ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Утверждено редакционно-издательским советом
в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 517.5

Составитель *О.К. Быстрова*

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. В. З е л е н с к и й

Элементы теории функций комплексного переменного: метод. указания / Сост. *О.К. Быстрова*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 24 с.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно-технических специальностей вузов. Приводятся основные теоретические сведения, решения учебных задач по разделу «Теория аналитических функций».

Методические указания могут быть рекомендованы для организации самостоятельной и индивидуальной работы студентов, а также преподавателям для подготовки и проведения практических занятий.

Подготовлены на кафедре высшей математики.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть D и H – множества комплексных чисел $D \subset \overline{C}, H \subset \overline{C}$, $\overline{C} = C \cup \{z = \infty\}$.

Эти множества можно геометрически иллюстрировать как множество точек плоскости. Для удобства рассмотрим две плоскости с прямоугольной системой координат на каждой. Одну плоскость будем называть плоскостью *(x,y)*, вторую – *(u,v)*. Будем изображать точки D точками плоскости *(x,y)*, а точки H – точками, расположенными в плоскости *(u,v)*.

Точки плоскости *(x,y)* будем обозначать z, а точки плоскости *(u,v)* будем обозначать w.

Пару действительных чисел *(x,y)* отождествим с комплексным числом $z=x+iy$, пару *(u,v)* – с комплексным числом $w=x+iy$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие единственное комплексное число $w \in H$, то говорят, что на множестве D определена комплексная функция комплексного переменного со значением из множества H, или определено отображение D в H.

Тот факт, что на D определена функция (отображение D в H), обозначается символически $w=f(z)$.

При этом значения $f(z)$ называются образами z, а значения z называются прообразами $f(z)$.

Будем обозначать $f(D) \subset H$ множество значений функции $f(z)$, определенной на D.

$f(D)$ называют также образом D при отображении $w=f(z)$.

Если $f(D) \equiv H$, то говорят, что функция $w=f(z)$ производит отображение D на H.

Пусть задано отображение множества D на множество H:

$$w = f(z). \tag{1}$$

Отображение (1) можно записать в координатной форме:

$$u=u(x,y,), \tag{2}$$

$$v=v(x,y).$$

Таким образом, задание одной функции (1) комплексного переменного эквивалентно заданию пары действительных функций действительных переменных (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число $b\in\overline{N}$ называется пределом *f(z)* при $z\to z_0[z\to\infty]$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ $[\Delta>0]$ такое, что неравенство $|f(z)-b|<\varepsilon$ $[|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}]$ выполняется при всех *z*, для которых $0<|z-z_0|<\delta$, $[|z|>\Delta]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 . Функция *w=f(z)* называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

При изучении отображений полезно считать функцию непрерывной в точке z_0 ,где $f(z_0)=\infty$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция *f(z)* называется обобщенно-непрерывной в точке z_0 расширенной плоскости $\overline{C}$, если $f(z_0)=\infty$ и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция *f(z)* называется обобщенно непрерывной в $z_0\in\overline{C}$, если для всякой последовательности точек $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к $f(z_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $D\subset\overline{C}$ называется областью, если оно открытое и связное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $D\subset\overline{C}$ называется открытым, если каждая его точка принадлежит *D* вместе с некоторой своей окрестностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множество $D\subset\overline{C}$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей *D*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 .Точка $z_0\in\overline{C}$ называется предельной точкой *D*, если всякая окрестность точки z_0 содержит точки *D*, отличные от z_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Множество *D* называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Точка $z_0 \in \overline{C}$ называется граничной точкой *D*, если всякая окрестность точки z_0 содержит точки *D* и точки, не являющиеся точками *D*.

Множество граничных точек *D* называют границей области *D* и обозначают ∂D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *f(z)* называется аналитической в области *D*, если она в каждой точке этой области имеет конечную производную.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Область *D* называется односвязной, если её граница ∂D является связным множеством.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области *D* была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы всюду в *D* $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы и выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Условия (3) и (4) называются условиями Даламбера-Эйлера-Коши-Римана.

Отметим теоремы, которые будем использовать при решении задач.

ТЕОРЕМА 2. Если $f_1(z),\ldots ,f_k(z)$ аналитические в области *D* функции, то их алгебраическая сумма, произведение являются функциями, аналитическими в *D*.

ТЕОРЕМА 3. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в области *D* функции, то их частное является аналитической функцией во всех точках области *D* , в которых $f_2(z)$ отлично от нуля.

ТЕОРЕМА 4. Если $w = f(z)$ аналитическая в *D* и $f(D)=H$ – область, в которой функция $\xi = \varphi(w)$ аналитическая, то функция $\xi = \varphi(f(z))$ является аналитической в области *D*.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой проколотой окрестности точки z_0, но в самой точке не имеет конечной производной.

Точку z_0 в таком случае будем называть изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Точку $z_0=\infty$ по определению будем считать особой точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Изолированная особая точка z_0 называется полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Изолированная особая точка z_0 называется устранимой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0 \in C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Изолированная особая точка z_0 называется существенно особой, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Задача 1. Вычислить $\cos(\frac{\pi}{2} + i)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, где $z=x+iy$. Тогда

$$\cos(\frac{\pi}{2} + i) = \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}1 - i\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}1 = -i\operatorname{sh}1 = -i\frac{e - e^{-1}}{2} = i\frac{1 - e^2}{2e}.$$

Задача 2. Вычислить $\sin(\frac{\pi}{3} - i)$.

Решение. Известно, что $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y$, следовательно

$$\sin(\frac{\pi}{3} - i) = \sin\frac{\pi}{3}\operatorname{ch}(-1) - i\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sh}(-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}1 + i\frac{1}{2}\operatorname{sh}1.$$

Задача 3. Вычислить $\operatorname{Ln}(-\sqrt{3} + i)$.

Решение. Так как $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, то

$$\operatorname{Ln}(-\sqrt{3} + i) = 2 + i(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k).$$

Главное значение аргумента будем брать из промежутка $[-\pi;\pi)$,

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = \frac{5\pi}{6}$. При $k=0$ $\left(\operatorname{Ln}\left(-\sqrt{3} + i\right)\right)_0 = 2 + \frac{5\pi i}{6}$.

Задача 4. Вычислить $(-1-i)^i$.

Решение. Известно, что $a^b = e^{b\ln a}$, $a \neq 0$. Тогда $(-1-i)^i = e^{i\ln(-1-i)}$

Вычислим $\mathrm{Ln}(-1-i) = \ln|-1-i| + i\,\mathrm{Arg}(-1-i)$.

$\arg(-1-i) = \mathrm{arctg}\,1 - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$, $\mathrm{Ln}(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k), k \in Z$.

Найдем показатель степени

$$i\,\mathrm{Ln}(-1-i) = i(\ln\sqrt{2} + i(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)) = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k + i\ln\sqrt{2}$$

Окончательно получим

$$(-1-i)^i = e^{\frac{3\pi}{4} - 2\pi k + i\ln\sqrt{2}} = e^{\frac{3\pi}{4} + 2\pi n}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}), n \in Z.$$

Задача 5. Решить уравнение $\sin z = 2$.

Решение. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$.

Пусть $e^{iz} = A$, тогда приходим к квадратному уравнению $A - A^{-1} = 4i$, т.е.

$A^2 - 4iA - 1 = 0$. $\quad A_{1,2} = 2i \pm \sqrt{4i^2 + 1} = 2i \pm \sqrt{-3} = i(2 \pm \sqrt{3})$.

Отсюда $e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3})$, значит $iz = \mathrm{Ln}[i(2i \pm \sqrt{3})]$,

$$z = -i[\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i\,\mathrm{Arg}(i(2 \pm \sqrt{3}))] = -i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) =$$

$$= +\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3}), k \in Z.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить cos (1+2i).

Ответ: cos (1+2i) = cos 1 ch 2 – $i$sin 1sh 2 ≈ 2,0327 – i3,052.

2. Вычислить sin (3-5i).

Ответ: sin (3-5i) = sin3 ch5 – $i$cos3 sh5 ≈ 10,471 + i73,4611.

3. Вычислить ln (3–2i).

Ответ: Ln (3–2i) = 0,5ln13 + i(2πk–arctg$\frac{2}{3}$), $k \in Z$. При $k = 0$ $(\ln(3-2i))_0 \approx 1{,}2825 - i0{,}588$.

4. Вычислить $(3-2i)^{1-2i}$.

Ответ:

$$(3-2i)^{1-2i} =$$

$$= \sqrt{13}e^{2(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+(2k+1)\pi}[\cos(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \ln 13) - \sin(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \ln 13)].$$

При $k = 0$ $((-3-2i)^{1-2i})_0 \approx 106{,}8549 + i248{,}435$.

5. Решить уравнение sin z = -1+i.

Ответ:

$$z = -i\left\{\operatorname{Ln}\sqrt{\left(-1+\sqrt[4]{5}\cos\frac{\phi+2\pi k}{2}\right)^2 + \left(-1+\sqrt[4]{5}\sin\frac{\phi+2\pi k}{2}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + i\operatorname{Arg}\left[1+\sqrt[4]{5}\cos\frac{\phi+2\pi k}{2} + i\left(-1+\sqrt[4]{5}\sin\frac{\phi+2\pi k}{2}\right)\right]\right\},$$

где $\phi = \operatorname{arctg} z$. При k = 0 $z_0 \approx$ -0,6662 – i0,5915.

2. ОТЫСКАНИЕ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Задача 1. Найти область аналитичности функции $f(z)=\dfrac{z^2+2z}{e^{3z}}$.

Решение. Данная функция определена всюду на C. Функции z^2+2z *и* e^{3z} являются аналитическими на всей комплексной плоскости. Функция e^{3z} не обращается в 0 ни в одной точке C. Функция $f(z)$ аналитична всюду на C. Точку $z_0=\infty$ по определению всегда считают особой. В нашем случае это существенно особая точка, т.к.

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+2z}{e^{3z}}=\begin{cases}0, & z=x\to+\infty\\ \infty, & z=x\to-\infty.\end{cases}$$

Задача 2. Найти область аналитичности функции $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z}$.

Решение. Функция $\dfrac{\sin z^2}{z}$ аналитическая на всей комплексной плоскости за исключением $z=0$.

Установим характер изолированной особой точки $z=0$. При $z\neq 0$ справедливо представление

$$\frac{\sin z^2}{z}=z-\frac{z^5}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

В силу абсолютной и равномерной сходимости ряда в правой части можно утверждать, что $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^2}{z}=0$. Таким образом, $z=0$ устранимая особая точка.

Изучим характер изолированной особой точки $z=\infty$. Разложение функции $f(z)$ в окрестности $z=\infty$ в ряд Лорана имеет вид

$$\frac{\sin z^2}{z}=z-\frac{z^5}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Следовательно, $z=\infty$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

Задача 3. Найти область аналитичности функции $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^2}$.

Решение. Функция *f(z)* аналитична на всей комплексной области за исключением $z = 1$. Найдем $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^2}=\infty$ (т.к. $\cos 2 \neq 0$).

Следовательно $z = 1$ является полюсом функции *f(z)* .Функцию $\cos 2z$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$, который сходится на всей комплексной плоскости:

$$\cos 2z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2+\frac{\pi n}{2})2^n}{n!}(z-1)^n.$$

Если $z-1 \neq 0$, то разделим на $(z-1)^2$, тогда

$$\frac{\cos 2z}{(z-1)^2}=\frac{\cos 2}{(z-1)^2}+\frac{2\sin 2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2+\frac{\pi n}{2})2^n}{n!}(z-1)^{n-2}.$$

Из вида этого ряда Лорана для функции *f(z)* заключаем, что $z=1$ является полюсом второго порядка.

Изучим теперь точку $z = \infty$. Если $z=x$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 2x}{(x-1)^2}=0$. Если же $z=1+iy$, то

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\cos(2+2iy)}{-y^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{\cos 2\cos 2iy-\sin 2\sin 2iy}{-y^2}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\cos 2\operatorname{ch}2y-i\sin 2\operatorname{sh}2y}{-y^2}=-\cos 2\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{ch}2y}{y^2}-\sin 2\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{sh}2y}{y^2}=\infty,$$

т.к. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\operatorname{ch}2y}{y^2}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2\operatorname{sh}2y}{2y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2\operatorname{ch}2y}{1}=+\infty,\quad \lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\operatorname{sh}2y}{y^2}=\infty.$

Следовательно $z=\infty$ является существенно особой изолированной особой точкой.

Задача 4. Найти область аналитичности функции

$$f(z)=\frac{e^z}{\cos z}.$$

Решение. Функция *f(z)* аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точек, где $\cos z= 0$, т.е. $z_k=\pi(2k+1)/2,\ k\in Z$.

Так как точки z_k являются простыми полюсами для функции $\cos z$ и $e^{z_k} \neq 0$, то z_k являются простыми полюсами для функции $f(z)$. Тогда $z = \infty$ является предельной точкой множества $\{z_k\}$ и, следовательно, не является изолированной особой точкой.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти область аналитичности функции $f(z) = \dfrac{z^3}{e^z}$.

Ответ: $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости С, $z = \infty$ – существенно особая точка, т.к. $\lim\limits_{z\to\infty} e^{-z}(z^3+1) = \begin{cases} 0, \text{ при } z = x \to +\infty, \\ \infty, \text{ при } z = x \to -\infty. \end{cases}$

2. Найти область аналитичности функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

Ответ: $f(z)$ аналитична на C, за исключением $z = 0$ – устранимой особой точки; $z = \infty$ – существенно особая точка, т.к.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\sin z}{z} = \begin{cases} 0, \text{ при } z = x \to +\infty, \\ \infty, \text{ при } z = iy,\ y \to \infty; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots - \text{Лорановское разложение, } z_0 = \infty \right).$$

3. Найти область аналитичности функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2+2z+1}$.

Ответ: $f(z)$ аналитична на С за исключением $z = -1$ – полюса второго порядка, т.к

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} - 1\right)}{n!} (z+1)^n,$$

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z+1)^2} + \frac{\sin 1}{z+1} + .. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} - 1\right)}{n!} (z+1)^{n-2}.$$

$z = \infty$ – существенно особая точка, т.к.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{(x+1)^2}=0,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{\cos iy}{-y^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{ch} y}{-y^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{sh} y}{-2y}=\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{ch} y}{-2}=-\infty.$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1. Интегралы по замкнутым контурам

Пусть L кусочно-гладкий замкнутый контур, лежащий в односвязной области D и не имеющий точек самопересечения, $f(z)$ – аналитическая в D функция, тогда $\oint f(\xi)d\xi = 0$ и для любой точки, лежащей «внутри» контура L, справедлива формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,\ n=0,1,2... \tag{3.1}$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в D, за исключением точек z_j, $j=\overline{1,m}$, то

$$\oint_L f(z)d\varsigma = \sum_{j=1}^{m}\oint_{L_j} f(\xi)d\xi \tag{3.2}$$

при условии, что внутри каждого L_j лежит лишь одна особая точка z.

Определение вычета функции.

Если функция $f(x)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением может быть самой точки z_0 ,то вычетом функции $f(z)$ относительно точки z_0, обозначаемым $\mathrm{Res}(f(z);z_0)$, называется число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(\eta)d\eta$, где C – некоторый простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0.

Из формулы (3.2) легко получить теорему о вычетах:

$$\oint_L f(\xi)d\xi = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z), z = z_j),$$

где z_j лежит «внутри» контура L.

Отметим, что вычет в устранимой особой точке равен нулю. Если эта точка является полюсом порядка m, то вычет относительно этого полюса вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Res}(f(z);z_j)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_j)^m f(z)\right]}{d\,z^{m-1}}. \qquad (3.3)$$

Из формулы легко получить частные случаи:

а) Пусть z_j – простой полюс (m=1,0!=1)

$$\mathrm{Res}(f(z);z_j)=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)^m f(z); \qquad (3.4)$$

б) z_j – простой полюс $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ(z) и ψ(z) аналитические функции в точке z_j, $\varphi(z_j)\neq 0$, $\psi(z_j)=0$, $\psi(z_j)\neq 0$,

$$\mathrm{Res}(f(z);z_j)=\frac{\varphi(z_j)}{\psi'(z_j)}. \qquad (3.5)$$

Эти формулы мы будем использовать при решении задач.

Теорема Коши для многосвязной области

Если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D, ограниченной контуром $Г$ и внутренними по отношению к нему контурами $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ и непрерывной в замкнутой области

$\overline{D}=D+F^t+\gamma_1+\ldots+\gamma_k$, то

$$\oint_{Г} f(z)dz=\sum_{l=1}^{k}\oint_{\gamma_1} f(z)dz. \qquad (3.6)$$

Вычет функции совпадает с коэффициентом C_{-1} ряда Лорана по степеням (z–z_0) функции $f(z)$. Вычет функции в изолированной особой точке $z_0=\infty$ равен $-C_{-1}$.

Теорема о полной сумме вычетов

Если $f(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, ... z_{N-1} и $z_N=\infty$, то

$$\sum_{K=1}^{N}\mathrm{res}f_{Z_k}(z)=0. \qquad (3.7)$$

Пример 1.

Найти значение интеграла

$\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z-2} dz$, где 1) $C=\{z|\ |z|=3\}$ 2) $C=\{z|\ |z-4|=1\}$.

Решение. 1) Функция $\cos\pi z$ аналитическая на всей комплексной плоскости. Воспользуемся интегральной формулой Коши. Из соотношения (3.1) при $n=0$ получим

$$\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z-2} dz = 2\pi i \cos 2\pi = 2\pi i,$$

т.к. точка $z=2$ лежит внутри окружности $|z|=3$.

Так как в замкнутой области $\overline{D_1}=\{z|\ |z-4|\le 1\}$ нет особых точек подынтегральной функции, то по теореме Коши интеграл равен 0.

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_C \frac{e^{-z}}{z^2-4z} dz$,

где 1) $C=\{z|\ |z|=1\}$, 2) $C=\{z|\ |z-2|=1\}$, 3) $C=\{z|\ |z-4|=1\}$.

Решение. 1) Внутри окружности лежит лишь одна особая точка подынтегральной функции: $z=0$. Функция $\frac{e^{-z}}{z^2-4z} dz$ аналитична в замкнутой области $\{z|\ |z|\le 1\}$. Воспользуемся интегральной формулой Коши, тогда $\oint\limits_C \frac{e^{-z}}{z^2-4z} dz = -\frac{\pi i}{2}$.

2) По теореме Коши интеграл равен 0.

3) Особая точка $z=4$ лежит внутри окружности $|z-4|=1$, поэтому

$$\oint\limits_C \frac{e^{-z}}{z^2-4z} dz = -\frac{\pi i}{2}.$$

Пример 3.

Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2} dz$.

Решение. Функция $\sin(z)$ аналитическая на всей комплексной плоскости, поэтому применим формулу (3.1):

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}(\sin(z))'|_{z=0}=2\pi i.$$

Пример 4

Вычислить $\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}dz$.

Решение. Точка $z=\pi$ лежит внутри окружности $|z-\pi|=1$. Функция $\cos z$ аналитическая по всей плоскости. Воспользуемся формулой (3.1) при $n=2$, получим:

$$\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=\pi}=\pi i.$$

Пример 5.

Вычислить $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z(2z+1)}dz$.

Решение. Функция $\frac{e^z-1}{z(2z+1)}$ является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точек $z_1=0$, $z_2=-1/2$. Применим теорему Коши для многосвязной области (формула (3.6)), тогда

$$I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z(2z+1)}dz.=\oint\limits_{|z|=\delta}\frac{e^z-1}{z(2z+1)}dz+\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\varepsilon}\frac{e^z-1}{z(2z+1)}dz,\ \varepsilon>0,\ \delta>0.$$

Каждый из интегралов в правой части вычислим с помощью формулы (3.1) при $n=0$:

$$\oint\limits_{|z|=\delta}\frac{e^z-1}{z(2z+1)}dz=2\pi i\frac{e^z-1}{2z+1}\Bigg|_{z=0}=0,$$

$$\oint\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{e^z-1}{2z(z+\frac{1}{2})}dz=2\pi i\frac{e^z-1}{2z}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=2\pi i(1-e^{-\frac{1}{2}})=I.$$

Пример 6.

Вычислить $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^3(z-1)^2}$.

Решение. Функция $\dfrac{1}{z^3(z-1)^2}$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точек $z_1=0$, $z_2=1$. Применим теорему Коши для многосвязной области (формула (3.6)), тогда

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)^2} = \oint\limits_{|z|=\delta} \frac{dz}{z^3(z-1)^2} + \oint\limits_{|z-1|=\varepsilon} \frac{dz}{z^3(z-1)^2}.$$

Каждый из интегралов в правой части вычислим с помощью формулы (3.1)

$$\oint\limits_{|z|=\delta} \frac{dz}{z^3(z-1)^2} = \frac{2\pi i}{2!}((z-1)^{-2})''\Big|_{z=0} = 6\pi i,$$

$$\oint\limits_{|z-1|=\varepsilon} \frac{dz}{z^3(z-1)^2} = \frac{2\pi i}{1!}(z^{-3})'\Big|_{z=1} = -6\pi i,$$

поэтому $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^3(z-1)^2} = 0$.

3.2. Интегралы от аналитических функций

Рассмотрим $\int\limits_L f(z)dz$, если $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, содержащей контур *L*, то для вычисления интеграла можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_L f(z)dz = F(b) - F(a),$$

где *F(z)* – первообразная функции *f(z)* ($F'(z) = f(z)$ в области *D*), *A* – начало, *B* – конец дуги *L*.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L \cos z \cdot e^z dz$,

где $L = \left\{ z \,\middle|\, |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi \right\}$.

Решение. $z_0 = 1$ – начало пути интегрирования, $z_1 = -1$ – его конец. Так как функция $f(z) = \cos z \cdot e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости, то можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница. Преобразуем сначала выражение

$$\cos z \cdot e^z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)e^z = \frac{1}{2}\left(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)}\right),$$

тогда первообразной для функции $f(z)$ будет функция

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}e^{z(1+i)} + \frac{1}{1-i}e^{z(1-i)}\right),$$

следовательно

$$\int\limits_L \cos z \cdot e^z dz = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}e^{z(1+i)} + \frac{1}{1-i}e^{z(1-i)}\right)\Bigg|_1^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\left(e^{-(1+i)} - e^{1+i}\right) + \frac{1}{1-i}\left(e^{-(1-i)} - e^{1-i}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-1-i-i\frac{\pi}{4}} - e^{1+i-i\frac{\pi}{4}} + e^{-1+i+i\frac{\pi}{4}} - e^{1-i+i\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-1}\cos\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + e\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L z\sin 2z dz$ по дуге L: $y = x^2$ от $A(0,\ 0)$ до $B(1,\ 1)$.

Решение. Для функции $f(z) = z\sin 2z$ первообразной будет $F(z) = -\frac{z}{2}\cos 2z + \frac{1}{4}\sin 2z$. Таким образом

$$\int\limits_L z\sin 2z dz = \left(-\frac{z}{2}\cos 2z + \frac{1}{4}\sin 2z\right)\Big|_{z_0=0}^{z_1=1+i} = -\frac{1+i}{2}\cos 2(1+i) + \frac{1}{4}\sin 2(1+i) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{2(1+i)i} + e^{-2(1+i)i}\right) + \frac{1}{8}\frac{e^{2(1+i)i} - e^{-2(1+i)i}}{2i}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{2i+i\frac{\pi}{4}-2} + e^{-2i+i\frac{\pi}{4}+2}\right) + \frac{1}{32}i\left(e^{-2+2i} - e^{2-2i}\right) = \frac{e^{-2}}{4}\left(\frac{e^{2i+i\frac{\pi}{2}}}{8} - \sqrt{2}e^{2i+i\frac{\pi}{4}}\right) -$$

$$-\frac{e^{2-2i}}{4}\left(\frac{i}{8} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{e^{-2+2i}}{4}\left(\frac{i}{8} - 1 - i\right) - \frac{e^{2-2i}}{4}\left(\frac{i}{8} + 1 + i\right) =$$

$$= \frac{e^{-2+2i}}{4}\left(-1 - \frac{7}{8}i\right) - \frac{e^{2-2i}}{4}\left(1 + \frac{9}{8}i\right).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \sin z \cdot e^z dz$, где L = AB – дуга $|z| = 1$, A(-1, 0), B(1, 0).

Ответ:

$$\int\limits_L \sin z \cdot e^z dz = \frac{1}{2}e^z(\sin z - \cos z)\Big|_{z_1=-1}^{z_2=1} = \sin 1 \operatorname{ch} 1 - \cos 1 \operatorname{sh} 1.$$

№2. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\cos z dz$ по дуге L: $y = 5x$ от A(-1, -5) до B(0,0).

Ответ:

$$\int\limits_L z\cos z\, dz = (z\sin z + \cos z)\Big|_{z_1=-1-5i}^{z_2=0} = 1 - (1+5i)\sin(1+5i) - \cos(1+5i) =$$

$$= 1 - \sin 1 \operatorname{ch} 5 + 5\cos 1 \operatorname{sh} 5 - \cos 1 \operatorname{ch} 5 + i(\sin 1 \operatorname{ch} 5 - 5\sin 1 \operatorname{ch} 5 + 5\cos 1 \operatorname{sh} 5).$$

3.3. Интегралы по незамкнутым кривым

Пусть L незамкнутая дуга (гладкая), заданная в виде: $z(t)=x(t)+iy(t),\ \alpha \le t \le \beta$. Будем считать, что направление на дуге от $z(\alpha)=A$ до $z(\beta)=B$. Функция *f(z)=u+iv* непрерывна в некоторой области, содержащей L, функция *z(t)* – непрерывно-дифференцируема, тогда $\int\limits_A^B f(z)dz = \int\limits_A^B (u+iv)(dx+idy)$.

Задача №1. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z+2\overline{z})dz$, где L: $y = \cos x$, от $A(0,\,1)$ до $B(\frac{\pi}{2},\,0)$.

Решение. На дуге L:

$$z = x+iy = x+i\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\quad z+2\overline{z} = 3x-iy,$$

$$(z+2\overline{z})dz = (3x-iy)d(x+i\cos x) = (3x-iy)(dx-i\sin x dx) =$$
$$(3x-iy-3ix\sin x+y\sin x)dx.$$

$$\int\limits_L (z+2\overline{z})dz = \int\limits_0^{\pi/2} (3x+\cos x\sin x)dx - i\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x+3x\sin x)dx =$$

$$= \frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}-i\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}+3\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)\right) = \frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}-4i.$$

.

Задача №2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{1+2z}{\overline{z}}dz$,

$$L = \left\{ z \,\big|\, |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решение. На дуге L:

$$z = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\qquad \frac{1+2z}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}+2\frac{z}{\overline{z}} = e^{i\varphi}+2\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{i\varphi}+2e^{2i\varphi};$$

$dz = d\left(e^{i\varphi}\right) = ie^{i\varphi}d\varphi$.

Поэтому

$$\int\limits_L \frac{1+2z}{\overline{z}}dz = \int\limits_0^{\pi/2}\left(2e^{2i\varphi}+e^{i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi = 2i\int\limits_0^{\pi/2}e^{3i\varphi}d\varphi + i\int\limits_0^{\pi/2}e^{2i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}e^{3i\varphi}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}e^{2i\varphi}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}i - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№1. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z+2\overline{z})dz$, где L: $y=\sin x$, от $A(0, 0)$ до $B(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Ответ:

$$\int\limits_L (z+2\overline{z})dz = \int\limits_0^{\pi/2}\left(3x - i\sin x\right)\left(1+i\cos x\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\left(3x+\sin x\cos x\right)dx + i\int\limits_0^{\pi/2}\left(3x\cos x - \sin x\right)dx =$$

$$= \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{1}{2} + i\left(\frac{3}{2}\pi - 4\right).$$

№2. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\cdot\overline{z}dz$,

где L: $z=\cos\varphi + i\sin\varphi$, $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$.

Ответ:

$$\int\limits_L z\cdot\overline{z}dz = \int\limits_L\left(dx+idy\right) = \int\limits_0^{\pi}\left(-\sin\varphi + i\cos\varphi\right)d\varphi = 2.$$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Вариант №1.

1. Найти область аналитичности функции $f(z)=\overline{z}\cdot|z|$.

2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Найти область сходимости полученного разложения.

3. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_l \dfrac{\overline{z}}{z}dz$,

где $l=\left\{ z \,\|z|=1,\ \dfrac{\pi}{2}\le \arg z \le \pi \right\}$.

4. Найти $\int\limits_{c^+} \dfrac{dz}{z^3\left(z^8+1\right)}$, где $c=\left\{ z \,\|z|=\dfrac{1}{2} \right\}$.

Ответы: 1. $f(z)$ нигде не является аналитической.

2. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$.

3. 1-i.

4. 0.

Вариант №2.

1. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $f(z)=e^{z+2\overline{z}}$.

2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$ и найти область сходимости полученного разложения.

3. Вычислить комплексный интеграл $\int\limits_l \dfrac{dz}{\overline{z}}$,

где $l=\left\{ z \,\middle|\, |z|=1,\ \ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

4. Найти с помощью основной теоремы Коши о вычетах интеграл $\int\limits_{c^+} \dfrac{dz}{\left(1+z^{16}\right)z}$, где $c=\left\{ z \,\middle|\, |z|=\dfrac{3}{2} \right\}$.

Ответы: 1. Условия Коши-Римана нигде не выполняются.

2. $f(z)=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-3} z^n,\ |z|>1$.

3. -1.

4. 0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Романовский, П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.И. Романовский. – М.: Наука, 1980. 334 с.
3. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1976. 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания

Составитель ***Быстрова Ольга Константиновна***

Редактор Н. С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 25. 05.07 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,5.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-88/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

С А М А Р А 2007