краевой задачи с волновым уравнением построена линейная аппроксимирующая разностная схема. Тогда для сходимости сеточного решения к решению краевой задачи …
а) достаточно, чтобы разностная схема была устойчивой;
б) недостаточно того, чтобы эта схема была устойчивой;
в) необходимо, чтобы разностная схема была устойчивой;
г) необходимо и достаточно, чтобы разностная схема была устойчивой.

8. Пусть $\overline{D}_h$ - сеточный аналог двумерной области $\overline{D}$, заданной на плоскости xOy. Пусть Γ_h - сеточная граница, а D_h - множество внутренних узлов сеточной области $\overline{D}_h$. Сетку предполагаем равномерной как по x, так и по y.

Если сеточная функция $v_{i,j}$ во всех внутренних узлах области $\overline{D}_h$ удовлетворяет условию

$$\Lambda_x v_{i,j}+\Lambda_y v_{i,j}\le 0 \quad \forall\left(x_i,y_j\right)\in D_h,$$

где $\Lambda_x v_{i,j}=\dfrac{v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j}}{h_x^2}$; $\qquad \Lambda_y v_{i,j}=\dfrac{v_{i,j+1}-2v_{i,j}+v_{i,j-1}}{h_y^2}$,

то она …

а) достигает своего наибольшего значения хотя бы в одной точке границы Γ_h;

б) достигает своего наибольшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$;

в) достигает своего наименьшего значения хотя бы в одной точке границы Γ_h;

г) достигает своего наименьшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$.

9. Метод моментов относится к классу … методов.
а) вариационных;
б) конечно-разностных;
в) проекционных;
г) вероятностных.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 6

1. Метод решения уравнений математической физики, основанный на минимизации функционала:
   а) метод Фурье разделения переменных;
   б) метод прямых;
   в) метод конечных разностей;
   г) метод Ритца.

2. Общее решение сеточного уравнения $u_{i+1} + 20u_i - 21u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1 + c_2(-21)^i$ б) $c_1 21^i + c_2(-1)^i$ в) $c_1(-21)^i + c_2 i(-21)^i$ г) $c_1 5^i + c_2(-1)^i$

3. Погрешность аппроксимации задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

разностной схемой

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + \sin \pi x_i \cdot \sin \pi y_j = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}; \\ u_{i,0} = u_{i,J} = 0, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_{0,j} = u_{I,j} = 0, \quad j = \overline{0, J} \end{cases},$$

на сетке

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = 1/I; \\ y_j &= jh_y, \quad j = \overline{0, J}, \quad h_y = 1/J \end{aligned},$$

характеризуется величиной:

   а) $O(h_x^2, h_y)$ б) $O(h_x, h_y)$ в) $O(h_x, h_y^2)$ г) $O(h_x)$ д) $O(h_y)$ е) $O(h_x^2, h_y^2)$

4. Метод построения аппроксимирующей разностной схемы, который требует предварительного задания этой схемы с точностью до конечного набора параметров:
   а) метод замены производных разностными отношениями;
   б) метод неопределенных коэффициентов;
   в) интегро-интерполяционный метод;
   г) метод Рунге.

5. Разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, \ i = \overline{1, I-1}, \ k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \ i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \ u_I^k = \beta^k, \ k = \overline{1, K} \end{cases}$$

является:

   а) безусловно устойчивой в) устойчивой при условии $a^2 \dfrac{h_t}{h_x^2} \le \dfrac{1}{2}$

б) устойчивой при условии $a^2 \frac{h_t}{h_x^2} \le 1$ г) неустойчивой

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$.

Для того чтобы нормы семейства пространств $\{U_h\}$ были невырождены достаточно, чтобы …

а) для любой функции $u \in U$ выполнялось равенство $\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \|u\|_U$;

б) нормы этого семейства пространств $\{U_h\}$ были ограниченными относительно нормы пространства U;

в) существовала такая функция $u \in U$, для которой справедливо равенство $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \|u\|_U$;

г) нормы этого семейства пространств были согласованными с нормой пространства U.

7. Метод покоординатного расщепления применяется для решения …
а) уравнения Лапласа в плоской области;
б) уравнения колебаний тонкой струны с жестко закреплёнными концами;
в) задачи Дирихле для уравнения Пуассона;
г) уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

8. Предположим, что для численного решения краевой задачи математической физики с уравнением эллиптического типа построена разностная схема. На этапе теоретического исследования разностной схемы была применена вспомогательная функция-мажоранта. С помощью функции-мажоранты проводят исследование …
а) аппроксимации;
б) вычислительной трудоемкости;
в) устойчивости;
г) разрешимости.

9. Рассмотрим краевую задачу математической физики в операторной форме

$$Lu = f, \quad u \in V_\Gamma \subseteq V, \quad f \in V \text{, где}$$

V - вещественное гильбертово функциональное пространство;

L - линейный, положительно определённый, самосопряжённый дифференциальный оператор с областью определения V_Γ (V_Γ - множество вещественных функций, удовлетворяющих граничным условиям, для которых Lu имеет смысл).

Предположим, что V_Γ плотно в V, и что для любых $u \in V_\Gamma$ выполняется условие $Lu \in V$.

<u>Утверждение</u>. Если функция $u \in V_\Gamma$ является решением краевой задачи $Lu \equiv f$, то эта функция доставляет минимум функционалу …

а) $J(u) = (Lu,u)$;

б) $J(u) = (u,f)$;

в) $J(u) = (Lu,u) - 4(Lf,f)$;

г) $J(u) = (Lu,u) - 2(f,u)$.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 7

1. Метод конечных разностей относится к классу **...** методов решения уравнений математической физики.
   а) вариационных;
   б) проекционных;
   в) вероятностных;
   г) численных.

2. Общее решение сеточного уравнения $24u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^i + c_2\left(+\frac{1}{6}\right)^i$ б) $c_1 6^i + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^i$ в) $c_1\left(\frac{1}{3}\right)^i + c_2 i\left(\frac{1}{3}\right)^i$

   г) $c_1 4^i + c_2(-6)^i$

3. Пусть функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t. Тогда погрешность аппроксимации дифференциального оператора $Lu = c\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} + bu$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$

   разностным $L_h u_h = c\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - a\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} + bu_i^k$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{0, K-1}$

   на сетке $x_i = ih$, $i = \overline{0, I}$, $h = \frac{l}{I}$;

   $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, $\tau = \frac{T}{K}$

   характеризуется величиной:

   а) $O(h,\tau)$ б) $O(h^2,\tau)$ в) $O(h,\tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2,\tau^2)$

4. Разностная схема представляет собой:
   а) последовательность разностных задач, соответствующую последовательности сгущающихся сеток;
   б) последовательность разностных задач, соответствующую произвольной последовательности сеток;
   в) последовательность разностных задач, соответствующую последовательности равномерных сеток;
   г) разностную задачу, соответствующую регулярной сетке.

5. Разностная схема

   $$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a^2\dfrac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} = \varphi_i^k, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$ является

   а) устойчивой при условии $a^2\frac{h_t}{h_x} \le 1$ в) безусловно устойчивой

   б) устойчивой при условии $a^2\frac{h_t}{h_x} \le \frac{1}{2}$ г) неустойчивой.

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Если нормы семейства $\{U_h\}$ невырождены, то …

а) всякая последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ сходится к некоторой функции $u(x) \in U$;

б) всякая сходящаяся последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ имеет единственный предел в пространстве U;

в) всякая последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ ограничена;

г) для любой сходящейся последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ выполняется условие $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h\|_{U_h} = 0$.

7. Применение метода расщепления для решения 3-й краевой задачи диффузии в двумерной области позволяет …
а) заменить краевую задачу сеточной задачей Коши;
б) получить решение краевой задачи в виде конечного ряда Фурье;
в) гарантировать устойчивость вычислительного алгоритма;
г) получить экономичную разностную схему.

8. Свойство сходимости итерационного процесса

$$\begin{cases} v_{i,j}^{k+1} = (E + \tau\Lambda) v_{i,j}^k - \tau\varphi_{i,j}^k, & k = 0,1,2,... \\ v_{0,j}^k = \alpha_j, \; v_{I,j}^k = \beta_j, & j = \overline{1, J-1}; \\ v_{i,0}^k = \gamma_i, \; v_{i,J}^k = \delta_i, & i = \overline{1, I-1}; \\ v_{i,j}^0 = \xi_{i,j} \end{cases},$$

к решению разностной краевой задачи

$$\begin{cases} \Lambda u_{i,j} = \varphi_{i,j}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}; \\ u_{0,j} = \alpha_j, \quad u_{I,j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, J-1}; \\ u_{i,0} = \gamma_i, \quad u_{i,J} = \delta_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \end{cases}$$

где $\Lambda u_{i,j} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$, …

а) существенно зависит от выбора параметра τ и не зависит от выбора начальной сеточной функции $\xi_{i,j}$;

б) не зависит от выбора параметра τ и не зависит от выбора начальной сеточной функции $\xi_{i,j}$;

в) существенно зависит как от выбора параметра τ, так и от выбора начальной сеточной функции $\xi_{i,j}$;

г) не зависит от выбора параметра τ, но существенно зависит от выбора начальной сеточной функции $\xi_{i,j}$.

9. Вопрос о сходимости минимизирующей последовательности функций к решению задачи математической физики возникает при использовании …
а) вариационного метода;
б) метода прямых;
в) метода Фурье разделения переменных;
г) метода встречных волн.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 8

1. Метод Ритца относится к классу **...** методов решения уравнений математической физики.
   а) вариационных;
   б) проекционных;
   в) вероятностных;
   г) численных.

2. Общее решение сеточного уравнения $u_{i+1}+6u_i+8u_{i-1}=0$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$ имеет вид:

   а) $c_1(-2)^i+c_2(-4)^i$ б) $c_1 2^i+c_2(-4)^i$ в) $c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^i+c_2 i\left(-\frac{1}{4}\right)^i$ г) $c_1 4^i+c_2(-2)^i$

3. Пусть функция $u(x,t)$ четырежды непрерывно дифференцируема по x и t. Тогда погрешность аппроксимации дифференциального оператора $Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le l$, $0\le t\le T$

   разностным $L_h u_h=\frac{u_i^{k+1}-2u_i^k+u_i^{k-1}}{\tau^2}-a^2\frac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h^2}$, $i=\overline{1,I-1}$, $k=\overline{1,K-1}$

   на сетке $x_i=ih$, $i=\overline{0,I}$, $h=\frac{l}{I}$;

   $t_k=k\tau$, $k=\overline{0,K}$, $\tau=\frac{T}{K}$

   характеризуется величиной:

   а) $O(h^2,\tau)$ б) $O(h,\tau)$ в) $O(h,\tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2,\tau^2)$

4. Применение метода замены производных разностными отношениями позволяет:
   а) осуществлять формальное построение разностных схем для краевой задачи математической физики;
   б) гарантировать построение разностных схем требуемого порядка аппроксимации;
   в) гарантировать построение устойчивых разностных схем;
   г) гарантировать построение консервативных разностных схем.

5. Разностная схема

$$\begin{cases}\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}-a^2\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_i^{k+1}}{h_x}=0, & i=\overline{0,I-1},\quad k=\overline{0,K-1};\\ u_i^0=\psi_i, & i=\overline{0,I};\\ u_0^k=\alpha^k, & k=\overline{1,K}\end{cases}$$

является

   а) безусловно устойчивой
   б) устойчивой при условии $\frac{h_t}{h_x}\le 1$
   в) устойчивой при условии $a^2\frac{h_t}{h_x}\le 1$
   г) неустойчивой

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h\subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D\subset R^n$.

Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Если нормы семейства пространств $\{U_h\}$ согласованы с нормой пространства U, то …

а) нормы семейства пространств $\{U_h\}$ невырождены;

б) всякая последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ сходится к некоторой функции $u(x) \in U$;

в) всякая последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ ограничена;

г) для любой сходящейся последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ выполняется условие $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h\|_{U_h} = 0$.

7. Разностная схема, построенная для краевой задачи математической физики, называется экономичной, если …
а) количество арифметических операций, необходимое для вычисления сеточного решения, пропорционально количеству величин, определяющих это решение;
б) количество арифметических операций, необходимое для вычисления сеточного решения, пропорционально квадрату количества величин, определяющих это решение;
в) количество арифметических и логических операций, необходимое для вычисления сеточного решения, пропорционально количеству величин, определяющих это решение;
г) количество арифметических и логических операций, необходимое для вычисления сеточного решения, пропорционально квадрату количества величин, определяющих это решение.

8. Пусть $\overline{D}_h$ - сеточный аналог двумерной области $\overline{D}$, заданной на плоскости xOy. Пусть Γ_h - сеточная граница, а D_h - множество внутренних узлов сеточной области $\overline{D}_h$. Сетку предполагаем равномерной как по x, так и по y.

Если сеточная функция $v_{i,j}$ во всех внутренних узлах области $\overline{D}_h$ удовлетворяет условию

$$\Lambda_x v_{i,j} + \Lambda_y v_{i,j} = 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in D_h,$$

где $\Lambda_x v_{i,j} = \dfrac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2}$; $\qquad \Lambda_y v_{i,j} = \dfrac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_y^2}$,

то она …

а) достигает своего наибольшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$;

б) достигает своего наибольшего и наименьшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$;

в) достигает своего наибольшего и наименьшего значения в точках границы Γ_h;

г) достигает своего наименьшего значения только во внутренних точках сеточной области $\overline{D}_h$.

9. Метод моментов относится к классу … методов.
а) вариационных;
б) конечно-разностных;
в) проекционных;
г) вероятностных.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 9

1. Метод Монте-Карло относится к классу **. . .** методов решения уравнений математической физики.
   а) вариационных;
   б) проекционных;
   в) вероятностных;
   г) численных.

2. Общее решение сеточного уравнения $49u_{i+1} - 14u_i + u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1\left(\dfrac{1}{7}\right)^i + c_2\left(-\dfrac{1}{7}\right)^i$ б) $c_1 7^i + c_2\left(\dfrac{1}{7}\right)^i$ в) $c_1\left(\dfrac{1}{7}\right)^i + c_2 i\left(\dfrac{1}{7}\right)^i$ г) $c_1 49^i + c_2(-14)^i$

3. Погрешность аппроксимации краевой задачи
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le l; \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t \le T \end{cases}$$
разностной схемой
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \; i = \overline{1, I-1}, \; k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \sin\dfrac{\pi x_i}{l}, \quad \dfrac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = 0, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = u_I^k = 0, \quad k = \overline{1, K} \end{cases}$$
на сетке
$$x_i = ih, \; i = \overline{0, I}, \; h = l/I; \qquad t_k = k\tau, \; k = \overline{0, K}, \; \tau = T/K$$
характеризуется величиной:

   а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(h, \tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Применение метода неопределенных коэффициентов для построения разностной схемы не требует:
   а) задания сеточного шаблона;
   б) использования определения аппроксимации;
   в) задания последовательности базисных функций;
   г) анализа погрешности аппроксимации.

5. Разностная схема
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} + \varphi_i^{k+1}, \; i = \overline{1, I-1}, \; k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \quad u_I^k = \beta^k, \quad k = \overline{1, K} \end{cases}$$
является:

   а) безусловно устойчивой

   в) устойчивой при условии $a^2 \dfrac{h_t}{h_x^2} \le \dfrac{1}{2}$

б) устойчивой при условии $a^2 \frac{h_t}{h_x^2} \le 1$ г) неустойчивой

6. Предположим, что для численного решения краевой задачи математической физики $Lu = f$ построена разностная схема $L_h u_h = f_h$, которая аппроксимирует краевую задачу и является устойчивой, тогда разностная схема сходится при …
а) $h \to 0$, если только она является консервативной;
б) $h \to 0$ лишь на равномерных сетках;
в) $h \to +\infty$;
г) $h \to 0$.

7. Метод расщепления позволяет:
а) заменить классическую постановку краевой задачи математической физики вариационной;
б) представить решение краевой задачи математической физики в виде конечного ряда Фурье;
в) исследовать сходимость минимизирующей последовательности, полученной методом Ритца;
г) заменить многомерную краевую задачу математической физики последовательностью задач меньшей размерности.

8. Пусть U_h - линейное пространство сеточных функций u_i, $i = \overline{0,I}$, заданных на одномерной равномерной сетке $x_i = ih_x$, $i = \overline{0,I}$, $h_x = l/I$ и удовлетворяющих условиям $u_0 = 0$, $u_I = 0$.
Рассмотрим оператор Λ_x, который определяется следующим равенством:

$$\Lambda_x u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2},$$

где u_i - произвольная сеточная функция из пространства U_h.
Собственные числа и соответствующие им собственные функции оператора Λ_x имеют вид:

а) $\lambda_s = -\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{s\pi}{2I}$, $u_i^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{s\pi i}{I}$, $s = \overline{1, I-1}$;

б) $\lambda_s = -\frac{4}{h_x^2}\cos^2\frac{s\pi}{2I}$, $u_i^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{s\pi i}{I}$, $s = \overline{1, I-1}$;

в) $\lambda_s = -\frac{4}{h_x^2}\cos^2\frac{s\pi}{2I}$, $u_i^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{s\pi i}{I}$, $s = \overline{1, I-1}$;

г) $\lambda_s = -\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{s\pi}{2I}$, $u_i^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{s\pi i}{I}$, $s = \overline{1, I-1}$.

9. Метод Ритца относится к классу … методов решения краевых задач математической физики.
а) вероятностных;
б) аналитических;
в) конечно-разностных;
г) вариационных.

ТЕСТ
для самоконтроля знаний по дисциплине
«Численные методы математической физики»

ВАРИАНТ 10

1. Вариационным методом решения уравнений математической физики является:
   а) метод Ритца;
   б) метод Монте-Карло;
   в) метод прямых;
   г) операционный метод.

2. Общее решение сеточного уравнения $u_{i+1} - 16u_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид:

   а) $c_1 \left(\frac{1}{4}\right)^i + c_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^i$ б) $c_1 4^i + c_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^i$ в) $c_1 (4)^i + c_2 i (4)^i$ г) $c_1 4^i + c_2 (-4)^i$

3. Погрешность аппроксимации задачи Коши
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + c\exp\left(-\dfrac{x^2}{s^2}\right), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 \le t \le T; \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$
разностной схемой $\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} - bu_i^{k+1} + c\exp\left(-\dfrac{x_i^2}{s^2}\right), \\ u_i^0 = 0 \end{cases}$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $k = \overline{0, K-1}$

   на сетке $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
$$t_k = k\tau, \quad k = \overline{0, K}, \quad \tau = \frac{T}{K}$$
   характеризуется величиной:

   а) $O(h^2, \tau)$ б) $O(h, \tau)$ в) $O(h, \tau^2)$ г) $O(h)$ д) $O(\tau)$ е) $O(h^2, \tau^2)$

4. Применение интегро-интерполяционного метода с целью построения разностной схемы для краевой задачи математической физики позволяет:
   а) гарантировать устойчивость построенной разностной схемы;
   б) получить экономичную разностную схему;
   в) гарантировать квадратичную сходимость сеточного решения;
   г) избежать ложной сходимости.

5. Если для некоторой двухслойной разностной задачи Коши с линейным постоянным оператором перехода не выполняется условие признака Неймана, то эта разностная схема:
   а) устойчива;
   б) сходится;
   в) может быть устойчивой;
   г) неустойчива.

6. Пусть U_h - линейное нормированное пространство сеточных функций u_h, определённых в сеточной области $D_h \subset R_h^n$, где R_h^n - n-мерная сетка мелкостью h. Пусть U - линейное нормированное пространство функций $u(x)$ непрерывного векторного аргумента x, которые определены в области $D \subset R^n$.

   Рассмотрим последовательность пространств $\{U_h\}$, соответствующую последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Из каждого пространства U_h выберем элемент u_h. В результате получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Нормы семейства пространств $\{U_h\}$ называются невырожденными, если …

а) из выполнения равенства $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = 0$ на функции $u \in U$ следует, что $u = 0$;

б) для любой функции $u \in U$ справедливо равенство $\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \|u\|_U$;

в) существует такая функция $u \in U$, для которой справедливо равенство $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \|u\|_U$;

г) из выполнения условия $\lim\limits_{h\to 0}\left\|[u]_h\right\|_{U_h} = \|u\|_{U_h}$ на функции $u \in U$ следует, что $u \neq 0$.

7. Для численного решения нелинейной краевой задачи теплопроводности в стержне можно использовать …
а) неявную разностную схему с итерационным уточнением;
б) представление решения задачи в виде конечного ряда Фурье;
в) метод расщепления;
г) метод Фурье разделения переменных.

8. Функция-мажоранта, применяемая при исследовании устойчивости разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, является:
а) неположительной и дважды непрерывно-дифференцируемой;
б) неотрицательной и дважды непрерывно-дифференцируемой;
в) положительной и кусочно-непрерывной;
г) неположительной и кусочно-непрерывной.

9. Пусть дана краевая задача математической физики в операторной форме

$$Lu = f, \quad u \in V_\Gamma \subseteq V, \quad f \in V,$$ где

V - вещественное гильбертово функциональное пространство;

L - дифференциальный оператор с областью определения V_Γ (V_Γ - множество вещественных функций, удовлетворяющих граничным условиям, для которых Lu имеет смысл).

Предположим, что V_Γ плотно в V, и что для любых $u \in V_\Gamma$ выполняется условие $Lu \in V$.

Рассмотрим утверждение: «Если функция $u \in V_\Gamma$ является решением краевой задачи $Lu \equiv f$, то эта функция доставляет минимум функционалу $J(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$ на множестве V_Γ».

Это утверждение верно, если …
а) оператор L - ограниченный и самосопряженный;
б) оператор L - линейный, положительно определённый и самосопряженный;
в) все собственные числа оператора L положительны;
г) L - линейный, положительно определенный дифференциальный оператор второго порядка.

КЛЮЧ К ТЕСТАМ
для самоконтроля знаний по курсу
«Численные методы математической физики»

№ задачи	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1	г	б	в	г
2	а	в	б	а
3	а	б	в	г
4	в	б	в	б
5	б	а	б	а
6	г	а	а	г
7	в	г	г	в
8	б	а	а	б