ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2010

УДК СГАУ: 517.0(075)
ББК 22.1.я7

Составители: ***Л.Г. Зубрина, О.П. Чостковская***

Рецензент д-р техн. наук, проф. каф. ЛА О.Л. С т а р и н о в а

Дополнительные главы высшей математики: метод. указания / сост. *Л.Г. Зубрина, О.П. Чостковская.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010. – 28 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения из курсов: «Операционное исчисление», «Уравнения математической физики» и «Вариационное исчисление», приведены примеры решения типовых задач и задачи для расчетно-графической работы.

Предназначены для студентов металлургического факультета, обучающихся по специальности "Машины и технология обработки металлов давлением".

УДК СГАУ: 517.0(075)
ББК 22.1.я7

СОДЕРЖАНИЕ

* * *

Методические указания содержат правила оформления расчетно-графической работы и варианты заданий к ней.

Даны необходимые теоретические сведения, приводятся образцы решения задач.

Расчетно-графическая работа «Операционное исчисление, уравнения математической физики и вариационное исчисление» состоит из трех разделов:

1. Операционное исчисление;
2. Уравнения математической физики;
3. Вариационное исчисление.

При оформлении каждого раздела студенты должны приводить необходимые теоретические сведения и подробное решение предложенных задач. Работа выполняется на листах бумаги формата А4, шариковой ручкой. Помарки и сокращения слов не допускаются. Задачи и их решения записываются в порядке их задания, условия задач должны точно соответствовать заданию. Каждая задача начинается на новой странице. Графики выполняются на миллиметровой бумаге.

1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1 Преобразование Лапласа

Пусть задана функция действительной переменной t, определеная следующим образом: $f(t)=\begin{cases} f(t), & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$. Предположим, что данная функция удовлетворяет двум условиям:

1. Функция кусочно-непрерывная, т.е. на любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва первого рода.
2. Функция конечного роста, т.е. существуют постоянные положительные числа M и s такие, что $|f(t)|<Me^{St}$ при любом t из интервала $0\le t\le +\infty$.

Рассмотрим произведение этой функции на комплексную функцию e^{-pt} действительного переменного t, где $p=a+ib \quad (a>0)$. Введем функцию $F(p)$ следующим образом:

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\times e^{-pt}dt \ . \tag{1.1}$$

При выполнении условий 1 и 2 этот интеграл существует и сходится.

Определение:

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет двум заданным условиям (1, 2), а функция $F(p)$ задается равенством (1.1). Тогда соответствие $f(t)\to F(p)$ называется преобразованием Лапласа. При этом $f(t)$ называется оригиналом, а функция $F(p)$ называется изображением. Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, то пишут так:

$$F(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}} f(t) \text{ или}$$

$$f(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} F(p) \text{ или}$$

$$F(p)=L(f(t)).$$

Теорема. Если две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то эти функции тождественно равны.

1.2 Свойства изображений и оригиналов

1. Свойство линейности.

Изображение суммы нескольких функций, умноженных на константы, равняются сумме изображений этих функций, умноженных на соответствующие константы.

Т.е., если $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$, $F_i(p) \xrightarrow{\cdot} f_i(t)$ и $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$,

то $F(p)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$.

2. Свойство подобия.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \xrightarrow{\cdot} f(at)$.

3. Свойство смещения.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $F(p+\alpha) \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} f(t)$.

4. Свойство запаздывания.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $e^{-pb}F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t-b)$.

5. Дифференцирование оригинала.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $pF(p)-f(0) \xrightarrow{\cdot} f'(t)$, для n-ой производной:

$$\left[\ p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)\ \right] \xrightarrow{\cdot} f^{(n)}(t).$$

6. Дифференцирование изображения.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $F'(p) \xrightarrow{\cdot} -tf(t)$,

$(-1)^n F^{(n)}(p) \xrightarrow{\cdot} t^n f(t)$.

7. Интегрирование оригинала.

Если $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, то $\frac{1}{p}F(p) \xrightarrow{\cdot} \int\limits_0^t f(z)\,dz$.

8. Интегрирование изображения.

$$\int_{p}^{+\infty} F(p)\,dp \xrightarrow{\cdot\cdot} \frac{1}{t} f(t).$$

9. Теорема свертывания.

Если $F_1(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} f_1(t)$ и $F_2(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} f_2(t)$, то

$$F_1(p)F_2(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

1.3 Таблица некоторых изображений

Для удобства пользования изображениями используем таблицу:

№	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\times e^{-pt}dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$sh\alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$ch\alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$

8	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

1.4 Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционными методами

Свойства преобразований Лапласа позволяют нам решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений по следующему плану.

1. С помощью преобразования Лапласа приводим дифференциальное уравнение относительно оригинала к алгебраическому уравнению относительно изображения.
2. Из полученного уравнения находим изображение.
3. По найденному изображению находим оригинал.

Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x(t)=f(t).$$

Требуется найти решение этого уравнения $x=x(t)$ при $t\geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}.$$

Пусть x(t) - решение. Обозначим $\bar{x}(p)=L(x(t))$, т.е. $\bar{x}(p)\xrightarrow{\;\cdot\;} x(t)$. Умножим все члены заданного дифференциального уравнения на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$a_0\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{d^n x}{dt^n}dt+a_1\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}dt+\ldots+a_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{dx}{dt}dt+$$

$$+a_n\int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$

В левой части равенства стоят изображения функции $x(t)$ и ее производных, справа изображение функции $f(t)$, которое обозначим $F(p)$.

$$a_0L\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)+a_1L\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)+\ldots+a_nL\big(x(t)\big)=L\big(f(t)\big).$$

Применяя свойства оригиналов и изображений, получим:

$$a_0(p^n\bar{x}(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_0'-\ldots-x_0^{(n-1)})+a_1(p^{n-1}\bar{x}(p)-p^{n-2}x_0-$$

$$-p^{n-3}x_0'-\ldots-x_0^{(n-2)})+a_{n-1}\left(p\bar{x}(p)-x_0\right)+a_n\bar{x}(p)=F(p).$$

Полученное алгебраическое уравнение, из которого можно определить $\bar{x}(p)$, называют вспомогательным уравнением. По найденному изображению $\bar{x}(p)$ находим оригинал x(t).

Примеры:

1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\sigma_0(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Решение:

$$L\left(\sigma_0\left(t\right)\right)=\int\limits_0^{+\infty}\sigma_0\left(t\right)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}1\times e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}d(-pt)=$$

$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}e^{-pt}+\frac{1}{p}e^0=\frac{1}{p}.$$

Ответ: $\frac{1}{p}\xrightarrow{\cdot}1$.

2. Найти изображение функции $f\left(t\right)=e^{bt}$.

Решение:

$$L\left(e^{bt}\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{bt}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{bt}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{(b-p)t}dt=\frac{1}{b-t}\int\limits_0^{+\infty}e^{(b-p)t}d(b-t)=$$

$$=-\left(-\frac{1}{-b+p}\right)e^{(b+p)t}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{b-p}(0-1)=\frac{1}{p-b}.$$

Ответ: $\frac{1}{p-b}\xrightarrow{\cdot}e^{bt}$.

3. Найти изображение функции $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$.

Решение:

$\sin t\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{p^2+1}$; по свойству подобия $\sin 4t\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{p}{4}\right)^2+1}$;

$\cos t\xleftarrow{\cdot}\frac{p}{p^2+1}$; по свойству подобия $\cos 5t\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{5}\frac{p}{\left(\frac{p}{5}\right)^2+1}$;

по свойству линейности $(3\sin 4t-2\cos 5t)\xleftarrow[\cdot]{\cdot}3\frac{1}{4}\frac{16}{p^2+16}-2\frac{1}{5}\frac{5p}{p^2+25}$.

Ответ: $F(p)=3\frac{1}{4}\frac{16}{p^2+16}-2\frac{1}{5}\frac{5p}{p^2+25}$.

4. Найти решение уравнения $x'(t)+x(t)=1$, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=0$.

Решение:

Составим вспомогательное уравнение:

$$a_0L\left(\frac{dx}{dt}\right)+a_1L\big(x(t)\big)=L\big(f(t)\big).$$

В нашем примере $a_0=1,\quad a_1=1,\quad f(t)=1$.

$$\frac{1}{p}\xrightarrow[\cdot]{\cdot}1,\ \bar{x}(p)\xrightarrow[\cdot]{\cdot}x(t),\ p\bar{x}(p)-x_0\xrightarrow[\cdot]{\cdot}x'(t).$$

Получим:

$$\left(p\bar{x}(p)-x_0\right)+1\bar{x}(p)=\frac{1}{p},$$

$$p\bar{x}(p)+\bar{x}(p)=\frac{1}{p},$$

$$\bar{x}(p)(p+1)=\frac{1}{p},$$

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p(p+1)},$$

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

По найденному изображению находим оригинал: $x(t)=1-e^{-t}$.

Ответ: $x(t)=1-e^{-t}$.

5. Найти решение уравнения $x''(t)+9x=1$, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=0,\quad x'(0)=0$.

Решение:
Составим вспомогательное уравнение:

$$a_0L(x''(t))+a_1L(x'(t))+a_2L(x(t))=L(f(t)).$$

В нашем примере $a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2=9,\quad f(t)=1$.

$$\frac{1}{p}\xrightarrow{\cdot}1,\ \ \overline{x}(p)\xrightarrow{\cdot}x(t),\ \ p\,\overline{x}(p)-x_0\xrightarrow{\cdot}x'(t),$$

$$p^2\,\overline{x}(p)-px_0-x_0'\xrightarrow{\cdot}x''(t).$$

В результате придем к уравнению:

$$p^2\,\overline{x}(p)-px_0-x_0'+9\,\overline{x}=\frac{1}{p}.$$

С учетом начальных условий $x_0=0,\quad x_0'=0$, получаем уравнение:

$$p^2\,\overline{x}(p)+9\,\overline{x}=\frac{1}{p},$$

из которого можно определить $\overline{x}$:

$$\overline{x}=\frac{1}{\left(9+p^2\right)p}.$$

По найденному изображению находим оригинал:

$$\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+9},$$

$$C=0,\quad A=\frac{1}{9},\quad B=-\frac{1}{9},$$

$$\frac{1}{\left(9+p^2\right)p}=\frac{1}{9p}-\frac{p}{9(p^2+9)}.$$

$$x(t)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t.$$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t$.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2.1 Основные типы уравнений математической физики

Основными уравнениями математической физики называют (для случая двух независимых переменных) следующие дифференциальные уравнения.

1. ***Волновое уравнение:*** $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов колебаний струны, продольное колебаний стержня и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением гиперболического типа.

2. ***Уравнение теплопроводности:*** $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением параболического типа.

3. ***Уравнение Лапласа:*** $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических, магнитных полях, задач гидродинамики и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением эллиптического типа.

2.2 Постановка задач для уравнений математической физики

Постановка задач для волнового уравнения:

1. Первая смешанная краевая задача:

Требуется найти функцию $U(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$0 \le x \le l, \qquad 0 \le t \le T,$$

и удовлетворяющую заданным краевым условиям

$$U|_{x=0} = 0,$$

$$U|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям

$$U|_{t=0} = f(x),$$

$$U'_t|_{t=0} = g(x).$$

2. Задача Коши:

Требуется найти функцию $U(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \le t \le T \text{ или } 0 \le t < \infty$$

и удовлетворяющую заданным начальным условиям:

$$U\big|_{t=0} = f(x),$$

$$U'_t\big|_{t=0} = g(x).$$

Постановка задач для уравнения теплопроводности:

1. Первая смешанная краевая задача:

Требуется найти функцию $U(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$0 \le x \le l$$

и удовлетворяющую заданным краевым условиям

$$U|_{x=0} = h_1(t),$$

$$U|_{x=l} = h_2(t)$$

и начальным условиям

$$U|_{t=0} = f(x).$$

2. Задача Коши:

Требуется найти функцию $U(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

и удовлетворяющую заданным начальным условиям

$$U|_{t=0} = f(x).$$

Постановка внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

Рассмотрим некоторый объем D ограниченный поверхностью Г.

Пусть $U|_{\Gamma}=f(p)$; $p\in\Gamma$. Требуется найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую внутри области D уравнению Лапласа, а на границе принимающую значение $f(p)$.

2.3 Решение первой смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье

Решение уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x\in[0;l]$, удовлетворяющее граничным условиям $U|_{x=0}=0,\quad U|_{l=0}=0$ и начальным условиям $U|_{t=0}=f(x),\quad U_t'|_{t=0}=h(x)$, может быть представлено как сумма ряда

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos\frac{\pi na}{l}t+B_n\sin\frac{\pi na}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (2.1)$$

где

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l h(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx. \qquad (2.2)$$

Рассмотренное уравнение описывает свободные колебания струны. Если на струну действуют какие-либо внешние силы $\theta(x,t)$, то уравнение называют уравнением вынужденных колебаний струны и оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\theta(x,t).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$U(x,t)=V(x,t)+\Omega(x,t), \qquad (2.3)$$

где функция $V(x,t)$ является решением уравнения свободных колебаний и удовлетворяет условиям:

$$V|_{x=0}=0,\quad V|_{l=0}=0,\ V|_{t=0}=f(x),\quad V_t'|_{t=0}=h(x),$$

а функция $\Omega(x,t)$ — уравнению вынужденных колебаний и нулевым начальным и граничным условиям:

$$\Omega|_{x=0}=0,\quad \Omega|_{l=0}=0,\ \Omega|_{t=0}=0,\quad \Omega_t'|_{t=0}=0.$$

Функцию $\Omega(x,t)$ будем искать в виде суммы ряда

$$\Omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (2.4)$$

где

$$\omega_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau, \qquad (2.5)$$

$$g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \theta(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (2.6)$$

2.4 Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей

Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad (2.7)$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$\left.\begin{aligned} U|_{x=0}&=h_1(t), && 0\le t\le T,\\ U|_{x=l}&=h_2(t), && 0\le t\le T, \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$$U|_{t=0}=f(x), \qquad 0\le x\le L, \qquad (2.9)$$

т.е. требуется найти решение $U(x,t)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми, $t=0$, $x=0$, $x=L$, $t=T$, если заданы значения искомой функции на трех его сторонах $t=0$, $x=0$, $x=L$.

Покроем нашу область сеткой, образованной прямыми

$$x_i=ih, \qquad i=0,1,2,\ldots,$$

$$t_k=kl, \qquad k=0,1,2,\ldots,$$

и будем определять приближенные значения решения в узлах сетки, т.е. в точках пересечения этих прямых. Введем обозначения: $U(ih;kl)=U_{i,k}$. Заменяем частные производные, входящие в уравнение, конечными разностями:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{ik}=\frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{ik}=\frac{U_{i,k+1}-U_{i,k}}{l}.$$

В соответствии с этими формулами запишем вместо уравнения (2.7) соответствующее ему уравнение в конечных разностях для точки $(ih;kl)$:

$$\frac{U_{i+1,k}-U_{i,k}}{l}=a^2\frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h^2}.$$

Определим $U_{i,k+1}$:

$$U_{i,k+1}=\frac{la^2}{h^2}\left(U_{i+1,k}+U_{i-1,k}\right)+\left(1-\frac{2la^2}{h^2}\right)U_{i,k}. \qquad (2.10)$$

Из этой формулы следует, что если известны три значения в k-м ряду $U_{i,k}$, $U_{i+1,k}$, $U_{i-1,k}$, то определяется значение $U_{i,k+1}$ в (k+1)-м ряду. Нам известны все значения на прямой $t=0$ (т.е. на 0-м слое). Таким образом, мы определим значения во всех внутренних точках отрезка $t=l$. Значения в крайних точках этого отрезка нам известны в силу формул (2.8). Так, ряд за рядом определим значения искомого решения во всех узлах сетки.

Можно доказать, что приближенное решение можно найти только при определенном соотношении шагов h и l, а именно если $l\le\frac{h^2}{2a^2}$. Формула (2.10) особенно упрощается, если

$$1-\frac{2la^2}{h^2}=0 \text{ или } l=\frac{h^2}{2a^2}.$$

В этом случае формула (2.10) примет вид:

$$U_{i,k+1}=\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{2}. \qquad (2.11)$$

Эта формула особенно удобна для вычислений.

Примеры:

1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$0 \le t < T, \quad 0 \le x \le 3,$$

$$U|_{x=0} = 0, \qquad U|_{t=0} = x(x-3),$$

$$U|_{x=3} = 0, \qquad U'_t|_{t=0} = 0.$$

Решение:

Для решения воспользуемся формулами (2.1), (2.2). В данной задаче $l = 3$, $f(x) = x(x-3)$, $h(x) = 0$.

Решение (2.1) принимает вид:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos\frac{2\pi n}{3}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{3}t)\sin\frac{\pi n}{3}x, \tag{2.12}$$

где коэффициенты A_n и B_n вычисляем по формуле (2.2):

$$A_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{\pi n}{3}xdx, \tag{2.13}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^3 h(x)\sin\frac{\pi n}{3}xdx. \tag{2.14}$$

Так как $h(x) = 0$, то из формулы (2.14) следует, что B_n =0.

По формуле (2.13) найдем A_n:

$$A_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x(x-3)\sin\frac{\pi n}{3}xdx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$A_n = \frac{36}{(\pi n)^3}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{72}{(\pi n)^3}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \ldots$

Подставляя полученные значения в формулу (2.12), запишем решение

$$U(x,t) = -\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}cos\frac{2\pi(2k+1)}{3}t\sin\frac{\pi(2k+1)}{3}x.$$

2. Решить пример 1 при условии, что на струну постоянно действует возбуждающая внешняя сила, равная в расчете на единицу массы струны $\Psi(x,t)=4-x$.

Решение:

Решение будем искать по формуле (2.3). Функция $V(x,t)$ найдена в примере 1:

$$V(x,t)=U(x,t)=-\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}cos\frac{2\pi(2k+1)}{3}t\sin\frac{\pi(2k+1)}{3}x.$$

Найдем функцию $\Omega(x,t)$ по формуле (2.4).

В данной задаче $\theta(x,t)=\Psi(x,t)=4-x$.

Коэффициенты этого разложения найдем с помощью формул (2.5, 2.6). По формуле (2.6) вычисляем:

$$g_n(t)=\frac{2}{3}\int_0^3\theta(x,t)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\int_0^3(4-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$g_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left(4-(-1)^n\right).$$

Подставляя найденные $g_n(t)$ в (2.5), получим:

$$\omega_n(t)=\frac{3}{n\pi 2}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{2n\pi(t-\tau)}{3}d\tau=$$

$$=\frac{3}{n\pi 2}\int_0^t\frac{2}{\pi n}\left(4-(-1)^n\right)\sin\frac{2n\pi(t-\tau)}{3}d\tau=$$

$$=\left(4-(-1)^n\right)\frac{3}{(\pi n)^2}\int_0^t\sin\frac{2n\pi(t-\tau)}{3}d\tau=$$

$$=\left(4-(-1)^n\right)\frac{3}{(\pi n)^2}\cdot\frac{3}{2\pi n}\left(1-\cos\frac{2\pi nt}{3}\right)=$$

$$=\frac{9\left(4-(-1)^n\right)}{2(\pi n)^3}\left(1-\cos\frac{2\pi nt}{3}\right).$$

Используя формулу (2.4) запишем решение

$$\Omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\left(4-(-1)^n\right)}{2(\pi n)^3}\left(1-\cos\frac{2\pi nt}{3}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Окончательно, по формуле (2.3)

$$U(x,t)=-\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}cos\frac{2\pi(2k+1)}{3}t\sin\frac{\pi(2k+1)}{3}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\left(4-(-1)^n\right)}{2(\pi n)^3}\left(1-\cos\frac{2\pi nt}{3}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

3. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1 Простейшая вариационная задача

Определение:

Переменная величина J называется функционалом от функции $f(x)$, если любой функции $f(x)$ из некоторого класса функций ставится в соответствие определенное значение $J\in\mathbb{R}$.

То есть, можно сказать, что функционалы — это функции, в которых роль независимой переменной играют функции или кривые.

Простейшая вариационная задача.

Пусть дана функция непрерывная вместе со своей первой производной $[a;b]$, такая, что $y(a)=A,\quad y(b)=B$.

Найти экстремум функционала

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{3.1}$$

при условии

$$y(a)=A$$

$$y(b)=B.$$

Иначе говоря, простейшая вариационная задача состоит в отыскании экстремума функционала (3.1) на множестве всех кривых, соединяющих две заданные точки.

Теорема (необходимое условие существования экстремума).

Для того, чтобы простейшая вариационная задача достигала экстремума на функции y(x) необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 .$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называют экстремалями. Только на них функционал может достигать экстремума.

3.2 Метод Ритца

Метод Ритца – метод приближённого решения простейшей вариационной задачи без использования уравнения Эйлера.

$$J(y)=\int_a^b F(x;y;y')dx$$

$$y(a)=A; \quad y(b)=B;$$

Решение будем искать в виде:

$$\tilde{y}(x)=U_0(x)+\sum_{i=1}^{k}C_iU_i(x); \tag{3.2}$$

где: C_i - произвольные константы;

$U_0(x), \quad U_i(x)$ - любые линейно-независимые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$U_0(a)=A;$$

$$U_0(b)=B;$$

$$U_i(a)=U_i(b)=0 \text{, для любого } i=1,2,\ldots,k .$$

Функции $U_i(x)$, выбранные таким образом, называют базисными функциями. В качестве базисных функций можно выбирать такие:

$$U_i(x)=(x-a)^i(x-b), \qquad i=1,2,\ldots,k .$$

Приближенное решение (3.2) подставляем в функционал:

$$J(\tilde{y})=\int_a^b F(x;\tilde{y};\tilde{y}')dx=\Phi(C_1;C_2;\ldots;C_k).$$

Таким образом, функционал $J(y)$ обращается в функцию $\Phi(C_1;C_2;\ldots;C_k)$ — функцию k переменных. Необходимо определить те значения $C_1;C_2;\ldots;C_k$, которые доставляют экстремум функции $\hat{O}(C_1;C_2;\ldots;C_k)$. Для этого решаем систему уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_1}=0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C_2}=0; \ldots ; \frac{\partial\Phi}{\partial C_k}=0.$$

Найденные значения $C_1;C_2;\ldots;C_k$ подставляем в (3.2) и получаем приближенное решение.

Пример:

Найти экстремали функционала методом Ритца:

$$J(y)=\int_0^1 \left(y'^2-y^2+2xy\right)dx,$$

$$y(0)=y(1)=0 .$$

Решение:

Представим искомую функцию в виде:

$$\tilde{y}(x)=U_0(x)+C_1U_1(x)+C_2U_2(x)+C_3U_3(x)+\ldots$$

Пусть

$$U_0(x)=0,$$

$$U_1(x)=x(1-x),$$

$$U_2(x)=x^2(1-x),$$

$$U_3(x)=x^3(1-x),\ldots$$

При k=1 имеем

$$\tilde{y}(x)=U_0(x)+C_1U_1(x).$$

То есть приближенное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} = C_1 x(1-x) = C_1\left(x - x^2\right).$$

Подставляем $\tilde{y}$ в заданный функционал:

$$J(\tilde{y}) = \int_0^1 \left(C_1\left(x-x^2\right)'^2 - C_1^2\left(x-x^2\right)^2 + 2xC_1\left(x-x^2\right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(C_1^2(1-2x)^2 + C_1^2\left(x-x^2\right)^2 + 2C_1\left(x^2-x^3\right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(C_1^2\left(1-4x+4x^2\right) + C_1^2\left(x^2-2x^3+x^4\right) + 2C_1\left(x^2-x^3\right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(C_1^2 - C_1^2 4x + C_1^2 4x^2 + C_1^2 x^2 - 2C_1^2 x^3 + C_1^2 x^4 + 2C_1 x^2 - 2C_1 x^3 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(C_1^2\left(5x^2 - 4x - 2x^3 + x^4\right) + 2C_1\left(x^2 - x^3\right) \right) dx =$$

$$= C_1^2 x\left(\frac{5x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 + 2C_1 x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}C_1 + \frac{3}{10}C_1^2 = \Phi(C_1).$$

Мы получили функцию одной переменной: $\Phi = \Phi(C_1)$. Найдем значение C_1, доставляющее этой функции экстремум:

$$\Phi' = \frac{6}{10}C_1 + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}C_1 + \frac{1}{6},$$

$$\frac{3}{5}C_1 + \frac{1}{6} = 0,$$

$$C_1 = -\frac{5}{18}.$$

Таким образом, получаем: $\tilde{y} = -\frac{5}{18}\left(x - x^2\right)$ - экстремаль.

4. Расчетно-графическая работа "Операционное исчисление. Уравнения математической физики"

1. Решить дифференциальное уравнение операционным методом $y''+2y'-y=2bc\cos(bt)-(b^2c+c)\sin(bt)$

$y(0)=0, \qquad y'(0)=bc$.

2. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом

$$\begin{cases} x'+2x+2y=(b+2c+2)e^{bt} \\ y'-2x+y=(bc+c-2)e^{bt} \end{cases}$$

$x(0)=1, \qquad y(0)=c$.

3. Решить уравнение теплопроводности методом конечных разностей. Результаты вычислений оформить в виде таблицы. Построить графики распределения температуры при t= 2 сек., 5 сек., 10 сек.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U\big|_{x=0}=0, \qquad U\big|_{x=l}=g(t), \qquad U\big|_{t=0}=0,$$

в области $\qquad 0\le x\le l, \qquad 0\le t\le T$.

Принять

$$l=1\,м, \qquad a=5\cdot 10^{-3}\ {}^{м^3}\!/_{сек}, \qquad T=10\,сек, \qquad g(t)=A\sin(\omega t),$$

$$A=\frac{2b+2c}{2b+c}, \qquad \omega=\frac{b}{3b+c}, \qquad \Delta x=0{,}1\,м, \qquad \Delta t=\frac{(\Delta x)^2}{2a}.$$

4. На струну длиной c постоянно действует возбуждающая внешняя сила, равная в расчете на единицу массы струны $\xi(x,t)=bx(c-x)$. Найти закон колебания струны, если начальное отклонение равно 0, а начальная скорость определяется функцией $\sin\frac{2\pi x}{c}$. Концы струны жестко закреплены. Решить задачу методом Фурье.

.

5. Найти экстремали функционала методом Ритца:

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2+(b-c)y^2+bxy\right)dx,$$

$y(0)=y(1)=0$. Взять $k=2$.

b — последняя цифра номера группы на курсе минус 1;
c — номер студента в групповом списке.

Список литературы

1. Цлаф, Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения/ Л.Я. Цлаф. — СПб.: Издательство «Лань», 2005.— 192с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 / Н.С. Пискунов. — М.: Интеграл-Пресс, 2004. — 544с.

Учебное издание

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания

Составители: ***Зубрина Лилия Григорьевна***
Чостковская Ольга Петровна

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 27.04.2010 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 1,75.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С- М23/2010

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.