

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

**В. М. Журавлев**

**Физика околоземного космического пространства**

Космофизический практикум  
(Приложение к электронному космофизическому практикуму)

САМАРА

2010

Автор: ЖУРАВЛЕВ Виктор Михайлович

Космофизический практикум состоит из трёх разделов: Земля, Солнце, Математические алгоритмы обработки данных. Приводится теоретический материал и текст программ для выполнения заданий

Космофизический практикум предназначен для магистрантов, обучающихся по магистерской программе «Космические информационные системы и наноспутники. Навигация и дистанционное зондирование» по направлению 010900.68 «Прикладные математика и физика».

Космофизический практикум разработан на межвузовской кафедре космических исследований.

## 1 Введение в космофизический практикум

В отличие от задач обычного физического практикума, в котором основную роль играют задачи, в которых студент должен научиться работать непосредственно с приборами, которые имеются в его распоряжении в данный момент времени, задачи космофизического практикума используют данные, полученные дистанционно от приборов, которые находятся на борту космических аппаратов (КА) или от служб слежения за спутниками. Дистанционные измерения представляют собой один из широко используемых в настоящее время способов проведения физического эксперимента. Этот подход связан не только с измерениями на орбите или межпланетных станциях, но и с условиями проведения экспериментов внутри активных зон атомных и химических реакторов, ускорителей, глубоководных аппаратов, медицинских экспериментов и т.д. Поэтому приобретение навыков и умения работать с данными, получаемыми дистанционно, представляет один из важных элементов подготовки современного исследователя, и особенно физика.



## Глава 1

# Земля. Движение искусственных спутников Земли



# 1 Теоретические основы

## 1.1 Движение точечной частицы в поле тяготения Земли

### Кеплеровские орбиты

Уравнения Ньютона движения точечной частицы произвольной массы  $m$  в поле тяготения имеют следующий общий вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi. \quad (1.1)$$

Здесь  $\phi$  - гравитационный потенциал поля тяготения. Потенциал гравитационного поля тела, обладающего сферической симметрией, имеет вид:

$$\phi = \frac{GM}{r}.$$

В таком поле сохраняется момент импульса спутника:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \text{const.}$$

В силу этого удобно выбрать систему координат таким образом, чтобы плоскость движения спутника (плоскость орбиты) была ортогональна постоянному вектору  $\mathbf{L}$ . Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{L}$ . В этом случае  $\mathbf{L} = (0, 0, L_z)$ . Переходя теперь к полярным координатам в плоскости орбиты получаем:

$$L_z = mr^2\dot{\phi} = \text{const.} \quad (1.2)$$

В выбранной полярной системе координат закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

$$E_0 = \frac{m}{2}(v_r^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{mMG}{r} = \text{const.} \quad (1.3)$$

Здесь  $v_r$  - радиальная скорость спутника,  $E_0$  - полная энергия. Этот закон сохранения с учетом (1.2) приобретает такую форму, в которую входят лишь функции радиальной координаты:

$$E_0 = \frac{m}{2} \left( \left[ \frac{dr}{dt} \right]^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{mMG}{r} = \text{const.} \quad (1.4)$$

Эта форма закона сохранения энергии соответствует одномерному радиальному движению частицы в потенциальном поле тяготения с эффективной потенциальной энергией

$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r},$$

отличающейся от потенциальной энергии исходной задачи наличием слагаемого, соответствующего энергии орбитального движения.

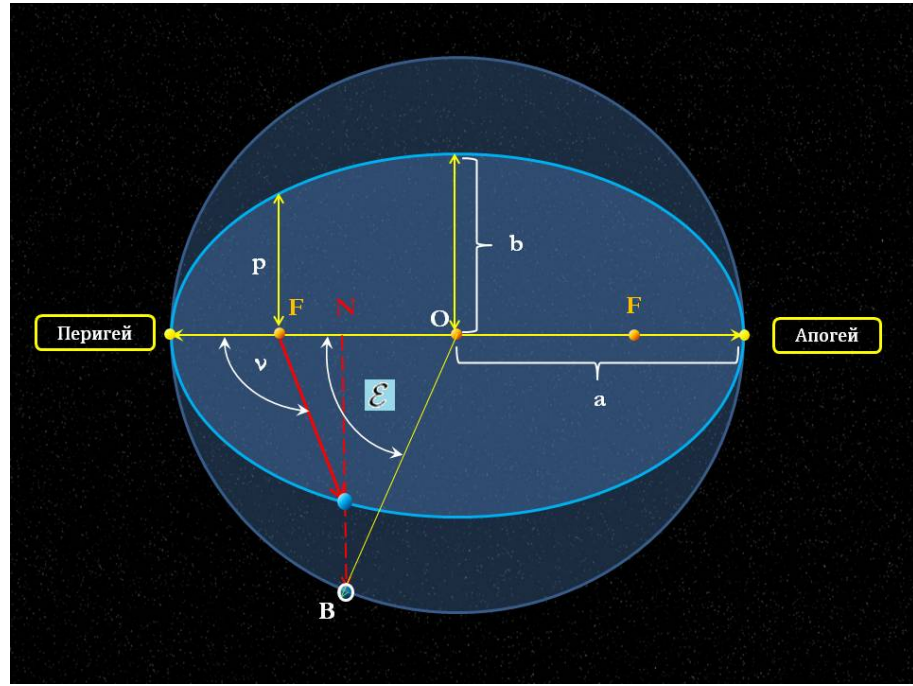


Рис. I-1. Элементы эллиптической орбиты

Для описания траектории спутника в рассматриваемом поле тяготения полезно преобразовать (1.4) к форме закона сохранения гармонического осциллятора. Это позволяет получить ряд соотношений на основе этой аналогии с гармоническим осциллятором. Делая последовательно замены переменных  $r(t) = r(\phi(t))$  и  $\zeta(\phi) = r^{-1}(\phi)$ , получаем:

$$\frac{L_z^2}{2m} \left( \left[ \frac{d\zeta}{d\phi} \right]^2 + \zeta^2 \right) - mMG\zeta = E_0$$

или окончательно:

$$\left[ \frac{d\zeta}{d\phi} \right]^2 + \left[ \zeta - \frac{m^2MG}{L_z^2} \right]^2 = \frac{2mE_0}{L_z^2} + \left[ \frac{m^2MG}{L_z^2} \right]^2 = \text{const.}$$

Полученный закон сохранения энергии совпадает по форме с законом сохранения энергии гармонического осциллятора единичной массы, единичной частоты и положением

равновесия в точке с координатой  $\zeta_0 = \frac{m^2 MG}{L_z^2}$ . При этом угловая переменная  $\phi$  играет роль времени. Поскольку закон движения гармонического осциллятора заранее известен, можем сразу записать решение для эффективной его координаты  $\zeta$  в виде:

$$\zeta = \frac{1}{r} = \frac{m^2 MG}{L_z^2} + A \cos(\phi - \phi_0).$$

Это решение удобно представить в форме канонического уравнения эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.5)$$

где  $p$  - фокальный параметр,  $e$  - эксцентриситет. Угол  $\nu = \phi - \phi_0$ , отсчитываемый от направления на перигей, называется истинной аномалией. Перигеем называется точка минимального расстояния орбиты от центра поля, апогеем - точка максимального удаления, если она есть. все эти параметры изображены на рис. I-1. На этом рисунке, в частности, угол  $\mathcal{E}$  относительно центра эллипса, отсчитываемый от перигея до прямой  $OB'$ , называется эксцентрической аномалией  $\mathcal{E}$ .

Используя полученное решение, можно связать канонические параметры эллипса с динамическими параметрами движения спутника - его полной энергией и моментом импульса. Для этого воспользуемся некоторыми простыми соображениями. В апогее и перигее радиальная компонента скорости равна нулю. Поэтому из закона сохранения энергии находим:

$$E_0 = \frac{L_z^2}{2mr_{a,p}^2} - \frac{mMG}{r_{a,p}},$$

где  $r_a$  и  $r_p$  - расстояния от центра поля (Земли) в апогее и перигее соответственно. Складывая эти два соотношения для  $r_a$  и  $r_p$ , учитывая определение большой полуоси  $a$ :  $a = (r_a + r_p)/2$ , приходим к следующей формуле для полной энергии

$$E_0 = -\frac{mGM}{2a}. \quad (1.6)$$

Отсюда получаем полезное соотношение для модуля скорости орбитального движения:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1.7)$$

где  $\mu = MG$ .

Теперь можно получить выражения для расстояний в апогее и перигее как функций динамических параметров спутника:

$$\frac{1}{r_{a,p}} = \frac{m^2 MG}{L_z^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 2E_0 \frac{L_z^2}{M^2 m^3 G^2}} \right).$$



С другой стороны, из канонического уравнения эллипса (1.5) имеем

$$r_p = \frac{p}{1+e}, \quad r_a = \frac{p}{1-e}. \quad (1.8)$$

Отсюда получаем выражение для прицельного параметра орбиты  $p$  и эксцентриситета  $e$  так же, как для функций динамических параметров движения спутника:

$$p = \frac{2r_p r_a}{r_p + r_a} = \frac{L_z^2}{m^2 M G}, \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \sqrt{1 + 2E_0 \frac{L_z^2}{M^2 m^3 G^2}}. \quad (1.9)$$

Для описания закона движения спутника по орбите используется уравнение Кеплера, которое имеет следующий вид:

$$\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} = n(t - t_0) + \mathcal{M}_0. \quad (1.10)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  - эксцентрическая аномалия, величина  $\mathcal{M} = n(t - t_0) + \mathcal{M}_0$  - называется средней аномалией, а величина  $\mathcal{M}_0$  - **средней аномалией в эпоху** ( $t_0$ ),  $n = \sqrt{M G a^{-3}}$  - **среднее движение**. Геометрический смысл эксцентрической аномалии пояснен на рис. I-1. Эксцентрическая аномалия связана с естественной аномалией (угол  $\nu$  на рис. I-1) формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{E}}{2} \quad (1.11)$$

Из этих двух уравнений определяется истинная аномалия, соответствующая определенному моменту времени  $t$  и, следовательно, положение спутника на орбите, например, относительно перигея.

### Положение орбиты в пространстве

Полученные соотношения позволяют рассчитать параметры эллиптической орбиты спутника. Однако для задач навигации необходимо знать не только параметры эллипса, но и то, как орбита расположена в пространстве по отношению к геоцентрической системе координат. Для спутников Земли эти геометрические параметры положения орбиты в геоцентрической декартовой системе координат вводятся следующим образом. Ось  $z$  этой системы координат совпадает с осью вращения Земли с положительным направлением на северный полюс. Эта точка на небесной сфере располагается вблизи Полярной звезды. Ось  $x$  направляется из центра Земли в точку весеннего равноденствия, которая в современную эпоху находится в созвездии Золотой рыбы. Ось  $y$  - перпендикулярна двум другим.

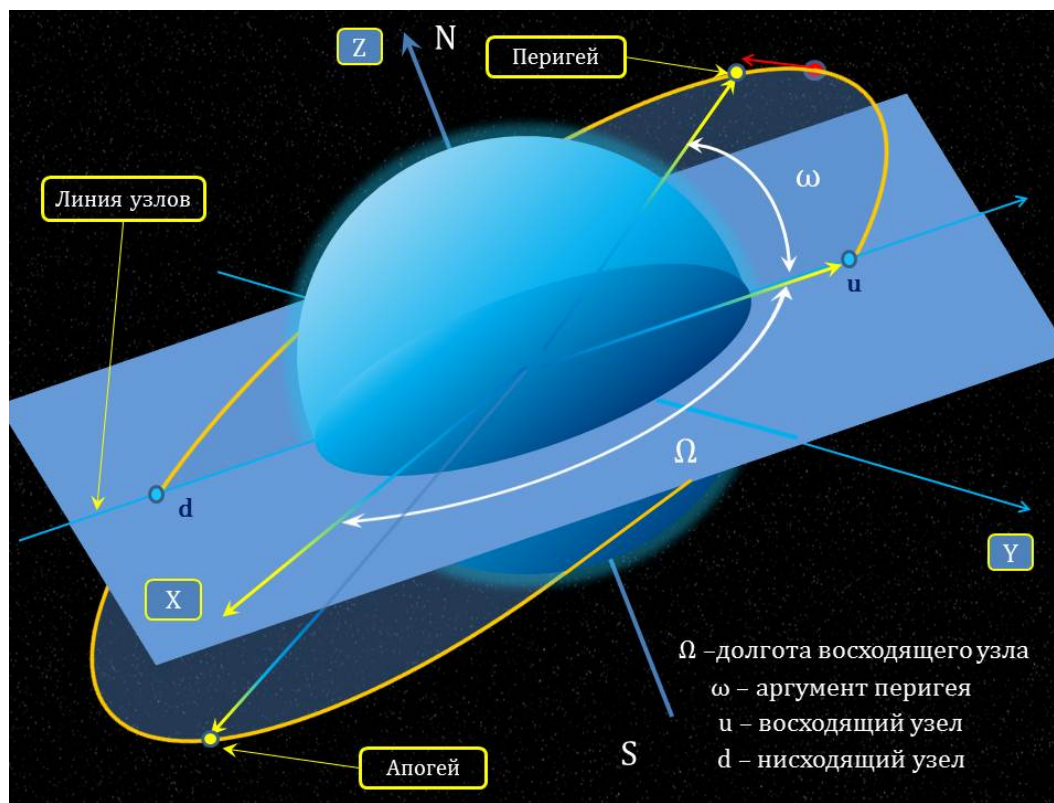


Рис. I-2. Положение орбиты в пространстве

Точка пересечения орбиты с экваториальной плоскостью называется **узлом орбиты**. Точка, где спутник переходит из южной полусферы в северную, называется **восходящим узлом**. Противоположная относительно центра Земли точка - **нисходящий узел**. Угол между направлением на точку весеннего равноденствия и восходящим узлом, т.е. между осью  $x$  и восходящим узлом, называется **долготой восходящего узла** и обозначается здесь через  $\Omega$ . Угол в плоскости орбиты, отсчитываемый от восходящего узла до перигея называется **аргументом перигея** и обозначается  $\omega$ . Угол между плоскостью орбиты и экваториальной плоскостью называется **наклоном орбиты** и обозначается здесь через  $i$ . Также в параметры орбиты входит фокальный параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$ . Для наглядности эти параметры приведены на рис. 2.

Декартовы координаты спутника в геоцентрической системе координат будут иметь при этом следующий вид:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \quad (1.12)$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \quad (1.13)$$

$$z = r \sin u \sin i. \quad (1.14)$$

Здесь  $u = \nu + \omega$ .

Подробности можно найти в [1]<sup>1</sup>. Полный набор формул смотрите в [5] (стр. 171-180)<sup>2</sup>,

### Основные формулы моделирования кеплеровской орбиты

Будем предполагать, что все кеплеровские параметры орбиты известны, например, из данных NORAD. Для того, чтобы получить изображение орбиты в проекции на вращающуюся Землю с учетом движения спутника по орбите, полезно воспользоваться следующими формулами для предварительного вычисления декартовых координат спутника в неподвижной системе отсчета, связанной с удаленными звездами. Эти формулы таковы<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos \mathcal{E}), \\ \xi &= a(\cos \mathcal{E} - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin \mathcal{E}, \\ x &= P_x \xi + Q_x \eta, \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta, \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  - вспомогательные орбитальные координаты, а направляющие косинусы  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos(\omega) - \sin \Omega \sin(\omega) \cos i, \\ P_y &= \sin \Omega \cos(\omega) + \cos \Omega \sin(\omega) \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \\ Q_x &= -\cos \Omega \sin(\omega) - \sin \Omega \cos(\omega) \cos i, \\ Q_y &= -\sin \Omega \sin(\omega) + \cos \Omega \cos(\omega) \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i. \end{aligned}$$

Направляющие косинусы должны удовлетворять следующим условиям, которые служат для контроля правильности вычислений:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1,$$

<sup>1</sup>А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986 г.

<sup>2</sup>Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. под. ред. Дубошина, М.:Изд. Наука, 1971, 584 с.

<sup>3</sup>Дубошин и др., стр. 173

$$\begin{aligned} Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1, \\ Q_x P_x + Q_y P_y + Q_z P_z &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что величины  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  вычисляются один раз при поступлении информации о новых параметрах орбиты спутника от наземных служб, поскольку содержат только параметры кеплеровской орбиты.

Для вычисления движения спутника по орбите в проекции на небесную сферу необходимо воспользоваться формулами пересчета декартовых координат в сферические:

$$\lambda = \lambda_0 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}, \quad (1.16)$$

где  $\lambda$  - долгота точки проекции положения спутника на небесную сферу,  $\lambda_0$  - текущая долгота точки весеннего равноденствия, в которую направлена ось  $X$  геостационарной системы координат,  $\theta$  - ее широта, а декартовы координаты  $x, y, z$  и расстояние спутника от центра Земли  $r$  вычисляются по выше приведенным формулам.

Текущее положение спутника в неподвижной системе координат вычисляется с помощью решения уравнения Кеплера относительно эксцентрической аномалии  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} = n(t - t_0) + M_0 = M, \quad (1.17)$$

где  $\mathcal{E}$  - эксцентрическая аномалия,  $n$  - среднее движение,  $t_0$  - эпоха,  $M_0$  - средняя аномалия в эпоху. Численное решение этого уравнения наиболее просто можно получить с помощью метода итераций:

$$\mathcal{E}_{k+1} = e \sin \mathcal{E}_k + n(t - t_0) + M_0, \quad k = 0, \dots$$

Начальным значением следует выбирать

$$\mathcal{E}_0 = n(t - t_0) + M_0,$$

а заканчивать процесс итераций при достижении требуемой точности, т.е. когда величина  $\mathcal{E}_{k+1} - \mathcal{E}_k$  становится меньше заданного значения. Для эксцентриситета  $e < 0.5$  число итераций не превосходит 5 при точности 7-8 знаков после запятой.

Переход во вращающуюся вместе с Землей систему отсчета производится вычислением долготы  $\lambda_0$  по формуле:

$$\lambda_0(t) = \lambda_0(0) - \left( \frac{1}{365.242} + 1 \right) \frac{(t - t_0)}{86400} 360^\circ$$

где  $\lambda_0(0)$  - значение долготы точки весеннего равноденствия в эпоху  $t_0$ . Поскольку данные о времени от NORAD поступают в сутках, то удобно эти формулы привести к

этим единицам измерения времени, а угловые переменные к градусам, что соответствует естественным географическим координатам.

Скорость движения спутника по орбите может быть вычислена следующим образом. Продифференцируем (1.15) по времени. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = V_r = -ae \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -a \sin \mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = a\sqrt{1-e^2} \cos \mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \\ V_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = P_\alpha \frac{d\xi}{dt} + Q_\alpha \frac{d\eta}{dt} = a \left( -P_\alpha \sin \mathcal{E} + Q_\alpha \sqrt{1-e^2} \cos \mathcal{E} \right) \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Дифференцируя (??) по  $t$ , находим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos \mathcal{E}}.$$

Окончательно находим

$$V_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = P_\alpha \frac{d\xi}{dt} + Q_\alpha \frac{d\eta}{dt} = an \frac{\left( -P_\alpha \sin \mathcal{E} + Q_\alpha \sqrt{1-e^2} \cos \mathcal{E} \right)}{1 - e \cos \mathcal{E}}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.19)$$

Для круговой орбиты  $e = 0$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = n = \text{const.}$$

В этом случае

$$V_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = P_\alpha \frac{d\xi}{dt} + Q_\alpha \frac{d\eta}{dt} = -anP_\alpha \sin \left( n(t - t_0) + \mathcal{M}_0 \right) + anQ_\alpha \cos \left( n(t - t_0) + \mathcal{M}_0 \right),$$

Из этих соотношений с помощью простых вычислений <sup>4</sup> находим:

$$\begin{aligned} V^2 &= \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \\ V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu, \\ V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu). \end{aligned}$$

И соответственно:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\cos \Omega \sin(\omega) - \sin \Omega \cos(\omega) \cos i) V_n = \frac{x}{r} V_r + Q_x V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin \Omega \sin(\omega) + \cos \Omega \cos(\omega) \cos i) V_n = \frac{y}{r} V_r + Q_y V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + (\cos(\omega) \sin i) V_n = \frac{z}{r} V_r + Q_z V_n. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Дубошин и др., стр. 174

### Движение в сфероидальном поле. Точные формулы

В случае, если гравитационное поле планеты не является точно сферическим, то форма орбиты и характер движения спутника по орбите усложняются. В простейшем случае, если в гравитационном поле Земли учесть вторую зональную гармонику  $J_2$ , то потенциал гравитационного поля примет следующий вид:

$$U = -\frac{GM_E m}{r} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \left( 3 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \cdot \frac{R_E^2}{r^2} \right], \quad (1.20)$$

где  $m$  - масса спутника, и использовано тождество  $\cos \theta = z/r$ . Учет только зональных гармоник эквивалентен предположению, что форма Земли является фигурой вращения относительно оси, проходящей через полюса планеты, которую будем обозначать осью  $Z$ . Влияние дополнительного слагаемого приводит к тому, что плоскость орбиты спутника начинает медленно поворачиваться вокруг оси  $Z$ . Вместе с вращением плоскости орбиты, что выражается монотонном увеличении долготы восходящего узла орбиты, меняется также и положение перигея. Поэтому все величины  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $\mathcal{M}$  изменяются со временем. Скорость изменения этих величин пропорциональна  $J_2$ . Поэтому, измеряя величины  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\mathcal{M}}_0$ , можно вычислить величину  $J_2$  и оценить степень отклонения формы Земли от сферы. Для этого можно воспользоваться формулой:

$$J_2 = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{R_P}{R_E} \right)^2 - 1 \right],$$

где  $R_P$  - полярный радиус Земли, а  $R_E$  - экваториальный радиус Земли.

Точный анализ, учитывающий возможное отклонение орбиты от круговой, показывает, что формулы для скорости вековых изменений величин  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\mathcal{M}}_0$  имеют такой вид:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} J_2 \left( \frac{R_E}{p} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}, \quad (1.21)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} J_2 \left( \frac{R_E}{p} \right)^2 \frac{(1 - 5 \cos^2 i)}{(1 - e^2)^2}, \quad (1.22)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_0}{dt} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} J_2 \left( \frac{R_E}{p} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (1.23)$$

Здесь  $p = a(1 - e^2)$  - фокальный параметр орбиты,  $R_E$  - экваториальный радиус Земли,  $a$  - большая полуось орбиты. Видно, что для круговой орбиты формула для  $\Omega$  в точности совпадает с полученной нами ранее.

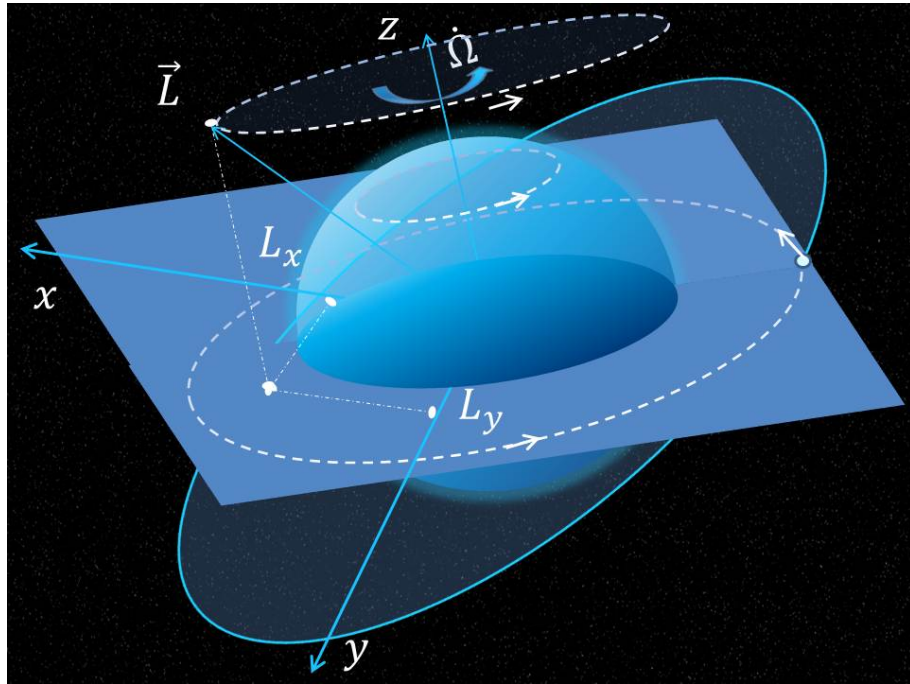


Рис. 1-3. Вращение плоскости орбиты орбиты в пространстве.

Эти уравнения можно интерпретировать как величину изменения элементов орбиты в радианном или угловом исчислении за некоторый промежуток времени, например, за один оборот спутника вокруг Земли. Однако, как будет ясно из дальнейшего, в реальных данных обычно параметры задают за сутки. Величина  $n = \sqrt{GMa^{-3}}$  называется средним движением и в данных NORAD приводится в виде числа оборотов за сутки. Долгота восходящего узла и аргумент перигея в данных NORAD приводятся в градусах. В этих единицах  $\Delta\Omega$  и  $\Delta\omega$  за сутки примет следующий вид:

$$\Delta\Omega_{day} = \frac{3}{2}360nJ_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 \cos i, \quad (1.24)$$

$$\Delta\omega_{day} = \frac{3}{4}360nJ_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 i), \quad (1.25)$$

$$\Delta\mathcal{M}_{0day} = \frac{3}{4}360nJ_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 (3 \cos^2 i - 1) \quad (1.26)$$

Величина  $360n$  представляет собой суммарный угловой набег истинной аномалии за сутки. Теперь мы можем легко сделать оценки для величины изменения долготы восходящего

узла, аргумента перигея и средней аномалии за сутки для некоторых характерных спутников. Так для полярных метеорологических спутников типа NOAA  $n \sim 14 \text{ rev/day}$ ,  $R_E/p \sim 1.2$ ,  $i = 98^\circ$ ,  $\cos i \sim -1.2$ . Используя значение  $J_2$  из таблицы 1, находим  $\Delta\Omega_{day} \sim 1^\circ$ ,  $\Delta\omega_{day} \sim 3^\circ$ .

Формулы (1.24) и (1.25) взяты из [3]<sup>5</sup>. Формула (1.26) взята из справочного руководства [5](стр. 438)<sup>6</sup>, которое содержит справочный материал по всем параметрам движения спутника. Между формулами, приводимыми в [3] и [5] имеется незначительное различие, состоящее в отсутствии и наличии (соответственно) множителя  $(1 - e^2)^{-2}$  для первых двух формул и множителя  $(1 - e^2)^{-3/2}$  для средней аномалии. Для почти круговых орбит эти множители практически не отличаются от 1. Подробности теории движения спутника в сфероидальном поле Земли можно найти в [4]<sup>7</sup>.

## 1.2 Влияние сопротивления атмосферы на движение спутника

Целью этой задачи является проверка простой модели действия силы молекулярного сопротивления со стороны атмосферы на спутники, находящиеся на сравнительно невысоких почти круговых орбитах.

Пусть спутник массы  $m$  и площадью поперечного сечения  $\sigma$  движется по орбите, испытывая лобовое сопротивление атмосферы. Обозначим концентрацию молекул атмосферных газов на высоте орбиты через  $\mathcal{N}$ . Тогда за время  $dt$  спутник столкнется с  $dN = \mathcal{N}dV$  молекулами, находящимися в объеме  $dV = v\sigma dt$ , поэтому  $dN = \mathcal{N}v\sigma dt$  (см. рис. 6).

Будем предполагать, что удар каждой молекулы абсолютно упругий. Тогда за время  $dt$  молекулы передадут спутнику импульс, равный  $dp = 2m_0vdN = 2v^2m_0\sigma\mathcal{N}dt$ . Здесь  $m_0$  - масса одной молекулы. Отсюда находим, что сила сопротивления, испытываемая спутником равна:

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{F}_d = -2v^2\rho\sigma = -\gamma v^2,$$

где  $\gamma = 2\rho\sigma$  - коэффициент трения,  $\rho = m_0\mathcal{N}$  - плотность атмосферы.

<sup>5</sup>В.В. Белецкий. Очерки о движении космических тел. М:“Наука”,1972, 320 с.

<sup>6</sup>Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. под. ред. Дубошина, М.:Изд. Наука, 1971, 584 с.

<sup>7</sup>Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968, Ч.IV, Гл.XII, с. 566-652



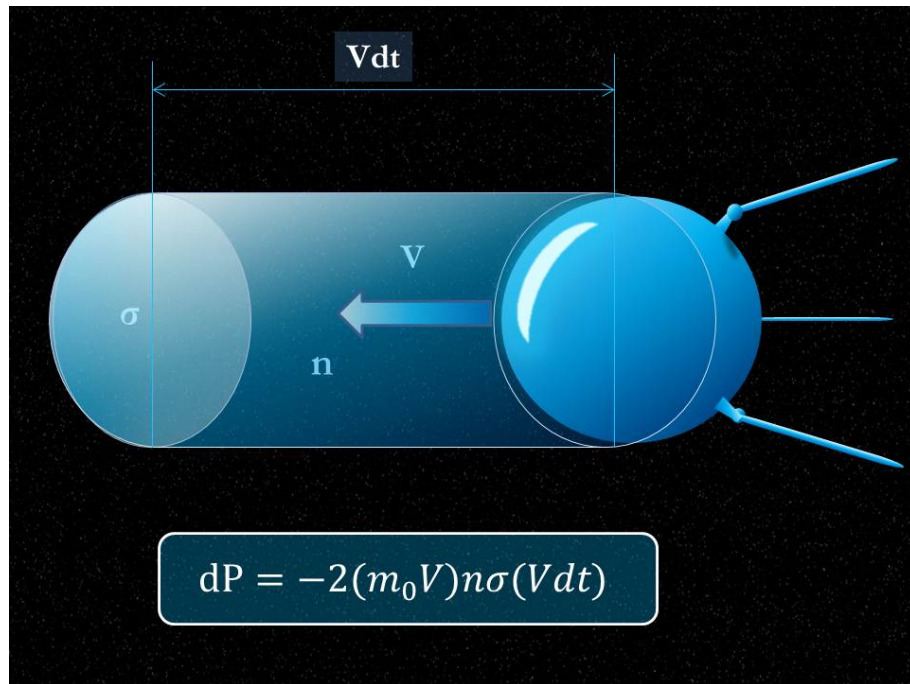


Рис. I-4. К выводу силы молекулярного сопротивления.

Рассмотрим движение спутника в потенциальном поле сил под действием такой силы трения. Уравнение движение спутника в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla U - \mathbf{F} = -\nabla U - v\mathbf{v}\gamma.$$

Умножим это уравнение скалярно на скорость движения спутника. После несложных преобразований получаем:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mv^2}{2} + U \right] = -\gamma v^3.$$

Отсюда удельная полная энергия спутника  $E_m = E_0/m$  меняется согласно уравнению:

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v^3.$$

Предположим, что спутник движется по орбите с малым эксцентриситетом  $e \ll 1$ , т.е почти по круговой орбите. В этом случае радиальная составляющая скорости спутника

значительно меньше скорости орбитального движения  $v_\phi = r\dot{\phi}$ . Поэтому можно считать, что:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2} \simeq v_\phi = r\dot{\phi} = \frac{L}{rm} = \frac{L_m}{r},$$

где  $L$  - модуль орбитального момента импульса спутника, а  $L_m = L/m$  - удельный момент импульса. Тогда получаем следующее соотношение:

$$\frac{r^3}{L_m^3} \frac{dE_m}{dt} = -\gamma/m = \text{const.} \quad (1.27)$$

Задачей данной лабораторной работы является проверка этого соотношения.

Учитывая (??), соотношение (1.27) можно представить следующим образом:

$$-\frac{p^3}{(\mu p)^{3/2}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{(1-e^2)\mu}{p} \right] = -\gamma/m$$

Здесь  $\mu = M_E G$ . Поскольку предполагается, что орбиты спутников, изучаемых в данной задаче, близки к круговым (малый эксцентриситет), то  $r \sim p$ . Кроме этого в формуле для полной энергии отброшены возмущающие добавки, связанные с несферичностью Земли в силу их малости. В результате последнее соотношение можно привести к следующему виду

$$\rho = -\frac{m}{\sigma\sqrt{\mu}} \frac{d\sqrt{p}}{dt}. \quad (1.28)$$

Таким образом, эта формула позволяет оценить относительное изменение плотности атмосферы на высоте орбиты спутника. Для вычисления абсолютного значения плотности атмосферы необходимо знать поперечное сечение спутника и его массу.

## 2 Входные данные для выполнения работ

Задачи космофизического практикума, относящиеся к разделу “Механика”, требуют умения работать с данными о кеплеровских элементах орбиты спутников, которые поступают от станций слежения. Одной из самых полных баз данных о спутниках, которая пополняется регулярно и имеет открытый доступ для большинства спутников, является база данных NORAD (Национальная служба космической обороны США). Однако существуют базы данных на других сайтах. Необходимые данные можно получать в открытом доступе с частного сайта DR. T.S. Kelso <sup>8</sup>: [www.celestrak.com](http://www.celestrak.com).

<sup>8</sup>TS.Kelso@celestrak.com

### Данные NORAD в формате TLE

Данные, получаемые от службы NORAD в формате TLE имеют вид трех строчных записей. Одна из них необязательная содержит имя спутника (строка 0). Две других обязательных строки содержат полную информацию о кеплеровской орбите спутника, каждая из которых имеет следующие шаблоны:

```

0  АAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
1  nnnnnU nnnnaaaa nnnnn.nnnnnnnnn +.nnnnnnnnn +nnnnn-n +nnnnn-n nnnnnn
2  nnnnn nnn.nnnnn nnn.nnnnn nnnnnnnn nnn.nnnnn nnn.nnnnn nn.nnnnnnnnnnnnnnnnn
    
```

Строка 0 представляет собой 24 символьное (24 байта) имя спутника, присвоенное ему в системе NORAD (NORAD SATCAT).

Строки 1 и 2 содержат информацию в соответствии с Таблицей 2 (следует учитывать форму шаблонов).

Строка 1	
Номера байтов	Описание
01	Номер строки
02	Пробел
03-07	Номер, присвоенный спутнику в системе NORAD
08	Классификация спутника (U- не классифицирован)
09	Пробел
10-11	Международный код (две последние цифры года запуска)
12-14	Международный код (номер запуска в году)
15-17	Международный код (число ступеней ?)
18	Пробел
19-20	Год эпохи (Две последние цифры года)
21-32	Эпоха <sup>9</sup> (день года и дробная часть дня вместе с десятичной точкой)
33	Пробел
34-43	Первая производная по времени среднего движения (с десятичной точкой)
44	Пробел
45-52	Вторая производная по времени среднего движения (десятичная точка предполагается)
53	Пробел
54-61	коэффициент трения в атмосфере (BSTAR drag term)

<sup>9</sup>Эпоха - момент времени, соответствующий определенному положению плоскости экватора

62	Пробел
63	тип эфемериды
65-68	Число элементов
69	Контрольная сумма(по модулю 10) (Буквы, пробелы, точки, знак плюс (“+”) - 0, знак минус (“-”)- 1)

Строка 2	
Номера байтов	Описание
01	Номер строки
02	Пробел
03-07	Номер, присвоенный спутнику в системе NORAD
08	Пробел
09-016	Наклонение (в градусах)
17	Пробел
18-25	Долгота восходящего узла (в градусах)
26	Пробел
27-33	Эксцентриситет (десятичная точка предполагается)
34	Пробел
35-42	Аргумент перигея (в градусах)
43	Пробел
44-51	Средняя аномалия (в градусах)
52	Пробел
53-63	Среднее движение (Число оборотов в сутки)(Revs per day)
64-68	Число оборотов в эпоху (Оборот [Revs])
69	Контрольная сумма (по модулю 10) (Буквы, пробелы, точки, знак плюс (“+”) - 0, знак минус (“-”)- 1)

Таблица 2. Формат данных в двухстрочном элементе описания кеплеровской орбиты в системе NORAD.

Все данные орбиты отнесены к одной эпохе, указанной в первой строке. Напомним, что долгота восходящего узла отсчитывается от направления на точку весеннего равноденствия, направление на которую привязано (условно) к неподвижной небесной сфере. Это направление медленно смещается за счет смещений оси вращения Земли и

других процессов. Однако для задач практикума можно с большой степенью точности считать, что плоскость экватора, направление на точку весеннего равноденствия и ось вращения Земли неподвижны.

Пример:

NOAA 14

```
1 23455U 94089A 97320.90946019 .00000140 00000-0 10191-3 0 2621
2 23455 99.0090 272.6745 0008546 223.1686 136.8816 14.11711747148495
```

В этом фрагменте метеорологический спутник под именем NOAA 14 имеет номер в системе NORAD 23455. Спутник не идентифицируется - параметр U. Год запуска - 1994. Номер запуска в этом году по счету - 89. Эпоха, в которую производилось измерение параметров орбиты - 320.90946019 день в 1997 году, т.е. положение оси вращения Земли, плоскости экватора и направление на точку весеннего равноденствия относятся именно к этому моменту времени. Далее, наклонение орбиты равно 99.0090 градусов, долгота восходящего узла в эпоху - 272.6745. Эксцентриситет - 0.0008546 (орбита почти круговая). Аргумент перигея - 223.1686 градусов. Средняя аномалия в эпоху - 136.8816, а среднее движение - 14.11711747 или число оборотов, сделанных спутником к моменту измерения - 14849.

Файлы, содержащие набор таких записей, обычно носят расширение TLE и используются многими программными комплексами слежения за спутниками и любительскими программами (например, Orbitron ([www.stoff.pl](http://www.stoff.pl))). При реализации задач на компьютере в космофизическом практикуме удобно иметь копию данных о наборе спутников в формате TLE за несколько лет. Такие данные имеются, например, на сайте [www.celestrak.com](http://www.celestrak.com). Часть такого файла приведена на следующей таблице для спутника NOAA17:

```
1 27453U 02032A 03036.91173877 .00000252 00000-0 13090-3 0 3431
2 27453 98.7603 108.1893 0012457 36.6226 323.5801 14.23284986 32161
1 27453U 02032A 03037.12263737 .00000259 00000-0 13369-3 0 2941
2 27453 98.7603 108.3991 0012453 35.9336 324.2677 14.23285178 32198
1 27453U 02032A 03037.89593266 .00000255 00000-0 13208-3 0 2957
2 27453 98.7602 109.1685 0012437 33.8535 326.3432 14.23285612 32304
1 27453U 02032A 03037.96623227 .00000255 00000-0 13205-3 0 2975
2 27453 98.7602 109.2384 0012436 33.6520 326.5446 14.23285653 32315
1 27453U 02032A 03038.95042518 .00000275 00000-0 14086-3 0 3378
2 27453 98.7600 110.2175 0012397 30.9679 329.2227 14.23286491 32457
1 27453U 02032A 03039.09102410 .00000280 00000-0 14294-3 0 2963
```

2	27453	98.7600	110.3574	0012393	30.4998	329.6899	14.23286631	32473
1	27453U	02032A	03039.93461765	.00000289	00000-0	14705-3	0	2974
2	27453	98.7599	111.1966	0012352	28.3357	331.8490	14.23287295	32596
1	27453U	02032A	03040.91880989	.00000291	00000-0	14782-3	0	3437
2	27453	98.7597	112.1756	0012326	25.4619	334.7164	14.23287992	32732
1	27453U	02032A	03041.12970817	.00000294	00000-0	14934-3	0	2982
2	27453	98.7597	112.3855	0012317	24.8073	335.3700	14.23288166	32761

### 3 Задачи практикума

#### 3.1 Задача 1. Измерение $J_2$ по вековым изменениям кеплеровских параметров орбиты спутник

Измерение параметра  $J_2$  - амплитуды второй зональной гармоники может быть произведено с помощью любой из формул (1.24)- (1.26). Графики векового изменения трех основных параметров долготы восходящего узла, аргумента перигея и средней аномалии представляют собой почти прямые линии, угол наклона которых и содержат информацию о величине второй зональной гармоники  $J_2$ . Для NOAA-17 эти графики приведены на рис. 7-9. На этом же рисунке приведена красным цветом прямая линейной регрессии. На рис. 10 приведено отклонение изменения долготы восходящего узла от векового, полученное вычитанием из исходных данных регрессионной прямой. Эти отклонения на сравнительно небольших отрезках представляют собой гармонические колебания для долготы восходящего узла и аргумента перигея. Параметры этих колебаний так же могут служить основой для измерения величины амплитуды второй зональной гармоники.

#### Задание.

1. Для нескольких, заданных преподавателем спутников, имеющих различное наклонение орбиты, сделайте выборку из файла данных NORAD по параметрам орбиты спутника за определенный период времени. Необходимо сделать выборку по долготы восходящего узла  $\Omega$ , средней аномалии  $M_0$ , аргументу перигея  $\omega$ , среднему движению  $n$ , наклонению  $i$ .

2. Постройте графики изменения разности  $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_E$  долготы восходящего узла  $\Omega$  за заданный период времени и суточного вращения Земли  $\Omega_E$  для всех спутников. Аналогично постройте графики средней аномалии  $M_0$ , аргументу перигея  $\omega$

3. Вычислите среднее значение фокального параметра орбиты  $p$  по данным о среднем движении  $n$  и оцените статистическую погрешность вычисления  $p$ . То же самое сделайте для наклонения орбиты.

4. По этим данным с помощью метода наименьших квадратов оцените тангенс угла наклона  $R_{ant} = \operatorname{tg} \alpha$  графиков векового смещения восходящего узла, аргумента перигея и средней аномалии. Параметр  $R_{ant}$  представляет собой в используемых единицах величину смещения восходящего узла в градусах за сутки. С помощью формул (1.24), (1.25), (1.26) вычисляются значения амплитуды зональной гармоники  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{2}{3} \frac{R_{ant}}{360n \cos i} \left( \frac{p}{R_E} \right)^2,$$

$$J_2 = \frac{4}{3} \frac{R_{arp}}{360n(1 - 5 \cos^2 i)} \left( \frac{p}{R_E} \right)^2,$$

$$J_2 = -\frac{4}{3} \frac{R_{aan}}{360n(3 \cos^2 i - 1)} \left( \frac{p}{R_E} \right)^2.$$

Здесь  $n$  берется непосредственно из данных NORAD, т.е. в единицах - число оборотов в сутки. Заметим, что число  $360n$  представляет собой полный набег угла (естественной аномалии) за сутки. Множителем  $(1 - e^2)^2$  в силу его близости к 1 мы пренебрегаем.

5. Оцените статистическую погрешность оценки  $J_2$ .
6. Сравните результаты для нескольких спутников.

### Вопросы для подготовки к выполнению задачи

1. Что такое зональные, тессериальные и секториальные сферические гармоники поля планеты? Опишите качественно их основные характеристики.
2. Как связаны амплитуды вторых гармоник с моментом инерции Земли?
3. В таблице 1 (на стр. ) приведены значения зональных гармоник для планет солнечной системы. Дайте качественное объяснение относительным различиям значений второй и последующих гармоник у различных планет.
4. Что такое узел орбиты? Объясните его геометрический смысл.
5. Опишите качественно характер изменения долготы восходящего узла для экваториальных орбит и полярных орбит спутника.
6. Что такое оскулирующие элементы орбиты?
7. Что такое аргумент перигея спутника? Объясните его геометрический смысл.
8. Опишите качественно характер изменения аргумента перигея для экваториальных орбит и полярных орбит спутника.
9. Что такое критическое наклонение орбиты?
10. Что такое естественная, эксцентрическая и средняя аномалии? Объясните их геометрический смысл.
11. Запишите (выведите) уравнение Кеплера. Как связаны друг с другом естественная, эксцентрическая и средняя аномалии?



### 3.2 Задача 2. Измерение $J_2$ по долгопериодическим изменениям кеплеровских параметров орбиты спутника

Измерение параметра  $J_2$  - амплитуды второй зональной гармоники может быть произведено также с помощью формул долгопериодических возмущений орбиты, которые связаны с  $J_2$ . Долгопериодические возмущения для аргумента перигея и средней аномалии представляют собой почти гармонические отклонения от вековых возмущений, амплитуда которых пропорциональна второй зональной гармонике  $J_2$ . Согласно теории возмущений (см. [4]), поправки к вековым возмущениям имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M &= M' + \frac{1}{16} J_2 \left( \frac{R_{Eth}}{a} \right)^2 \eta^3 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \sin 2\omega', \\ \omega &= \omega' - \frac{1}{16} J_2 \left( \frac{R_{Eth}}{a} \right)^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \sin 2\omega' + O(e_0^2). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Здесь введены обозначения:

$$\eta = \sqrt{1 - e_0^2}, \quad \theta = \cos(i_0).$$

В этих формулах параметры  $M', \omega'$  с точностью до  $J_2^2$  совпадают с вековыми изменениями орбиты, т.е. растут линейно.

Для вычисления поправок необходимо вычесть из графика изменения  $M(), \omega()$  вековые возмущения  $M', \omega'$ , которые были получены в первой лабораторной работе. Остаточный ряд как раз представляет собой долгопериодические возмущения орбиты, в которые дают вклад и другие внешние силы, например, силы тяготения Луны и Солнца. Однако эти величины сравнительно малы. Амплитуду периодических изменений в остаточном ряде можно оценить с помощью метода наименьших квадратов для гармонической пробной функции. Характерный вид остаточных возмущений от векового движения параметров орбиты приведен на рис. I-5 для NOAA-17.

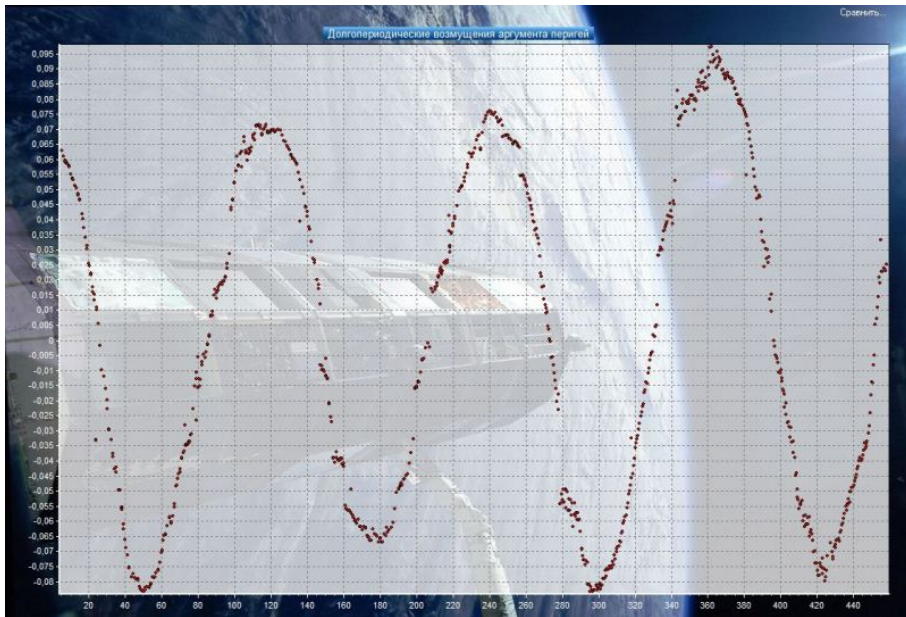


Рис. I-5. Остаточный ряд аргумента перигея спутника NOAA-17.

В данной задаче предлагается с помощью метода наименьших квадратов оценить основной период квазигармонического процесса и его амплитуду. А затем, воспользовавшись формулами (1.29) оценить параметр  $J_2$ .

### Задание.

1. Для нескольких, заданных преподавателем, спутников, имеющих различное наклонение орбиты, сделайте выборку из файла данных NORAD по параметрам орбиты спутника за определенный период времени. Необходимо сделать выборку по аргументу перигея  $\omega$ , средней аномалии  $M_0$ , среднему движению  $n$  и наклонению  $i$ .

2. С помощью метода наименьших квадратов оцените тангенс угла наклона  $R_{anl} = \operatorname{tg} \alpha$  графиков векового смещения аргумента перигея и средней аномалии и точки смещения линейной регрессии.

3. Вычтите из исходных данных полученные линейные регрессионные зависимости  $\omega'(t)$  и  $M'_0(t)$ .

4. С помощью метода наименьших квадратов для гармонической пробной функции вычислите амплитуду колебаний в остаточном ряде. Используя формулы (1.29), оцените величину  $J_2$ .

5. Оцените статистическую погрешность оценки  $J_2$ .

6. Сравните результаты для нескольких спутников и с оценкой, полученной по вековым возмущениям.

### Вопросы для подготовки к выполнению задачи

1. Что такое зональные, тессериальные и секториальные сферические гармоники поля планеты? Опишите качественно их основные характеристики.
2. Как связаны амплитуды вторых гармоник с моментом инерции Земли?
3. В таблице 1 (на стр. ) приведены значения зональных гармоник для планет солнечной системы. Дайте качественное объяснение относительным различиям значений второй и последующих гармоник у различных планет.
4. Что такое узел орбиты? Опишите качественно характер изменения долготы восходящего узла для экваториальных орбит и полярных орбит спутника.
5. Что такое оскулирующие элементы орбиты?
6. Что такое аргумент перигея спутника? Объясните его геометрический смысл.
7. Опишите качественно характер изменения аргумента перигея для экваториальных орбит и полярных орбит спутника.
8. Что такое критическое наклонение орбиты?
9. Что такое естественная, эксцентрическая и средняя аномалии? Объясните их геометрический смысл.
10. Запишите (выведите) уравнение Кеплера. Как связаны друг с другом естественная, эксцентрическая и средняя аномалии?

### 3.3 Задача 3. Исследование изменчивости плотности атмосферы на высоте спутника с помощью метода оценивания величины сопротивления атмосферы

Исследуя изменение среднего движения на больших промежутках времени от нескольких месяцев до десятков лет, можно выявить то, как менялась плотность атмосферы за этот промежуток времени. Изменение плотности атмосферы на высоте орбиты спутников меняется по двум основным причинам. Первая состоит в медленном снижении

орбиты спутника и увеличении плотности атмосферы на более низких орбитах. Второй причиной изменения плотности атмосферы является ее разогрев солнечными излучениями. Наиболее интересным в задаче является выяснение того, как меняется плотность атмосферы из-за ее разогрева Солнцем.

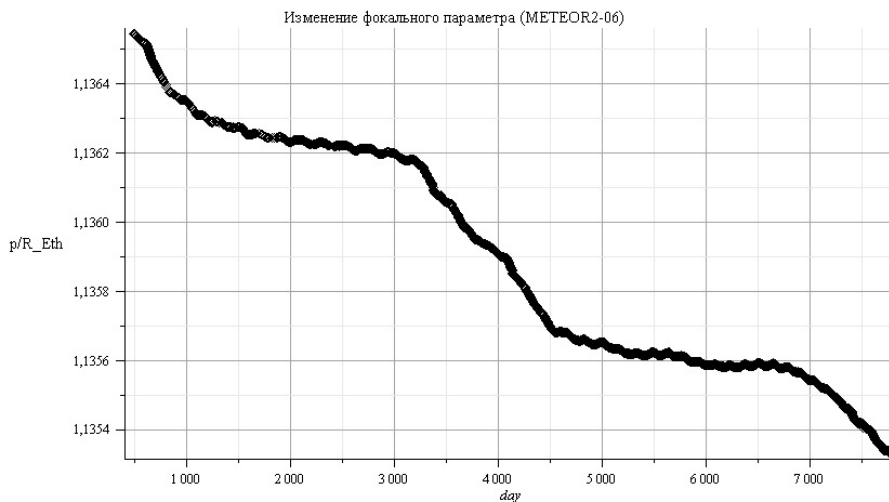


Рис. I-6. Пример вычисления зависимости фокального параметра от времени.

Имеются два основных явления, которые можно наблюдать с помощью исследования изменения радиуса орбиты спутника. Первое проявляется на отрезках времени порядка нескольких месяцев. Поскольку атмосфера Земли постоянно нагревается Солнцем с той стороны, которая обращена к Солнцу, то с этой стороны атмосфера является более вытянутой в сторону Солнца, чем в перпендикулярном направлении. В результате при анализе данных можно наблюдать вариации плотности, которые имеют характерный период, совпадающий с периодом векового вращения плоскости орбиты спутника.

Для выполнения этой лабораторной необходимо в первую очередь выбрать из данных NORAD данные о движении спутников, орбиты которых близки к круговым. Следует выбирать спутники, орбиты которых не изменяются в течение достаточно большого времени с помощью двигателей орбитального маневрирования. Анализ орбит можно проверить по исследованию графиков изменения долготы восходящего узла, аргумента перигея  $\omega$ , средней аномалии  $M_0$ , среднему движению  $n$  и наклонению  $i$ . После выборки данных можно приступить к выполнению работы.

### Задание.

1. Для заданных преподавателем спутников за определенный период времени (с помощью написанной вами программы (см. примерные листинги на Maple ) выберите в отдельный файл данные по элементам орбиты.

2. Постройте графики изменения удельной полной энергии, удельного момента импульса и фокального параметра.

3. С помощью методов сглаживания рядов, например, с помощью низкочастотной фильтрации, вычислите сглаженный ряд параметра  $\sqrt{p(t)}$ .

4. С помощью вычисления центральной (правой или левой) разностной производной или методом наименьших квадратов, вычислите скорость изменения параметра  $\sqrt{p(t)}$  как функции времени на всем интервале времени. Полученные в пунктах 3 и 4 данные выведите на один график. Сделайте анализ графиков и объясните его (возможно используя дополнительную информацию об активности Солнца).

5. Считая, что масса спутника и его поперечное сечение не меняются, оцените относительное изменение плотности атмосферы на высоте орбиты спутника за период от нескольких месяцев до нескольких лет. С помощью гармонического анализа вычислите характерный период изменения плотности атмосферы и сравните его с угловой скоростью векового вращения плоскости орбиты.

#### Вопросы для подготовки к выполнению задачи

1. Как влияет на форму орбиты сопротивление атмосферы?
2. Опишите качественно изменение формы сильно эллиптической орбиты во время прохождения спутника вблизи Земли (перигея)?
3. Опишите качественно изменение параметров почти круговой орбиты вблизи Земли за счет сопротивления атмосферы?
4. Чем могут быть вызваны краткопериодические увеличения коэффициента трения атмосферы?

### 3.4 Задача 4. Исследование взаимосвязи изменений плотности атмосферы и солнечной активности

Второе явление, которое можно наблюдать с помощью оценивания, связано с изменениями солнечной активности Солнца с характерным периодом порядка 11 лет. При возрастании активности Солнца атмосфера Земли разогревается заметно больше из-за увеличения потоков заряженных частиц, падающих на Землю. Это приводит к заметному увеличению скорости уменьшения радиуса орбиты спутника. Это явление можно наблюдать, если следить за спутниками, которые провели на орбите достаточно много времени, т.е. несколько лет и больше.

Для выполнения этой лабораторной необходимо в первую очередь выбрать из данных NORAD для определенного спутника или спутников параметры орбиты за достаточно большой период времени и пересчитать значения удельной полной энергии, удельного момента импульса, большой полуоси и построить их графики. Затем с помощью метода наименьших квадратов оценить скорость убывания полной энергии спутника. После этого можно рассчитать удельный коэффициент сопротивления атмосферы.

### Задание.

1. Для заданных преподавателем спутников за большой период времени в несколько десятков лет (с помощью написанной вами программы (см. примерные листинги на Maple ) выберите в отдельный файл данные по элементам орбиты.

2. Постройте графики изменения удельной полной энергии, удельного момента импульса и фокального параметра.

3. С помощью методов сглаживания рядов, например, с помощью низкочастотной фильтрации, вычислите сглаженный ряд параметра  $\sqrt{p(t)}$ . Подберите длину фильтра таким образом, чтобы в ряде остались только изменения с характерным масштабом более одного года.

4. С помощью вычисления центральной (правой или левой) разностной производной или методом наименьших квадратов, вычислите скорость изменения параметра  $\sqrt{p(t)}$  как функции времени на всем интервале времени. Полученные в пунктах 3 и 4 данные выведите на один график. Сделайте анализ графиков и объясните его, используя дополнительную информацию об активности Солнца. В качестве такой информации взять данные ряда чисел Вольфа (например, по адресу: [ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/stp/solar\\_data/sunspot\\_numbers/international/monthly/MONTHLY.PLT.](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/stp/solar_data/sunspot_numbers/international/monthly/MONTHLY.PLT) )

5. Для сравнения ряда чисел Вольфа с данными о плотности атмосферы из необходимо сгладить. Наложите графики и вычислите коэффициент корреляции между относительной плотностью атмосферы и числами Вольфа.

## 3.5 Задача 5. Моделирование движения спутника на низких орбитах вблизи Земли

Одной из задач, которую постоянно приходится решать при анализе данных, которые поступают со спутников Земли - это вычисление положения спутника по отношению к Земле, в которых было произведено то или иное измерение параметра космической среды. Необходимость решения этой задачи обусловлено тем, что положение спутника не всегда может быть получено прямым измерением его координат. Для многих спутников их положение определяется только наземными службами наблюдения, которые передают данные от нескольких раз в сутки до нескольких раз в неделю. Во все промежуточные

моменты времени положение спутника вычисляется с помощью решения задачи о движении спутника.

В данной задаче предлагается написать небольшую программу вычисления географических координат проекции положения спутника на небесную сферу в заданный момент времени, если известны кеплеровские параметры орбиты спутника. Предлагается это сделать без учета несферичности Земли и других возмущающих факторов.

В данной задаче предлагается вычислить орбиту спутника по данным, которые можно получить из системы NORAD. такие вычисления можно сделать на основе формул (1.15), (1.16), (1.17) и т.д. В данной задаче предлагается исследовать орбиту спутников, высота орбиты которых находится в диапазоне от сотен до нескольких тысяч километров.

### Задание.

1. Для заданных преподавателем спутников выберите данные по его элементам орбиты в некоторую эпоху  $t_0$ .
2. По выбранным параметрам постройте графики проекции орбиты спутника на географическую карту с учетом вращения Земли.
3. Сравните вычисленное положение спутника с его реальным положением по данным системы NORAD. Оцените точность совпадения координат.
4. Объясните отклонения.

## **3.6 Задача 6. Моделирование движения спутника на геостационарной орбите**

Особые типы орбит приводят к некоторым интересным эффектам при их проекции на поверхность Земли. К таким орбитам относятся геостационарные орбиты. На этих орбитах в настоящее время находится множество научных и телекоммуникационных спутников. Поэтому важно уметь рассчитать орбиту геостационарного спутника.

### Задание.

1. Для заданных преподавателем геостационарных спутников выберите данные по его элементам орбиты в некоторую эпоху  $t_0$ .
2. По выбранным параметрам постройте графики проекции орбиты спутника на географическую карту с учетом вращения Земли.
3. Сравните вычисленное положение спутника с его реальным положением по данным системы NORAD. Оцените точность совпадения координат.
4. Объясните различия между поведением различных геостационарных спутников.

## 4 Приложение 1. Тексты программ для выполнения заданий

Текст программы на языке C (компании BorlandC), позволяющий выбирать из файлов данных спутника необходимые данные.

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <mem.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

void main(void) {
    // Переменные типа FILE для файла данных спутника - file и
    // graph - файла выходных данных
    FILE *file,*graph;
    // Строковая переменная Buff используется для чтения двух
    // строк элемента данных NORAD
    char Buff[141];
    // Задаются имена входного файла (FileName[60]) и выходного
    // файла (FileGraph[60])
    char FileName[60]="NOAA-17.txt";
    char FileGraph[60]="ALNOAA17.txt";
    int l,i;
    // переменная data используется для чтения эпохи.
    // AscNodLong - долгота восходящего узла (в градусах)
    // amove - среднее движение в сек-1.
    // p - фокальный параметр в метрах
    // a - большая полуось в метрах
    // e - эксцентриситет
    // mu=M_Eth*G - произведение массы Земли на грав. постоянную G
    // Energym - удельная полная энергия
    // Lm - удельный момент импульса
    double data,AscNodLong,amove,de2,p,e,a,mu,Energym,Lm;
    double Pi=3.141592L, // Число Pi
        R_Eth=6378000, // Экваториальный радиус Земли в метрах
        M_Eth=5.98E24, // Масса Земли в кг
```



```
G=6.672E-11;      // Гравитационная постоянная в системе СИ

mu=M_Eth*G;

// Строковые переменные
char SData[13];      // Эпоха
char SAMove[13];     // Среднее движение (оборотов в сутки)
char SAscNodLong[10]; // Долгота восходящего узла (в градусах)
char SEccentr[8];    // Эксцентриситет *10^7 (мантиса без дес. точки)
char SIncl[9];       // Наклонение (в градусах)
char SArgPer[9];     // Аргумент перигея (в градусах)
char Sp[9];          // Фокальный параметр

// Очистка строковых переменных

setmem(Buff,141,0);
setmem(SData,13,0);
setmem(SAscNodLong,9,0);
setmem(SAMove,13,0);
setmem(SEccentr,8,0);
setmem(SIncl,9,0);
setmem(SArgPer,9,0);
setmem(Sp,9,0);

// Открытие файлов
if(NULL ==(file=fopen(FileName,"r") )) {
puts("File error!"); exit(0);}
if(NULL ==(graph=fopen(FileGraph,"w") )) {
puts("File error!"); exit(0);}

// По строчное чтение данных из файла данных спутника
for(i=1;i<100;i++)
{
    // Копирование двух строк в буфер
    fread(Buff,1,140,file);
    // Копирование из буфера в строковые переменные
    memscpy(SData,&Buff[20],12);
    memscpy(SData,&Buff[20],12);
}
```

```

    memcpy(SAMove,&Buff[70+52],11);
    memcpy(SEccentr,&Buff[70+26],7);
    memcpy(SIncl,&Buff[70+8],8);
    memcpy(SArgPer,&Buff[70+34],8);
    memcpy(SAscNodLong,&Buff[70+17],8);
    // Вычисление переменных
    data=atof(SData);
    amove=atof(SAMove)*2.0L*Pi/(3600.0L*24.0L);
    a=pow(mu/(amove*amove),1.0L/3.0L); // in meters
    e=atof(SEccentr)/10000000.0L;
    de2=(1-e*e);
    p=de2*a/R_Eth;
    Energym=-de2*mu/p;
    Lm=sqrt(mu*p);
    AscNodLong=atof(SAscNodLong);
    setmem(Sp,9,0);
    sprintf(Sp,"%8.5f",p);
    setmem(SEccentr,8,0);
    sprintf(SEccentr,"%7.5f",e);
    // Запись одной строки данных в выходной файл
    fprintf(graph,"%s %s %s %s %s %s %s %e %e\n",
            SData,SAscNodLong,SIncl,Sp,SArgPer,SEccentr,SAMove,Energym,Lm);
}

// Закрытие файлов
fclose(file);
fclose(graph);
}

```

Примерный вид выходного файла

```

175.81115570 242.8893 98.7855 1.12925 5.7429 0.00149 14.21021993 -3.533192e+14 2.122624e+07
175.84076954 242.9161 98.7900 1.12831 333.1378 0.00101 14.22801375 -3.536141e+14 2.121740e+07
175.88146355 242.9592 98.7879 1.12813 331.0799 0.00108 14.23131149 -3.536687e+14 2.121576e+07
175.89388638 242.9710 98.7876 1.12812 330.2629 0.00106 14.23159387 -3.536734e+14 2.121562e+07
175.89512742 242.9721 98.7873 1.12811 330.2535 0.00105 14.23166583 -3.536746e+14 2.121559e+07
175.91822197 242.9955 98.7878 1.12811 330.2151 0.00111 14.23177189 -3.536763e+14 2.121553e+07
175.97060955 243.0459 98.7876 1.12814 331.7044 0.00108 14.23118277 -3.536666e+14 2.121583e+07

```

```
176.10887502 243.1851 98.7874 1.12816 331.9446 0.00114 14.23079723 -3.536602e+14 2.121602e+07
176.51425062 243.5873 98.7867 1.12816 330.9632 0.00111 14.23078277 -3.536599e+14 2.121602e+07
176.79548995 243.8675 98.7850 1.12816 330.4900 0.00113 14.23072515 -3.536590e+14 2.121605e+07
```

Текст программы на Maple, позволяющий визуализировать графики данных, полученные с помощью программы trs.c.

```
> restart;
> with(plots):
> with(plottools):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
Warning, the assigned name arrow now has a global binding
```

Постоянные

```
>
> R_Eth:=6378000; # Радиус Земли
> M_Eth:=5.98E24; # Масса Земли
> G:=6.672E-11; # Гравитационная постоянная
> mu:=M_Eth*G; # Произведение массы на грав. постоянную
```

```
R_Eth := 6378000
M_Eth := 0.5981025
G := 0.667210-10
mu := 0.39898561015
```

Ввод данных из файла

```
> fd:=fopen("e:\спутник\data\alnoaa17.txt",READ);
```

```
fd := 0
```

```
> sNp:=fscanf(fd,"%d");
> Np:=op(1,sNp);
```

```
sNp := [300]
Np := 300
```

```
> for i from 1 to Np do
> gr[i]:=fscanf(fd,"%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f"):
> end do:
> fclose(fd);
```

```
> op(1,gr[1]);  
  
175.8111557  
  
Параметры линейной регрессии  
дата (эпоха) -dt  
Долгота восходящего узла - anl  
Аргумент перигея - arp  
Средняя аномалия - aan  
Среднее значение имеет префикс - s: sdt,sarnl,sarp,saan  
Среднее произведение префикс - c: ctanl,ctarp,ctaan  
Среднее квадратичное - d: ddt  
  
> N:=Np; # Конечное значение индекса  
> Nb:=20; # Начальное значение индекса  
  
N := 300  
Nb := 20  
  
> sdt:=0;  
> sanl:=0;  
> sarp:=0;  
> saan:=0;  
> sincl:=0;  
> sp:=0;  
> samove:=0;  
> ddt:=0;  
> ctaan:=0;  
> ctarp:=0;  
> ctanl:=0;  
  
sdt := 0  
sanl := 0  
sarp := 0  
saan := 0  
sincl := 0  
sp := 0  
samove := 0  
ddt := 0  
ctaan := 0  
ctarp := 0  
ctanl := 0
```

```

> for i from Nb to N do
>   dt:=op(1,gr[i]);           # Эпоха
>   anl:=op(2,gr[i]);         # Долгота восходящего узла
>   есс:=op(7,gr[i]);        # Эксцентриситет
>   arp:=op(5,gr[i]);        # Аргумент перигея
>   aan:=op(6,gr[i]);        # Средняя аномалия
>   amove:=op(8,gr[i]);      # Среднее движение
>   incl:=op(3,gr[i]);       # Наклонение
>   p:=op(4,gr[i]);          # Фокальный параметр/Радиус Земли
>   sdt:=sdt+dt;
>   sp:=sp+p;
>   sincl:=sincl+incl;
>   samove:=samove+amove;
>   sanl:=sanl+anl;
>   sarp:=sarp+arp;
>   saan:=saan+aan;
>   ddt:=ddt+dt*dt;
>   ctanl:=ctanl+dt*anl;
>   ctarp:=ctarp+dt*arp;
>   ctaan:=ctaan+dt*aan;
> end do;
> sdt:=sdt/(N-Nb+1);
> sanl:=sanl/(N-Nb+1);
> sarp:=sarp/(N-Nb+1);
> saan:=saan/(N-Nb+1);
> samove:=samove/(N-Nb+1);
> sincl:=sincl/(N-Nb+1);
> sp:=sp/(N-Nb+1);
> f:=sp^2;
Вычисление параметров линейной регрессии
>
> RANL:=evalf((ctanl/(N-Nb+1)-sanl*sdt)/(ddt/(N-Nb+1)-sdt*sdt));
> RARP:=evalf((ctarp/(N-Nb+1)-sarp*sdt)/(ddt/(N-Nb+1)-sdt*sdt));
> RAAN:=evalf((ctaan/(N-Nb+1)-saan*sdt)/(ddt/(N-Nb+1)-sdt*sdt));
> BANL:=sanl-RANL*sdt;
> BARP:=sarp-RARP*sdt;
> BAAN:=saan-RAAN*sdt;

```

sdt := 252.2973278

sanl := 319.1639384

```
sarp := -252.9898302
saan := 253.1034345
samove := 14.23140240
sincl := 98.77901032
sp := 1.128127356
f := 1.272671331
RANL := 0.9970098010
RARP := -2.866122188
RAAN := 2.866453539
BANL := 67.6210298
BARP := 470.1251390
BAAN := -470.0951337
```

Вычисление параметра J<sub>2</sub>

По долготе восходящего узла

```
> J2anl:=evalf((2/3)*f*(RANL/cos(sincl))/(360*samove));
```

```
J2anl := -0.0009164191231
```

По аргументу перигея

```
>
```

```
> J2anl:=evalf((4/3)*f*(RARP/(1-5*(cos(sincl))^2))/(360*samove));
```

```
J2anl := -0.001133217422
```

По средней аномалии

```
>
```

```
> J2ann:=-evalf((4/3)*f*(RAAN/(1-3*(cos(sincl))^2))/(360*samove));
```

```
J2ann := -0.001051831107
```

Построение графиков

```
>
```

Линии регрессии

```
>
```

```
> lanl:=line([op(1,gr[Nb]),RANL*op(1,gr[Nb])+BANL],
             [op(1,gr[N]),RANL*op(1,gr[N])+BANL],
             color=red,linestyle=3,thickness=5):
> larp:=line([op(1,gr[Nb]),RARP*op(1,gr[Nb])+BARP],
             [op(1,gr[N]),RARP*op(1,gr[N])+BARP],
             color=red,linestyle=3,thickness=5):
```

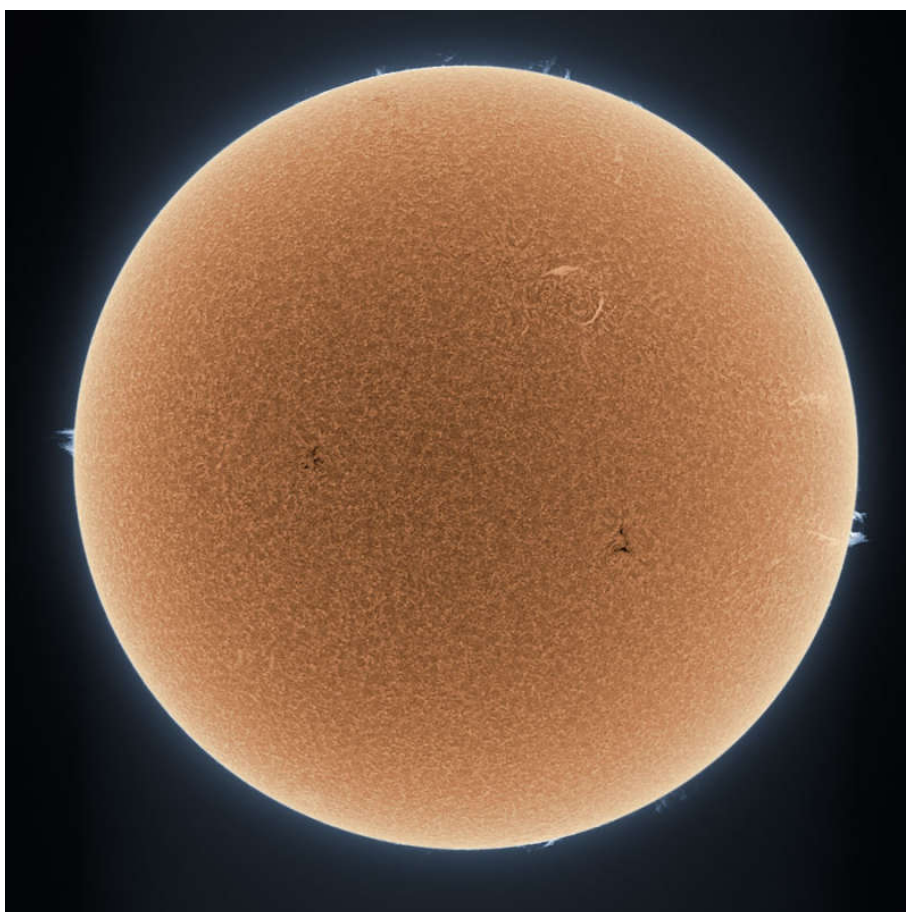
```
> laan:=line([op(1,gr[Nb]),RAAN*op(1,gr[Nb])+BAAN],
             [op(1,gr[N]),RAAN*op(1,gr[N])+BAAN],
             color=red,linestyle=3,thickness=5):
> pic12:=[seq([op(1,gr[i]),op(2,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pic13:=[seq([op(1,gr[i]),op(5,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pic16:=[seq([op(1,gr[i]),op(6,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pic19:=[seq([op(1,gr[i]),op(9,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pic14:=[seq([op(1,gr[i]),op(4,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pic110:=[seq([op(1,gr[i]),op(10,gr[i])],i=Nb..N)]:
> pictanl:=[seq([op(1,gr[i]),op(2,gr[i])-RANL*op(1,gr[i])-BANL],i=Nb..N)]:
> pictarp:=[seq([op(1,gr[i]),op(5,gr[i])-RARP*op(1,gr[i])-BARP],i=Nb..N)]:
> pictaan:=[seq([op(1,gr[i]),op(6,gr[i])-RAAN*op(1,gr[i])-BAAN],i=Nb..N)]:
> ptanl:=pointplot(pictanl,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                  title="Долгопериодические возмущения долготы восходящего узла"):
> ptarp:=pointplot(pictarp,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                  title="Долгопериодические возмущения аргумента перигея"):
> ptaan:=pointplot(pictaan,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                  title="Долгопериодические возмущения изменения средней аномалии"):
> p1:=pointplot(pic12,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                title="Вековые изменения долготы восходящего узла"):
> p3:=pointplot(pic13,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                title="Вековые изменения аргумента перигея"):
> p6:=pointplot(pic16,labels=[day,degree],font=[SYMBOL,2],
                title="Вековые изменение средней аномалии"):
> p4:=pointplot(pic14,labels=[day,"p/R_Eth"],font=[SYMBOL,2],
                title="Вековые изменение фокального параметра"):
> p9:=pointplot(pic19,labels=[day,"Dj"],font=[SYMBOL,2],
                title="Изменения удельной полной энергии"):
> p10:=pointplot(pic110,labels=[day,"m^2/s"],font=[SYMBOL,2],
                 title="Изменения удельного орбитального момента импульса"):
> plots[display](ptanl);
> plots[display](ptarp);
> plots[display](ptaan);
> plots[display](p1,lanl);
> plots[display](p3,larp);
> plots[display](p6,laan);
> plots[display](p4);
> plots[display](p9);
> plots[display](p10);
```





## Глава 2

### Солнце



# 1 Теоретические основы

## 1.1 Солнечные пятна и их перемещение по диску Солнца

(Теория излагается кратко в соответствии с курсом Жизнь Земли в атмосфере Солнца. За более полной информацией следует обратиться к этому курсу и к литературе, указанной в разделе Список литературы этого раздела)

В видимом свете наиболее заметными структурными образованиями являются темные, резко очерченные солнечные пятна, часто образующие целые группы (Рис. II-1). Обычно среди множества более или менее мелких пятен выделяются два крупных, образующих биполярную группу с противоположной полярностью магнитного поля и его напряженностью в несколько тысяч эрстед.

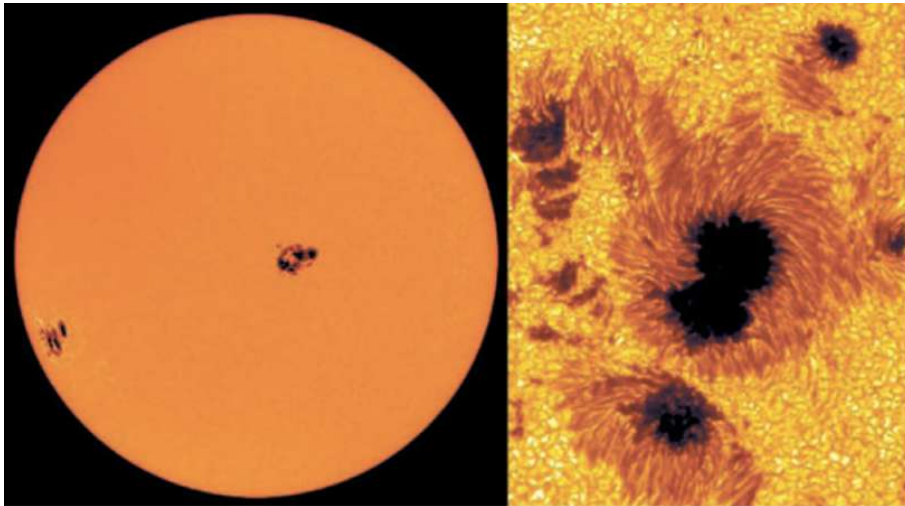


Рис. II-1. Группы солнечных пятен

Пятна возникают в виде темных пор между гранулами (см. надпись и стрелку на рис. 2) размером несколько тысяч километров. Тень развитого большого пятна имеет диаметр десятки тыс. километров и яркость в 5 – 10 раз меньше, чем окружающая фотосфера. Тень пятна окружена радиальной структурой

Солнечные пятна – места выхода сильного магнитного поля ( $2 \sim 4$ )  $\Delta 10^3$  эрстед в фотосферу. Температура тени ( $3 \sim 4$ )  $\Delta 10^3$  К. В полутени вертикальные движения плазмы со скоростями до 6 км/с впервые обнаружены английским астрономом Эвершедом в 1909 г. По осям отложены размеры в миллионах км (в мегаметрах, Мм).



Рис. П-2. Основные элементы структуры солнечных пятен

Пятна имеют достаточно устойчивую динамику и кинематику.

Во-первых, пятна на разных широтах участвуют в общем вращении Солнца, которое на разных широтах отличается по скорости углового вращения. Это явление называется дифференциальным вращением Солнца. С этим эффектом связано видимое перемещение пятен по лимбу Солнца.

Во-вторых, пятна появляются как малые темные области на Солнце, растут по определенному закону, затем уменьшаются и исчезают.

Время жизни пятен больших размеров достаточно велико, так что пятно успевает за время своей жизни сделать один оборот вокруг Солнца, который составляет 27 дней.

Физика процесса формирования пятен и их исчезновения пока еще в целом не изучена. Поэтому полезно для получения общего представления о характере этого процесса для дальнейшего его изучения исследовать простые закономерности в нем.

Модели динамики площади пятен

В данной задаче исследуются закономерности изменения площади пятен и других параметров пятен со временем. Целью задачи является проверка стандартной модели изменения площади пятен на основе данных, полученных с помощью изучения набора фотоснимков Солнца.

Стандартной моделью является так называемое логнормальное распределение:

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ -\frac{(\ln(t/t_0))^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Здесь  $S(t)$  - площадь пятна как функция времени  $t$ ,  $t_0$  - момент времени максимальной площади пятна,  $\sigma^2$  - величина характеризующая время жизни пятна, а  $S_0$  - максимальную площадь пятна. При этом считается, что момент  $t = 0$  соответствует моменту рождения пятна. Типичные графики этой зависимости приведены на рис. II-3.

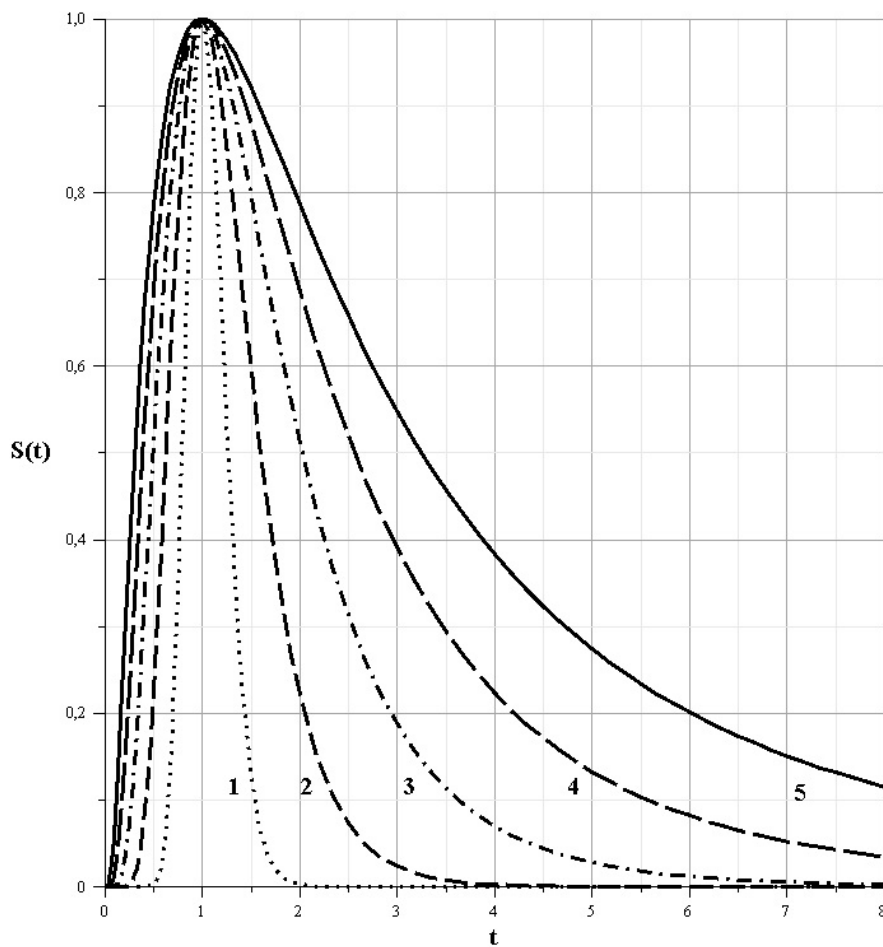


Рис. II-3. Логнормальное распределение для различных значений дисперсии  $\sigma^2$ : 1 -  $\sigma = 0.2$ , 2 -  $\sigma = 0.4$ , 3 -  $\sigma = 0.6$ , 4 -  $\sigma = 0.8$ , 5 -  $\sigma = 1.0$ .

На Рис. II-3 приведены кривые логнормального распределения для пяти значений параметра  $\sigma$  для значений:  $S_0 = 1$ ,  $t_0 = 1$ . Как видно из этих графиков, логнормальное распределение описывает процесс быстрого рождения пятен и более медленного их разрушения.

Другой моделью является модель вида (распределение Лоренца):

$$S(t) = \frac{S_0}{\sigma^2 + (t/t_0)^2}.$$

Здесь параметры  $t_0$ ,  $\sigma$  имеют тот же смысл, что и для логнормального распределения. Максимальная площадь пятна равна  $S_0/\sigma^2$ . Это распределение представлено на рис. II-3.

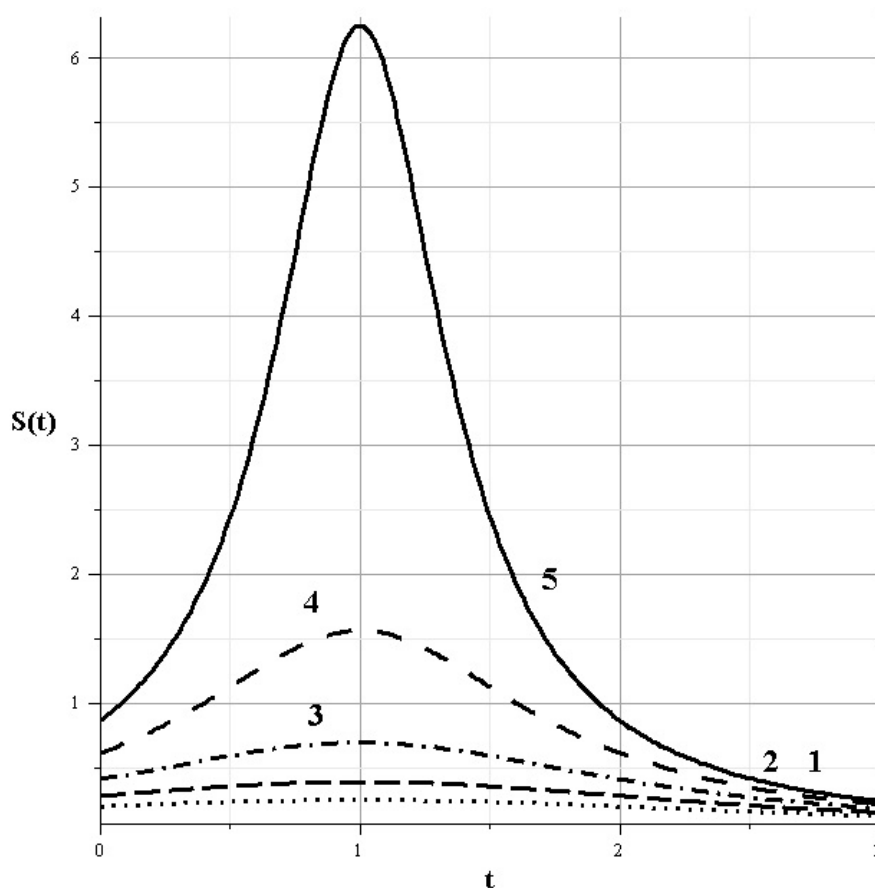


Рис. II-4. Распределение Лоренца для различных значений параметра  $\sigma^2$ : 1 -  $\sigma = 0.4$ , 2 -  $\sigma = 0.8$ , 3 -  $\sigma = 1.2$ , 4 -  $\sigma = 1.6$ , 5 -  $\sigma = 2.0$ .

Из сравнения рисунков II-3 и II-4 видно, что распределение Лоренца описывает процесс возникновения пятна с той же скоростью, что и его последующее разрушение. В предлагаемой задаче требуется выявить наилучшую среди этих двух моделей с помощью критерия Фишера.

Процедура вычисления параметров пятен.

Процедура выделения пятен на лимбе Солнца основана на специальной процедуре оконтуривания областей, ограниченных кривой с заданным значением уровня цвета, определяемого по RGB-представлению цвета точек изображения. Программа автоматически выделяет все такие области и подсчитывает их площадь как сумму пикселей изображения.

Площадь в пикселах переводится в метрическую площадь с помощью простого соответствия линейных размеров на изображении реальным размерам Солнца. Для этого программа производит вычисление диаметра Солнца в пикселах как диаметра окружности, построенной по методу наименьших квадратов по граничным точкам лимба Солнца на изображении. Отношение реального диаметра Солнца в км к диаметру в пикселе дает параметр пересчета площади пиксела в реальную площадь.

Кроме этого программой производится коррекция площади пятна на угол зрения. Поскольку в большинстве случаев пятна имеют сравнительно небольшие угловые размеры, то с хорошей точностью коррекция площади пятна может быть проведена с помощью следующих соотношений:

$$S = \frac{S'}{\cos \lambda \cos \theta},$$

где  $S$  - скорректированная площадь пятна,  $S'$  - не скорректированная площадь,  $\theta$  - широта центра пятна, отсчитываемого от гелиоэкватора (средней линии изображения),  $\lambda$  - долгота центра пятна, отсчитываемая от центрального меридиана на изображении (центра изображения). При этом положение центра пятна определяется как центр минимального прямоугольника, ограничивающего пятно целиком.

Координаты центра пятна прослеживаются на всей совокупности фотографий, взятых в обработку. По этих координатам определяется перемещение пятна по долготе и широте.

Анализ перемещения центра по долготе дает оценку скорости дифференциального вращения на данной широте. Перемещение пятна по широте дает оценку текущего наклона оси вращения Солнца к лучу зрения. Максимальное значение этого наклона составляет величину порядка 70.

## 1.2 Дифференциальное вращение Солнца

Дифференциальное вращение Солнца означает, что Солнце вращается не как твердое тело, а как газовый шар с различной скоростью движения контрастных элементов на его поверхности (например, пятен) с различной скоростью на разных расстояниях от экватора Солнца. На самом экваторе скорость вращения равна примерно 2 км/с и убывает к полюсам. Общий вид этой зависимости часто задают в форме соотношения:

$$V(\theta) = \Omega_0 (1 - b \cos^2(\theta) - c \cos^4(\theta)).$$

По современным измерениям  $\Omega_0 = 2.87 \cdot 10^6$  рад·с<sup>-1</sup>,  $b = 0.12$ ,  $c = 0.17$ .

Задача определения скоростей дифференциального вращения Солнца на разных гелиоширотах обычно решается с помощью длительного наблюдения отдельных пятен в течение недели и более. Подсчитывается период времени, через который пятно делает полный оборот на данной широте. После этого вычисляется скорость его перемещения как длина дуги перемещения пятна на данной широте к периоду времени перемещения. Значение скорости вращения принимается равным среднему значению для набора пятен. Такая процедура требует анализа большого числа фотографий Солнца за достаточно большой период.

В данной задаче предлагается иной подход, позволяющий оценивать скорость дифференциального вращения Солнца за достаточно короткий промежуток времени несколько часов. Основой метода служит измерение фазовой скорости гармонических составляющих изменения интенсивности в видимом диапазоне электромагнитного излучения или изменения величины магнитного поля в фотосфере Солнца в зональном направлении (вдоль экватора). Если наблюдать за достаточно устойчивыми по форме пятнами на Солнце в течение нескольких часов, то их гармонические составляющие будут иметь фазовую скорость, совпадающую со скоростью пятна в целом. Более того, компактная форма пятна в зональном направлении по интенсивности излучения приводит к тому, что в разложении Фурье по гармоническим составляющим в спектре будет иметься несколько отдельных гармонических волн с различными зональными волновыми числами и, следовательно, различными частотами. При этом фазовые скорости этих составляющих будут одинаковыми.

Вместе с тем, спектр будет содержать и гармонические составляющие, фазовая скорость которых может отличаться от скорости перемещения пятен как целого. Такие волны связаны с различными волновыми процессами, которые могут возбуждаться в атмосфере Солнца. Например, такие гармонические составляющие могут быть связаны с возбуждением гидродинамических волн в плазме на границах потоков, движущихся с различными скоростями. Наглядный пример возбуждения таких волн демонстрируют волны в атмосферах планет гигантов. Такие волны существуют в атмосфере и океанах Земли.

Целью данной лабораторной работы является вычисление фазовой скорости наборов гармонических составляющих изменчивости интенсивности излучения в различных диапазонах электромагнитного излучения и магнитограмм Солнца с помощью оценивания пространственно-временных спектров этой изменчивости.

### *Спектры волновых чисел и частот*

Для вычисления волновых чисел и частот гармонических составляющих интенсивности излучения или величины магнитного поля (в дальнейшем просто интенсивности) применяют метод антенной решетки. Обычно антенная решетка представляет собой набор элементов (узлов антенной решетки), размещенных в пространстве на некоторых, известных с хорошей точностью расстояниях. В каждом узле антенной решетки располагается приемник или датчик, измеряющий величину физического параметра, в пространственно-временной изменчивости

которого наблюдаются волны. Это может быть интенсивность электромагнитного излучения (как, например, в радиотелескопах), давление в атмосфере или величина магнитного поля. Для исследования частот и волновых чисел используются обычно временные ряды отдельных измерений параметра в одинаковые во всех узлах антенной решетки моменты времени. По этим записям вычисляются спектральные матрицы в диапазоне частот от 0 до максимальной частоты Найквиста, определяющейся по формуле:  $f_n = 1/(2\Delta t)$ , где  $\Delta t$  - шаг между последовательными измерениями параметра по времени. Спектральная матрица содержит кроме автоспектров рядов и кроспектры, которые позволяют оценить величину фазового сдвига между гармоническими составляющими с одной и той же частотой в разных элементах антенной решетки. Величина этих фазовых сдвигов связана с величиной волнового числа гармонической составляющей на данной частоте. Подробнее смотрите [13, 13, 15].

В данной задаче удобно изменить эту процедуру, поменяв местами время и пространство. В качестве временных рядов можно использовать пространственные ряды интенсивностей в зональном направлении, взятые на отдельных изображениях Солнца. Отдельные изображения (фотоснимки) можно рассматривать как совокупность измерений в узлах антенной решетки, которая располагается во времени. Узлы антенной решетки - это моменты времени, в которые были получены соответствующие снимки. Предполагается, что время получения снимка гораздо меньше интервала между отдельными снимками. Такая перемена мест пространства и времени оказывается необходимой в силу того, что интервалы времени между отдельными снимками обычно не строго регулярны, число снимков за сутки не превышает десяти. Поэтому для получения достаточного для спектрального оценивания набора точек по времени за сутки получить не удастся. Напротив ряды точек в зональном направлении регулярны и неизменны для отдельных снимков. Стандартное разрешение снимков  $512 \times 512$  или  $1024 \times 1024$  пикселей позволяет получить для каждого снимка достаточно репрезентативный набор данных для достаточно точного оценивания волновых чисел пиков в спектре интенсивностей по гелиодолготе.

Вычисление волновых чисел и частот гармонических составляющих контрастов интенсивности излучения или величины магнитного поля проводится в два этапа в соответствии с обычными принципами спектрального анализа. На первом этапе строится спектральная матрица  $S(\theta, \mathbf{k}) = (S_{ij}(\theta, \mathbf{k}))$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ , как функция зональных волновых чисел  $\mathbf{k}$  для каждой фиксированной широты  $\theta$  на совокупности изображений Солнца. Здесь  $M$  - число элементов антенной решетки, в данном случае, число отдельных снимков, используемых в обработке. Для каждой широты антенная решетка - это последовательность моментов времени получения отдельных снимков. Поэтому спектральная матрица строится по совокупности зональных рядов, взятых на фиксированной широте каждого изображения Солнца, отобранного в набор данных. В данной работе для построения оценки спектральной матрицы  $S(\theta, \mathbf{k})$  используется метод максимальной энтропии, алгоритмически связанный с методом многомерной авторегрессии (Подробнее смотрите раздел Методы спектрального оценивания). Типичный вид спектров волновых чисел представлен на следующем рисунке. После вычисления спектральной матрицы на первом этапе находятся все локальные максимумы автоспектров  $\chi_{jj}(\mathbf{k})$ ,  $j = 1, \dots, M$  (диагональных элементов спектральной матрицы). Среди всех



локальных максимумов выделяются те, которые обладают средней когерентностью, большей критического значения  $\chi_{cr}(\mathbf{k}) = 0.8$ . Когерентности  $\chi_{ij}$  и фазовые сдвиги  $\phi_{ij}$  между узлами антенной решетки для данного волнового числа  $\mathbf{k}$  связаны с недиагональными элементами спектральной матрицы следующими соотношениями: значения когерентностей  $\chi_{ij}(\mathbf{k})$  лежат в интервале  $[0, 1]$  и характеризуют степень линейной связи гармонических составляющих между элементами антенной решетки  $i$  и  $j$  для данного волнового числа  $\mathbf{k}$ . Ошибка в определении фазового сдвига существенным образом зависит от величины когерентности. Поэтому для целей данной задачи имеет смысл рассматривать только характеристики спектра вблизи высоко когерентных гармонических составляющих. На втором этапе с помощью спектральной матрицы строится спектр частот  $S(\theta, k, f)$ . В данной работе построение частотного спектра производится либо с помощью Метода максимального правдоподобия, либо - Метода Бартлетта с учетом интерференционных эффектов, либо без их учета. По умолчанию для построения спектра используется нормированная спектральная матрица с элементами. В этом случае интерференционные эффекты исключаются из оценки. Такой подход к оцениванию можно считать наиболее приемлемым (см. Методы спектрального оценивания). Типичный набор спектров частот представлен на следующем рисунке. После оценивания  $S(\theta, k_a, f)$  для каждого  $k_a$ ,  $a = 1, \dots, n$  из списка волновых чисел ( $n$  - число пиков в спектре), соответствующих высококогерентным пикам в спектре волновых чисел, находится абсолютный максимум спектральной плотности по частоте. В результате на каждой широте получается список пар волновых чисел и частот пиков спектральной плотности  $S(\theta, k, f)$ : совокупность этих точек на диаграмме  $(k, f)$  позволяет построить дисперсионную кривую, которую необходимо аппроксимировать линейной функцией. Наклон линейной регрессионной функции и равен искомой фазовой скорости, которая, в свою очередь, будет определять скорость вращения на данной широте. Если в спектре имеются только гармонические составляющие, связанные с движением контрастов интенсивности как целого в зональном направлении, то эта скорость будет совпадать со скоростью дифференциального вращения. Типичный вид диаграммы волновое число - частота представлен на рис. II-5.

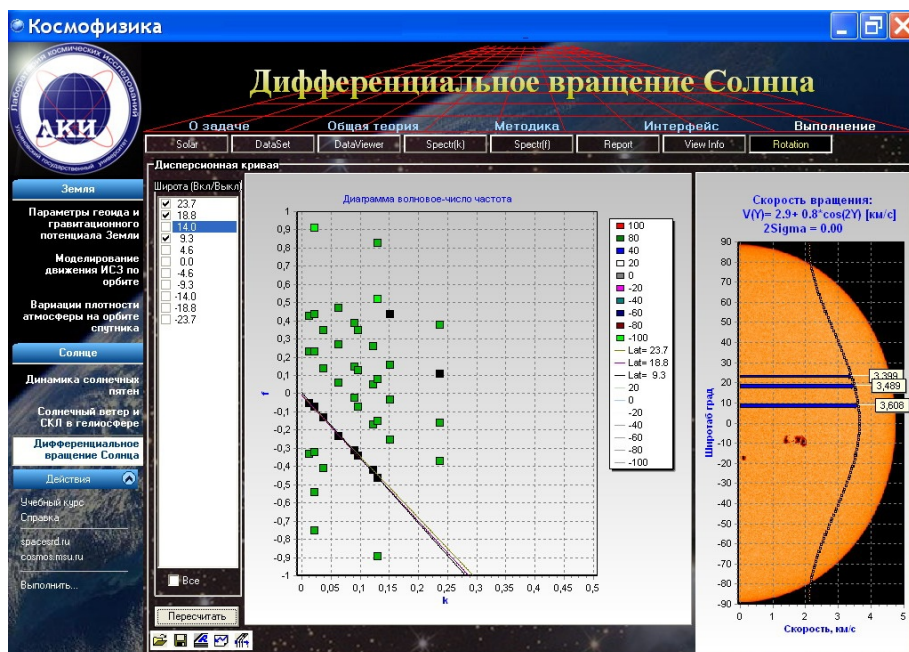


Рис. II-5. Пример вычисления фазовой скорости по наклону дисперсионной кривой с помощью комплекса программ “Космофизика”.

Диаграмма волновое число – частота, построенная по семи фотографиям для двух широт. 46.4 град и 40.1 град северной гелиошироты. Красными прямыми проведены линии линейной регрессии пиков в спектре частот для списка волновых чисел на каждой из широт.

### Получение интенсивности точек изображения

В данной задаче принят простой способ получения интенсивности, основанный на суммировании значений интенсивности красного, синего и голубого цветов в RGB-представлении цвета точек. Такой подход оправдан тем, что в этой задаче собственно цвет точек не играет роли, а интерес представляет перемещение точек с равными значениями цвета. Для улучшения контрастности в некоторых случаях полезно убрать из рассмотрения одну или две цветовых плоскости RGB-представления. Поэтому в программе пользователю предлагается возможность выбрать наилучшую комбинацию плоскостей, включая или выключая соответствующую плоскость с помощью переключателя, расположенного на первой вкладке Solar. Три переключателя имеют общее имя RGB-фильтр и отмечены на вкладке соответствующими цветными метками. Для создания набора данных с ненулевыми цветами необходимо, чтобы хотя одна из плоскостей была включена. Для изображений, представляющих собой оттенки серого, желательно включать все три плоскости. Это например рекомендуется для магнитограмм Солнца.

### Алгоритм выделения размеров Солнца на фотографии

Алгоритм выделения размеров Солнца на изображении построен по разному для различных типов фотографий Солнца.

Для изображений MDI (видимый диапазон) и MDI-Mag (магнитограммы) алгоритм состоит в отыскании в выбранной строке (256 строка) точки, в которой суммарная яркость RGB-интенсивности превышает фоновое значение этой интенсивности, выбранное равным 10. Крайние точки справа и слева, в которых достигается такое превышение и принимаются за крайние точки солнечного диска. Расстояние в пикселах между ними и есть диаметр диска Солнца на изображении. Реальный диаметр Солнца принят равным 1320000 км. Соотношение реального диаметра в километрах и размер в пикселах дают соотношение всех основных метрических масштабов изображения Солнца на фотографии с реальными его масштабами. Таким же образом определяется вертикальный диаметр Солнца на фотографии.

Для изображений ETI алгоритм выделения края диска Солнца строится иначе. Это связано с тем, что на этих фотографиях видна корона Солнца, за пределами самого его диска. Критерием достижения края диска Солнца является достижение локального максимума величины RGB-интенсивности справа и слева. Поскольку локальные экстремумы могут появиться из-за локальной вариации интенсивности, то для выделения края необходимо предварительно сгладить интенсивность точек в строке. Поэтому на первом шаге в выбранной строке (256 строка) проводится сглаживание косинусным фильтром интенсивностей, а затем простым алгоритмом выделения локального экстремума отыскивается положение края диска слева и справа независимо друг от друга. Как и в случае MDI-изображений размер диска Солнца на фотографии выбирается равным расстоянию между правым и левым максимумами в пикселах. Вертикальный диаметр Солнца на фотографии определяется таким же образом.

### Вычисление фазовой скорости волн

Вычисление фазовой скорости волн основывается на стандартном определении фазовой скорости волны как отношения волнового числа к частоте: Оценивание волнового числа производится в программе с помощью спектра волновых чисел по положениям пиков спектральной плотности на шкале зональных волновых чисел. Для каждого такого пика на следующем этапе оценивается спектр частот. В качестве частоты волны принимается частота, соответствующая положению пика в автоспектре. Отношение этих величин и есть нормированная фазовая скорость. В качестве основной проверяемой модели для дифференциального вращения Солнца используется модель следующего вида: в этой модели подлежат определению постоянные A и B с помощью метода наименьших квадратов. Однако, как показывает теоретический анализ модель может выбираться и в более общем виде. Поэтому пользователю предоставляется возможность варьировать форму модели, но с обоснованием своего собственного выбора.

### 1.3 Солнечный ветер, СКЛ и спираль Паркера

Область пространства вокруг Солнца, радиусом порядка 75-90 а.е., в которой, где доминируют солнечное магнитное поле и потоки частиц от Солнца над полем и частицами, имеющими галактическое происхождение, называется гелиосферой. Гелиопауза – это область, где сталкиваются ионы солнечного и галактического происхождения. Эта область имеет радиус порядка 110 а.е. область, лежащая сразу за гелиопаузой представляет собой ударную волну в галактическом газе перед движущимся Солнцем. Эта область простирается до радиуса порядка 230 а.е. Схематически эти области представлены на Рис. 1.

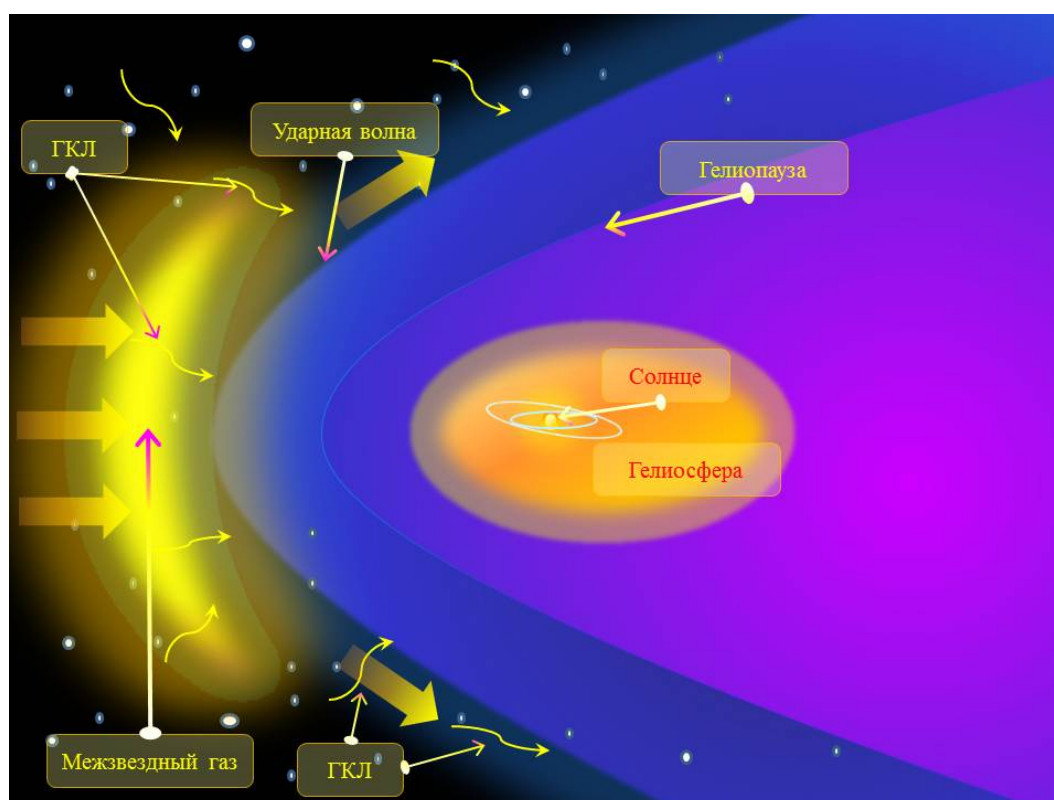


Рис. II-6. Структура окрестностей Солнечной системы, взаимодействующей с галактической средой.

Все основные процессы, возникающие за счет активности Солнца, оказывающие влияние на Землю, сосредоточены в области гелиосферы, расположенной между Солнцем и Землей. Наиболее важную роль в Солнечно-Земных связях играют Солнечные космические лучи (СКЛ) и солнечный ветер, которые представляют собой заряженные частицы различных энергий.

Еще одним важным элементом гелиосферы является магнитное поле, порождаемое Солнцем. Изучению этих объектов в общей их взаимосвязи и посвящена данная задача.

Солнечно-земная физика рассматривает связи явлений, происходящих на Земле и в околоземном космическом пространстве, с солнечной активностью.

Солнце вращается вокруг оси, отклоняющейся от нормали к плоскости эклиптики на угол  $7^{\circ}15'$ , причём угловая скорость, выраженная в градусах в сутки, убывает по мере увеличения гелиографической широты:

Соответствующий период (сидерический период) составляет около 25 дней на экваторе и достигает 30 дней вблизи полюсов. Земля движется вокруг Солнца в ту же сторону, и период вращения Солнца относительно земного наблюдателя (синодический период) составляет почти 27 дней на экваторе и 32 дня у полюсов. На экваторе линейная скорость вращения составляет около 2 км/с.

Поток энергии от Солнца нагревает корональную плазму до 100 эВ и не уравновешивается излучением короны (из-за ее малой плотности), т.е. солнечная корона не находится в состоянии гидростатического равновесия и непрерывно расширяется. Продолжение солнечной короны в межпланетное пространство (до 100 а.е.) называется гелиосферой, а радиальные потоки солнечной плазмы, уносящие избыточную энергию короны, - солнечным ветром.

Движение заряженных частиц в гелиосфере (СКЛ) происходит по спирали Паркера, представляющей собой спираль Архимеда. Представление о такой спирали можно составить по рис. II-6.

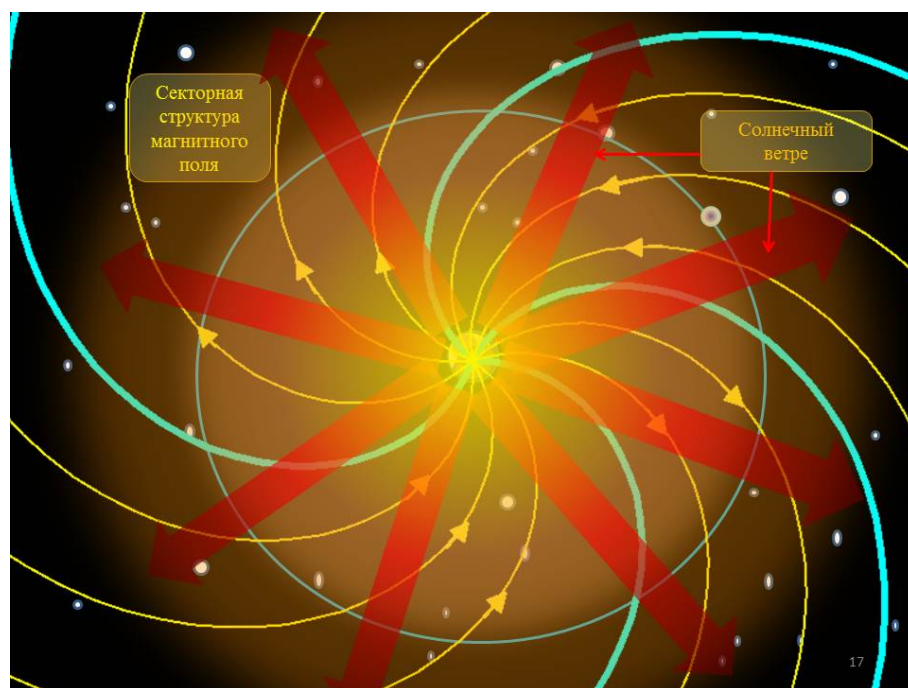


Рис. П-7. Секторная структура магнитного поля Солнца.

На рис. П-4 показано, что солнечный ветер движется радиально. Солнечный ветер вытягивает силовые линии магнитного поля в радиальном направлении. Силовые линии вращаются вместе с самим Солнцем, что и создает спираль Архимеда, которую в данном случае называют спиралью Паркера. Эта спираль описывается уравнением:

$$r = \frac{u}{\Omega}(\varphi - \varphi_0) + r_0.$$

Здесь  $u$  - скорость солнечного ветра,  $\Omega$  - угловая скорость вращения Солнца на экваторе,  $\varphi$  - угол полярной системы координат с центром на Солнце, соответствующий точке наблюдения,  $r$  - радиальное расстояние до точки наблюдения от центра Солнца, а  $\varphi_0$  - начальный угол ветви спирали на поверхности, находящейся на расстоянии  $r_0$  от центра Солнца.

Во время вспышек рентгеновское излучение от Солнца доходит до Земли примерно за 8 минут, двигаясь по прямой. Измеряя время прихода частиц СКЛ от вспышки, которую фиксируют с помощью всплеска рентгеновского излучения, можно вычислить точку на Солнце, где произошла вспышка. Для этого необходимо знать длину спирали Архимеда, вдоль которой движутся СКЛ. Она определяется формулой:

$$L = \int_0^{\varphi} k \sqrt{1 + (\varphi)^2} d\varphi = \frac{k}{2} \left[ \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln \left( \varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right] \quad (2.1)$$

В этой формуле

$$k = \frac{u}{\Omega}.$$

Эта длина между точкой в центре Солнца и точкой прихода СКЛ. Для вычисления точки, откуда пришел всплеск СКЛ, необходимо знать скорость солнечного ветра в данный момент времени. Выбирая в качестве маркера времени прихода СКЛ, частицы с заданной энергией, и измеряя время достижения ими Земли можно вычислить расстояние, которое они прошли. Зная это расстояние, по формуле (2.1) можно вычислить угол поворота спирали и найти точку на поверхности Солнца.

## 2 Задачи практикума

### 2.1 Задача 7. Динамика и кинематика солнечных пятен

Простым, но важными исследованиями солнечных пятен является задача вычисления их кинематического перемещения по диску Солнца. В основном такое перемещение связано с дифференциальным вращением Солнца, которое и было открыто при изучении зависимости скорости перемещения пятен от гелиошироты. В данной задаче предлагается самостоятельно

вычислить скорость перемещения выбранных пятен по Солнцу и оценить период времени, за которое пятно сделает оборот вокруг Солнца. Для этого необходимо взять набор снимков за несколько дней и, оценив положение условного центра пятна, вычислить его перемещение как по гелиодолготе, так и по гелиошироте. Движение по гелиодолготе связано в основном с дифференциальным вращением, а движение по гелиошироте связано с наклонением оси вращения Солнца к эклиптике. По максимальному смещению пятна по гелиошироте можно оценить проекцию оси вращения Солнца на плоскость видимого диска Солнца и вычислить угловое расстояние Земли от текущей точки до точек на орбите, в которых видимое наклонение оси Солнца будет нулем и максимальным. Для выполнения работы можно выполнить вычисления положения пятна самостоятельно, либо воспользоваться пакетом программ Космофизика (Задача "Динамика и кинематика пятен").

### **Задание.**

1. Из базы данных фотографий Солнца, полученных с помощью аппаратов SOHO, SDO или Hinode, выбрать последовательность изображений за период в 2-3 месяца. Выбор необходимо делать таким образом, чтобы число пятен не было слишком большим, а пятна располагались на нескольких гелиоширотах.

2. Вычислите положение пятен за первые несколько дней и постройте график зависимости гелиошироты и гелиодолготы от времени.

3. Вычислите скорость перемещения пятен по гелиодолготе за исследованный период времени. Оцените время, за которое пятно должно сделать оборот вокруг Солнца и выйти с восточного его края вновь. Исследуя последующие изображения Солнца установите - появилось ли пятно в предполагаемое время. Объясните результат.

4. Вычислите максимальное смещение пятен по гелиошироте за данный период времени. Оцените видимое наклонение оси вращения Солнца для пятен на разных гелиоширотах. Вычислите угловое расстояние Земли на орбите, в которой видимое наклонение будет нулевым или максимальным. Оцените время за которое Земля пройдет это расстояние. Проверьте этот результат по изображениям, полученным в вычисленное время. Вычислите погрешность такой оценки.

## **2.2 Задача 8. Динамика площади солнечных пятен**

Еще одним важным элементом исследования пятен является изучение того, как изменяется их площадь со временем. Эта информация важна, поскольку до сих пор нет точной информации о том, как пятна формируются, и как они устроены по глубине. Простым исследованием, которое может дать полезную информацию о процессе образования пятен, является изучение изменения их площади со временем. Полученные результаты в задании 7 могут послужить указанием на важность такой работы. Данная задача позволяет ответить на вопрос - почему пятно появилось или не появилось на диске Солнца после того, как оно сделало оборот вокруг Солнца. Если пятно появилось, то можно попытаться ответить на вопрос - новое это пятно или это старое пятно. Ответ на этот вопрос не однозначен, но информацией для ответа может служить прогноз

площади пятна, который и предлагается выполнить в данной задаче.

Для выполнения работы можно выполнить вычисления положения пятна самостоятельно, либо воспользоваться пакетом программ Космофизика (Задача "Динамика и кинематика пятен").

### **Задание.**

1. Из базы данных фотографий Солнца, полученных с помощью аппаратов SOHO, SDO или Hinode, выбрать последовательность изображений за период в 2-3 месяца. Выбор необходимо делать таким образом, чтобы число пятен не было слишком большим, а пятна располагались на нескольких гелиоширотах.

2. Вычислите положение пятен за первые несколько дней и их площадь. Постройте график зависимости площади пятна от времени.

3. Используя одну из моделей изменения площади пятна, оцените с помощью метода наименьших квадратов параметры этих моделей. Объясните результат.

4. По вычисленным параметрам модели оцените площадь пятна на момент его появления на восточном краю диска Солнца. Сравните с тем, что можно наблюдать на реальных изображениях. Объясните полученный результат.

## **2.3 Задача 9. Дифференциальное вращение Солнца**

### **Методика выполнения задачи**

Методика выполнения задачи состоит из трех основных этапов. Первый этап - выбор фотографий, по которым производится определение дифференциального вращения. Второй этап - проведение первичной обработки данных с целью получения данных о дисперсионных соотношениях зональных волн. И третий этап - построение модели дифференциального вращения. Первые два этапа производятся с помощью программы "Космофизика" а последний - самостоятельно с помощью любой системы математических вычислений или самостоятельно написанной программы.

Последовательность операций выполнения задачи можно описать следующим образом.

1. Ввод в оперативную память компьютера списка изображений Солнца и указание параметров региона, данных по указанию преподавателя. Эта процедура описана в разделе "Исходная информация".

2. Формирование исходного набора данных. Эта процедура описана в разделе "Входной набор данных" и его подготовка к выполнению задачи и включает в себя два этапа: "Задание параметров RGB-фильтра" и "Фильтрация рядов".

3. Пошаговая для каждой широты из региона данных процедура вычисления положения максимумов пространственно-временного спектра волн, распространяющихся в зональном направлении. Эта процедура имеет несколько этапов. Для каждой широты:

3.1. Первый этап предварительный выбор оптимального порядка модели

3.2. Вычисление спектральной матрицы как функции волнового числа и определение положения максимумов спектральной плотности на исследуемом интервале волновых чисел,



обладающих средней когерентностью большей 0.8.

3.3. Для каждого отобранного в дальнейшую обработку максимума спектра волновых чисел оценивание спектра частот и определение положения максимумов спектра частот.

3.4. Сохранение на диске выходного набора данных.

4. Оценивание наклона дисперсионных кривых с помощью метода наименьших квадратов и вычисление скорости дифференциального вращения, используя выходной набор данных. Вычисление модельной кривой дифференциального вращения и погрешностей определения параметров модели.

5. Представление результатов в виде отчета и графиков.

## Исходная информация

В качестве исходной информации для решения поставленной задачи используются наборы изображений снимков Солнца в диапазоне MDI, либо магнитограммы. Выбор списка изображений и их тип указывается преподавателем перед началом работы, после получения допуска к ее выполнению. Рекомендуется использовать магнитограммы поскольку они обладают наибольшей контрастностью элементов структуры. Все снимки должны быть приведены к формату BMP размером 512x512 пикселей, что можно осуществить с помощью любого редактора изображений.

Ввод снимков производится последовательно или выделенным списком при нажатии экранной клавиши Добавить, которая расположена на вкладке Solar ниже окна Список изображений Солнца. После щелчка на этой клавише открывается стандартный диалог ввода изображений. Необходимо выбрать нужный каталог и щелчком на нужном файле запустить его загрузку в оперативную память программы. После открытия диалога изображения можно загрузить списком, который выделяется в диалоге с помощью клавиши Shift, которая удерживается при перемещении курсора с помощью клавиш "стрелки". В группе управляющих элементов "Изображения Солнца" кроме клавиши Добавить содержатся три других клавиши: Удалить, Порядок, Очистить. Клавиша Удалить необходима для удаления одиночного файла из списка, клавиша Порядок упорядочить список изображений по возрастанию времени его создания. Это полезно для удобства просмотра списка изображений на экране. Клавиша Очистить требуется для очистки списка изображений перед загрузкой нового списка.

Совокупность изображений полезно поместить в отдельный каталог. После его загрузки с помощью группы элементов Список изображений Солнца, расположенной на первой вкладке программы Solar список изображений можно сохранить на диске и загружать при повторной работе с программой. Однако рекомендуется это делать после того как Вами установлен регион обработки на совокупности снимков, поскольку список изображений (формат \*.LST) содержит информацию и о регионе данных в момент сохранения списка на диске. При этом следует помнить, что список изображений содержит имена файлов и путь к каталогу, в котором содержатся снимки. Поэтому изменение пути к каталогу приведет к ошибке поиска файлов на жестком диске. Эту ошибку можно легко исправить, отредактировав файл списка (См. "Структура файла Список изображений \*.LST"). Сохранение списка изображений производится

щелчком на экранной кнопке [PICTURE SAVE.BMP] на панели управления (либо в файловом меню File). Повторно загрузить список можно с помощью экранной кнопки [PICTURE OPEN.BMP] на панели управления (либо в файловом меню File). Структура файла "Список изображений"

Информация о списке изображений сохраняется на диске в специальном текстовом файле с расширением LST. Пример структуры этого файла таков:

6

```
D:\DATA\Magnetometer\2001\BMP\BMP-512\
31 MDI_mag_2001.01.01_00 03_resize 2001.01.01.00.03.00 63146908980
31 MDI_mag_2001.01.01_01 36_resize 2001.01.01.01.36.00 63146914560
31 MDI_mag_2001.01.01_03 12_resize 2001.01.01.03.12.00 63146920320
31 MDI_mag_2001.01.01_04 48_resize 2001.01.01.04.48.00 63146926080
31 MDI_mag_2001.01.01_06 27_resize 2001.01.01.06.27.00 63146932020
31 MDI_mag_2001.01.01_08 03_resize 2001.01.01.08.03.00 63146937780
```

1 строка. Содержит число изображений в списке (в данном случае 6).

2 строка Содержит путь к каталогу, в котором хранится список изображений без имен файлов.

3-6 строки. Строки предназначены каждая для своего изображения и содержат последовательно следующую информацию в виде подстрок, разделенных хотя бы одним пробелом:

1. подстрока. Целое число, указывающее длину имени файла (в данном случае 31)

2. подстрока. Имя файла (без пути к нему), имеющее длину, равную числу указанному в первой подстроке.

3. подстрока. Время создания изображения в формате:

*YYYY.MM.DD.OO.MM.SS*

(YYYY-год, MM - месяц, DD - День, OO - час, MM - минута, SS - секунда)

4. подстрока.

Время создания снимка в единицах времени, устанавливаемое переменной в последней строке этого файла, отсчитываемое от одной стандартного момента времени, например, 0000.00.00.00.00.00. В данном случае время установлено в секундах.

7 строка. Содержит начало и конец региона данных по долготе, отсчитываемые от левого края изображения (в данном случае 156 356).

8 строка. Содержит начало и конец региона данных по широте,отсчитываемые от верхнего края изображения (в данном случае 136 376).

9 строка. Содержит шаг по долготе для выбора точек по долготе (в данном случае 10).

10 строка. Содержит шаг по широте для выбора строк изображения в набор данных (в данном случае 20).

11 строка. Содержит тип размерности времени (в данном случае 0). Выходной набор данных

Пример выходного файла, созданного программой после окончания работы с программой имеет следующий вид:

```
D:\DATA\Magnitometer\2001\1-7.lst 7
```

```
D:\DATA\Magnitometer\2001\BMP\BMP-512\ 31 MDI_mag_2001.01.01_00
```

```
03_resize 2001.01.01.00.03.00 63146908980 31 MDI_mag_2001.01.01_01
```

```
36_resize 2001.01.01.01.36.00 63146914560 31 MDI_mag_2001.01.01_03
```

```
12_resize 2001.01.01.03.12.00 63146920320 31 MDI_mag_2001.01.01_04
```

```
48_resize 2001.01.01.04.48.00 63146926080 31 MDI_mag_2001.01.01_06
```

```
27_resize 2001.01.01.06.27.00 63146932020 31 MDI_mag_2001.01.01_08
```

```
03_resize 2001.01.01.08.03.00 63146937780 31 MDI_mag_2001.01.01_09
```

```
39_resize 2001.01.01.09.39.00 63146943540
```

Параметры региона данных (pix) 156 356 136 376 1 20 0

Реальный размер Солнца:  $1.392 \cdot 10^{+06}$  км

Горизонтальный размер Солнца: 497 pix

Вертикальный размер Солнца: 497 pix

Широта: 0 (120 , 28.8748)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5 , 0.5 ];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.043 -0.39 -0.23 -0.03 0.17 0.3 0.45 0.130258 0.137045 0.221468  
0.128913 0.130603 0.129564

Нормированное волновое число: 0.082 -0.45 -0.15 0.04 0.21 0.36 0.132586 0.179725 0.152298  
0.13264 0.131843

Нормированное волновое число: 0.11 -0.36 -0.16 0.02 0.16 0.31 0.45 0.136079 0.215618 0.13309  
0.130956 0.13022 0.130672

Нормированное волновое число: 0.169 -0.26 -0.06 0.1 0.24 0.39 0.205439 0.134387 0.131355  
0.130169 0.131585

Нормированное волновое число: 0.222 -0.36 -0.17 0.1 0.26 0.42 0.188549 0.139529 0.137287  
0.130745 0.140161

Нормированное волновое число: 0.258 -0.47 -0.13 0.02 0.31 0.19449 0.131373 0.133878 0.133967

Широта: 1 (100 , 23.7292)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5 , 0.5 ];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.007 -0.35 -0.21 -0.01 0.19 0.33 0.48 0.130197 0.132837 0.22523  
0.131807 0.130603 0.129912

Нормированное волновое число: 0.053 -0.44 -0.3 -0.11 0.1 0.24 0.38 0.130709 0.132952 0.224097  
0.13156 0.129692 0.130094

Нормированное волновое число: 0.11 -0.41 -0.21 -0.01 0.14 0.26 0.41 0.132855 0.223018 0.131435  
0.129575 0.129967 0.131029

Нормированное волновое число: 0.136 -0.43 -0.22 0.09 0.26 0.42 0.132652 0.206122 0.132532  
0.132204 0.132495

Нормированное волновое число: 0.188 -0.35 -0.15 -0.01 0.14 0.28 0.42 0.225395 0.130792 0.130252  
0.129919 0.13013 0.132557

Нормированное волновое число: 0.235 -0.35 -0.05 0.23 0.42 0.156351 0.136195 0.140278 0.15494

Широта: 2 (80 , 18.7798)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5 , 0.5 ];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.046 -0.42 -0.27 -0.08 0.12 0.27 0.41 0.13087 0.133914 0.223087  
0.130979 0.129803 0.12992

Нормированное волновое число: 0.117 -0.4 -0.19 1.04083e-17 0.15 0.29 0.43 0.130547 0.227275  
0.133541 0.130226 0.129733 0.129877

Нормированное волновое число: 0.157 -0.47 -0.27 -0.08 0.06 0.22 0.35 0.134302 0.223409 0.130778  
0.131181 0.129876 0.129421

Нормированное волновое число: 0.235 -0.43 -0.08 0.08 0.21 0.197666 0.134797 0.132545 0.131447

Нормированное волновое число: 0.268 -0.49 -0.3 -0.15 -0.01 0.13 0.28 0.48 0.220429 0.131253  
0.130675 0.129835 0.130233 0.134394 0.218951

## Солнце

---

Нормированное волновое число: 0.297 -0.47 -0.29 -0.14 -0.01 0.14 0.32 0.183972 0.137197 0.130607  
0.130289 0.1323 0.147702

Широта: 3 (60 , 13.9721)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5 , 0.5 ];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.017 -0.37 -0.23 -0.03 0.17 0.31 0.45 0.130592 0.132818 0.226898  
0.13114 0.129639 0.129732

Нормированное волновое число: 0.075 -0.49 -0.32 -0.13 0.07 0.19 0.37 0.47 0.134313 0.135417  
0.209714 0.131188 0.130349 0.134922 0.133476

Нормированное волновое число: 0.124 -0.44 -0.24 -0.04 0.1 0.24 0.38 0.133793 0.224216 0.131034  
0.1307 0.129957 0.130274

Нормированное волновое число: 0.168 -0.32 -0.13 0.02 0.17 0.29 0.44 0.224744 0.133294 0.131872  
0.130651 0.128809 0.129617

Нормированное волновое число: 0.229 -0.46 -0.26 -0.11 0.05 0.2 0.31 0.220919 0.130267 0.132697  
0.13017 0.129651 0.132244

Нормированное волновое число: 0.294 -0.38 -0.22 -0.08 0.07 0.2 0.39 0.132747 0.130195 0.129957  
0.130275 0.131778 0.218329

Широта: 4 (40 , 9.26296)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5 , 0.5 ];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.02 -0.38 -0.24 -0.03 0.16 0.31 0.45 0.129875 0.130941 0.227829  
0.132868 0.130274 0.129863

Нормированное волновое число: 0.069 -0.48 -0.34 -0.14 0.06 0.21 0.35 0.130329 0.1326 0.223774  
0.132103 0.129692 0.129972

Нормированное волновое число: 0.14 -0.44 -0.25 -0.05 0.11 0.26 0.4 0.13034 0.219533 0.135575  
0.131508 0.130071 0.129605

Нормированное волновое число: 0.193 -0.37 -0.18 -0.04 0.11 0.25 0.39 0.225119 0.131803 0.130405  
0.130058 0.130076 0.130725

Нормированное волновое число: 0.253 -0.3 -0.15 -0.01 0.14 0.29 0.46 0.134106 0.130066 0.129929  
0.130599 0.130512 0.215873

Нормированное волновое число: 0.33 -0.32 -0.16 -0.02 0.12 0.32 0.133533 0.130903 0.132408  
0.132488 0.198971

Широта: 5 (20 , 4.61632)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5, 0.5];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.029 -0.38 -0.24 -0.04 0.17 0.3 0.46 0.13044 0.132622 0.220293  
0.132985 0.131485 0.130408

Нормированное волновое число: 0.063 -0.29 -0.1 0.09 0.39 0.132368 0.206589 0.136066 0.133656

Нормированное волновое число: 0.136 -0.42 -0.23 -0.04 0.08 0.24 0.4 0.135563 0.209739 0.132269  
0.132001 0.132508 0.131132

Нормированное волновое число: 0.156 -0.27 -0.08 0.08 0.24 0.44 0.204084 0.132807 0.131849  
0.132175 0.13086

Нормированное волновое число: 0.225 -0.45 -0.25 -0.16 0.02 0.18 0.32 0.211218 0.13329 0.132303  
0.131485 0.13297 0.131567

Нормированное волновое число: 0.329 -0.46 -0.35 -0.19 -0.03 0.13 0.31 0.130233 0.130499 0.132681  
0.134219 0.137629 0.203287

Широта: 6 (0, 0)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5, 0.5];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.044 -0.42 -0.28 -0.08 0.12 0.26 0.41 0.129773 0.131013 0.227099  
0.133022 0.130387 0.129745

Нормированное волновое число: 0.093 -0.37 -0.18 0.02 0.17 0.31 0.45 0.133626 0.22393 0.132136  
0.130014 0.129782 0.130291

Нормированное волновое число: 0.106 -0.37 -0.18 0.02 0.16 0.31 0.46 0.131115 0.218607 0.134658  
0.13114 0.130563 0.129973

Нормированное волновое число: 0.127 -0.22 -0.02 0.15 0.39 0.207315 0.13205 0.131273 0.13077

Нормированное волновое число: 0.179 -0.32 -0.13 0.01 0.16 0.3 0.44 0.220676 0.129482 0.130873  
0.129554 0.129632 0.134899

Нормированное волновое число: 0.22 -0.43 -0.24 -0.09 0.06 0.22 0.32 0.220812 0.132967 0.132176  
0.131062 0.129503 0.129811

Нормированное волновое число: 0.293 -0.36 -0.18 0.08 0.26 0.42 0.140009 0.132756 0.133281  
0.153835 0.172986

Широта: 7 (-20, -4.61632)

Последний ранг модели: 6

Диапазон волновых чисел: [0, 500];

Диапазон частот: [-0.5, 0.5];

Шаг по частоте: 0.01

Нормированное волновое число: 0.012 -0.36 -0.22 -0.02 0.18 0.33 0.47 0.13007 0.131983 0.227854  
0.131982 0.12998 0.129776

Нормированное волновое число: 0.106 -0.39 -0.19 0 0.16 0.32 0.45 0.130745 0.217878 0.135359  
0.130698 0.130425 0.130793

Нормированное волновое число: 0.134 -0.42 -0.22 -0.04 0.1 0.26 0.145821 0.198233 0.135042  
0.130374 0.132617

Нормированное волновое число: 0.175 -0.32 -0.13 0.01 0.16 0.3 0.44 0.223026 0.132758 0.130901  
0.129752 0.129171 0.131063

Нормированное волновое число: 0.336 -0.38 -0.19 -0.07 0.09 0.3 0.13717 0.134645 0.132433  
0.134423 0.189776

**1-я строка.** Содержит путь и имя к файлу списка изображений.

**2-я строка.** Содержит число обрабатываемых изображений (7).

**3-я строка.** Содержит путь к списку изображений. 4-я - 10-я строки. (число этих строк задается параметром во второй строке) Содержит следующую информацию в каждой из строк: 1 подстрока. Целое число, указывающее длину имени файла (в данном случае 31)

**2 подстрока.** Имя файла (без пути к нему), имеющее длину, равную числу указанному в первой подстроке.

**3 подстрока.** Время создания изображения в формате: YYYY.MM.DD.OO.MM.SS (YYYY-год, MM - месяц, DD - День, OO - час, MM - минута, SS - секунда)

**4 подстрока.** Время создания снимка в единицах времени, устанавливаемое переменной в последней строке этого файла. отсчитываемое от одной стандартного момента времени, например, 0000.00.00.00.00.00. В данном случае время установлено в секундах.

**11 строка.** Содержит начало и конец региона данных по долготе,отсчитываемые от левого края изображения (в данном случае 156 356).

**12 строка.** Содержит начало и конец региона данных по широте,отсчитываемые от верхнего края изображения (в данном случае 136 376).

**13 строка.** Содержит шаг по долготе для выбора точек по долготе (в данном случае 10).

**14 строка.** Содержит шаг по широте для выбора строк изображения в набор данных (в данном случае 20).

**15 строка.** Содержит тип размерности времени (в данном случае 0).

**16 строка.** Содержит используемый в расчетах диаметр Солнца.

**17 строка.** Содержит горизонтальный размер диска Солнца в пикселах для данной совокупности снимков (в данном случае 497).

**18 строка.** Содержит вертикальный размер диска Солнца в пикселах для данной совокупности снимков (в данном случае 497).

Далее следуют строки, содержащие аналогичную информацию для каждой широты.

**19 строка.** Содержит номер широты и в скобках широты в пикселах и в градусах (в данном случае соответственно 0 (120 , 28.8748)).

**20 строка.** Содержит последний ранг модели при оценивании спектральной матрицы на данной широте: 6

**21 строка.** Содержит диапазон номеров волновых чисел, на котором оценивалась спектральная матрица: [0, 500] ;

**22 строка.** Содержит диапазон частот, на котором оценивался частотный спектр:  $[-0.5, 0.5]$ , и шаг по частоте: 0.01.

**23 строка.** Содержит нормированное волновое число для которого оценивался частотный спектр: 0.043 24 строка. Содержит список всех пиков в частотном спектре для данного волнового числа -0.39 -0.23 -0.03 0.17 0.3 0.45 25 строка. Содержит список величины спектральной плотности в пиках частотного спектра для данного волнового числа: 0.130258 0.137045 0.221468 0.128913 0.130603 0.129564

Далее идут строки, содержащие аналогичную информацию для всех пиков волновых чисел, начиная со строки 23 и заканчивая строкой 25. Затем повторяется информация для следующей отобранной в обработку широты, начиная со строки 19.

Эта информация содержит полный набор данных для построения диаграммы волновое число - частота. Построение оценок скорости вращения

При самостоятельной обработке данных, находящихся в выходном файле, необходимо провести следующие вычисления. Для каждой широты и каждого максимума спектральной плотности спектра волновых чисел, необходимо отобрать максимумы спектральной плотности спектра частот, которые имеют отрицательное значение частоты, что соответствует движению волны в направлении вращения Солнца. Эти данные находятся в строках файла, описывающих максимумы частотного спектра. В примере в разделе "Выходной набор данных" это строки 24, 25 и аналогичные им. Для волнового числа 0.043 частотные максимумы таковы: -0.39 -0.23 -0.03 0.17 0.3 0.45 0.130258 0.137045 0.221468 0.128913 0.130603 0.129564

В первой из этих строк приведены частоты, а во второй - значения спектральной плотности. Среди частот берутся для анализа только три первых, имеющих отрицательные значения -0.39, -0.23, -0.03. Среди этих частот максимальным значением спектральной плотности обладает пик с частотой -0.03. Именно этот пик отбирается для анализа дисперсионной кривой. Из последнего правила могут быть некоторые исключения, если окажется, что существует максимум спектра частот в отрицательной области частот, обладающей несколько меньшим значением спектральной плотности, чем основной максимум, но лучше укладывающийся на дисперсионную линию. Такая ситуация возможна, поскольку мы не анализируем меридианальные составляющие волн. Поэтому может оказаться при определенных условиях, что основной максимум относится к волне, обладающей значительной составляющей волнового числа в меридианальном направлении. Для волнового числа 0.082 список частот таков: -0.45 -0.15 0.04 0.21 0.36 0.132586 0.179725 0.152298 0.13264 0.131843

В этом случае имеются только два подходящих частотных пика: -0.45 и -0.15. Из них отбирается только один -0.15, обладающий максимальным значением спектральной плотности 0.179725.

Просматривая списки частотных пиков для каждого волнового числа на данной широте, формируются последовательности пар чисел  $(k_j, f_j)$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Здесь  $k_j$  - волновое число, а  $f_j$  - частота основного пика. Для такого набора пар чисел оценка фазовой скорости  $C$  для данной широты может быть построена с помощью метода линейной регрессии в соответствии с



моделью:

$$k_j = C f_j + k_0.$$

Фазовая скорость при этом оценивается по формулам, приведенным в разделе линейной регрессия:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^M k_j f_j - \bar{k} \bar{f}}{\sum_{j=1}^M f_j^2 - \bar{f}^2}$$

Здесь  $\bar{k}$ ,  $\bar{f}$  - средние значения волнового числа и частоты.

Такое оценивание необходимо провести для каждой широты в отдельности. В результате получается набор пар чисел

$$(C_n, \Theta_n), \quad n = -l \dots, l.$$

Здесь  $C_n$  - оценка фазовой скорости на широте с номером  $n$ , а  $\Theta_n$  - значение самой широты, на которой была произведена оценка фазовой скорости. После того, как сформирован набор таких оценок, производится построение модели дифференциального вращения. Модель выбирается либо в стандартном виде:

$$V(\Theta) = \sin \Theta (B + A \sin^2 \Theta).$$

либо в каком-либо другом, соответствующем определенной модели дифференциального вращения. В случае стандартной модели коэффициенты  $A$ ,  $B$  оцениваются с помощью метода наименьших квадратов.

## Представление результатов

Результаты самостоятельного оценивания параметров дифференциального вращения представляются в форме оценок фазовой скорости для каждой широты в виде таблицы с указанием погрешностей, вычисления этих оценок. Отдельно представляются параметры кривой дифференциального вращения в используемой модели, которые оцениваются по методу наименьших квадратов с указанием погрешностей.

### Задание.

1. Из базы данных магнитограмм Солнца, полученных с помощью аппаратов SOHO (SDO или Hinode), выбрать последовательность из 5-6 изображений.

2. Используя программу Космофизика, провести последовательность вычислений и получить набор данных о распределении фазовых скоростей по широте.

3. Построить графики зависимости фазовой скорости от гелиошироты. Объясните результат.

4. Построить модель дифференциального вращения Солнца. Объясните результат.

5. Прделайте аналогичные вычисления для другого промежутка времени и сравните полученные результаты.

## 2.4 Движение заряженных частиц в межпланетном магнитном поле. Спираль Паркера

Одним из важных элементов космической среды вблизи орбиты Земли являются солнечные космические лучи (СКЛ) и солнечный ветер. Солнечный ветер представляет поток заряженных частиц сравнительно небольшой энергии, постоянно истекающий из короны Солнца. Магнитное поле Солнца вморожено в солнечный ветер и переносится вместе с ним от Солнца. Это формирует так называемую спираль Паркера, представляющую собой силовые магнитные линии, изогнутые по спирали, подчиняющиеся формуле Архимеда:

$$r = \frac{u}{\Omega}(\varphi - \varphi_0) + r_0,$$

где  $\varphi_0$  - начальный угол спирали на расстоянии  $r_0$  от центра Солнца,  $u$  - скорость солнечного ветра,  $\Omega$  - угловая скорость вращения Солнца,  $r$  и  $\varphi$  - полярные координаты в плоскости эклиптики с центром на Солнце, соответствующие точке наблюдения магнитного поля. В отличие от солнечного ветра более энергичные, но редкие, частицы СКЛ следуют за силовыми линиями магнитного поля Солнца, т.е. движутся вдоль спиралей Паркера. Кроме этого, если солнечный ветер постоянно “дует” от Солнца, то потоки СКЛ резко увеличиваются во время солнечных вспышек. Поэтому именно во время вспышек можно наблюдать одновременно эффекты формирования спирали Паркера и движения вдоль нее СКЛ. Изучению этих двух частей общего потока заряженных частиц, выброшенных Солнцем во время вспышек, и посвящена данная работа. Сопоставляя время движения

### Задание.

I. По известной скорости регистрируемого в околоземном космическом пространстве солнечного ветра найти: ([www.spaceweather.com](http://www.spaceweather.com)):

1. его радиальную составляющую и направление прихода к Земле (угол к направлению на Солнце).
2. время распространения от Солнца до Земли зарегистрированного солнечного ветра.
3. Определить на Солнце местоположение источника пришедшего к Земле солнечного ветра.
4. Указать использованные при выполнении работы допущения. Оценить их влияние на полученный результат.

II. Зная момент и координаты происшедшей на Солнце вспышки (информацию о недавних можно найти на той же страничке):

1. Найти время возможного наступления геомагнитной бури в зависимости от радиальной скорости распространения вспышечного выброса вещества.
2. Построить зависимость регистрируемой скорости солнечного ветра от момента времени его регистрации в околоземном космическом пространстве.
3. Указать использованные допущения и оценить их влияние на результат.

III. Зная момент наступления сильной геомагнитной бури и скорость солнечного ветра на ее момент (найти данные можно на той же страничке):

1. Оценить координаты местоположения солнечной вспышки, которая могла инициировать эту геомагнитную бурю.
2. Оценить время наступления этой солнечной вспышки.
3. Указать использованные допущения и оценить их влияние на результат.
4. Проверить (на той же страничке, в архиве), имела ли место локализованная солнечная вспышка. Объяснить причины возможного отсутствия найденной вспышки.

IV. В момент начала геомагнитной бури, указанной преподавателем, просмотреть данные мониторинга рентгеновского излучения Солнца за предшествующие 1-3 дня и выделить моменты времени, соответствующие резким увеличениям потока рентгеновского излучения (на порядки). Использовать для этого данные об интегральном потоке рентгеновского излучения солнечного диска, полученные на ИСЗ GOES и находящиеся на страничке <http://sec.noaa.gov/Data/goes.html>.

1. Для каждого всплеска рентгеновского излучения вычислить радиальную скорость движения соответствующего выброса солнечного вещества.
2. В рамках модели движения солнечного вещества вдоль спирали Архимеда найти область на Солнце и вспышку, которая могла вызвать рассматриваемую бурю.
3. Изобразить полученную область на карте Солнца. При возможности узнать (например, в архиве сайта [www.spaceweather.com](http://www.spaceweather.com)), была ли эта область активной и развивалась ли в ней в найденный момент вспышка.

Настоящее упражнение рекомендуется выполнять на материале, относящемся к эпохе невысокой солнечной активности. Вместо геомагнитной бури можно использовать спутниковую информацию о приходе потока солнечной плазмы в околоземное пространство.

# Глава 3

## Математические алгоритмы обработки данных

### 1 Метод наименьших квадратов

Пусть имеется модель исследуемого процесса общего вида

$$y(t) = \sum_{s=1}^M A_s f_s(t) + \delta(t), \quad (3.1)$$

где  $A_s$  - параметры модели, а  $f_s(t)$  - строго заданные функции времени,  $\delta(t)$  - случайные отклонения процесса  $y(t)$  от модели. Предположим, что необходимо отыскать модель вида (3.1), которая наилучшим образом в каком либо смысле описывала бы набор измеренных значений процесса  $y(t)$  в определенные моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Измеренные значения процесса обозначим через  $y_i$ , а через  $\delta_i$  обозначим значения отклонений  $\delta(t_i)$  в моменты времени  $t_i$ . При этом предполагается, что отклонения  $\delta_i$  являются независимыми случайными величинами с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями. Это означает, что выполняются следующие условия:

$$\langle \delta_i \rangle = 0; \quad \langle \delta_i \delta_j \rangle = 0, \quad i \neq j; \quad \langle \delta_i^2 \rangle = \sigma^2. \quad (3.2)$$

Здесь скобки  $\langle \rangle$  означают статистическое осреднение (математическое ожидание) соответствующих величин.

Общий принцип наименьших квадратов состоит в том, что в качестве наилучшей модели выбирается модель вида (3.1), параметры которой  $A_s^{(0)}$  удовлетворяют условию, что функция этих параметров

$$\sigma^2(A_1, \dots, A_M) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[ y_i - \sum_{s=1}^M A_s f_s(t_i) \right]^2 = \sigma^2$$

достигает минимума при  $A_s = A_s^{(0)}$ . Эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего общего вида:

$$\frac{\partial \sigma^2(A_1, \dots, A_M)}{\partial A_s} = 0, \quad A_s = 0, \dots, M. \quad (3.3)$$

Вычисляя производные находим:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial A_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{s=1}^M A_s f_s(t_i) \right) f_k(t_i) = 0, \quad k = 1, \dots, M.$$

Эта система уравнений может быть записана в следующей форме

$$\sum_{j=1}^M \left[ \sum_{i=1}^N f_k(t_i) f_j(t_i) \right] A_j = \sum_{i=1}^N f_k(t_i) y_i, \quad k = 1, \dots, M,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{QA} = \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_M)$ , матрица  $\mathbf{Q}$  и вектор  $\mathbf{F}$  имеют следующие элементы:

$$Q_{kj} = \sum_{i=1}^N f_k(t_i) f_j(t_i), \quad F_k = \sum_{i=1}^N y_i f_k(t_i).$$

Решение уравнения (3.4) можно записать так:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}.$$

В покомпонентной записи это соотношение выглядит так:

$$A_j = \sum_{k=1}^M R_{jk} \left( \sum_{i=1}^N y_i f_k(i) \right), \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.5)$$

где  $R_{ik}$  - матричные элементы матрицы  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}$  обратной к матрице  $\mathbf{Q}$ .

Вычислим погрешность оценки параметров регрессии. Для этого введем следующие обозначения и определения. Обозначим через  $A_k^{(0)}$  истинные коэффициенты регрессии в предположении, что рассматриваемая модель в действительности имеет место. Коэффициенты  $A_k$ , полученные в результате вычислений и удовлетворяющие соотношениям (3.5), будем называть оценками истинных коэффициентов регрессии. Подставим выражения для  $y_i$  из модели (3.1) в предположении, что в ней стоят истинные коэффициенты регрессии  $A_k^{(0)}$  в (3.5). В результате получим:

$$A_j = \sum_{k=1}^M R_{jk} \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{s=1}^M A_s^{(0)} f_s(t_i) + \delta_i \right) f_k(t_i) \right), \quad j = 1, \dots, M,$$

Преобразуя это соотношение находим:

$$A_j = \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^M R_{jk} Q_{ks} A_s^{(0)} + \sum_{i=1}^N \delta_i \sum_{k=1}^M R_{jk} f_k(t_i), \quad j = 1, \dots, M,$$

В силу того, что матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}$  обратные друг другу, т.е.

$$\sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^M R_{jk} Q_{ks} = \delta_{js},$$

где  $\delta_{kk} = 1$ ,  $k = 1, \dots, M$  и  $\delta_{ks} = 0$ ,  $k \neq s$ , окончательно находим:

$$A_j = A_j^{(0)} + \sum_{i=1}^N \delta_i \sum_{k=1}^M R_{jk} f_k(t_i), \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.6)$$

В силу условий (3.2) находим:

$$\langle A_j \rangle = A_j^{(0)}.$$

Последнее условие означает, что оценка  $A_j$  является **не смещенной**. Далее имеем

$$\sigma_{A_j}^2 = \langle (A_j - A_j^{(0)})^2 \rangle = \sigma^2 R_{jj}.$$

Эти уравнения можно использовать для вычислений в общем случае, однако более полезно рассмотреть конкретные типы моделей, которые встречаются в данном практикуме.

## 1.1 Линейная регрессия

### Построение оценки коэффициентов регрессии

В большинстве лабораторных работ необходимо использовать метод наименьших квадратов для оценивания наклонов зависимости различного рода параметров орбиты и движения спутников от времени. Это простейший вариант модели (3.1).

Предположим, что физический параметр  $y$  зависит от другого физического параметра  $t$  (например, времени измерения  $y$ ) следующим образом:

$$y(t) = At + B + \delta(t),$$

где  $A$  и  $B$  - параметры модели. Следуя общему рецепту, получаем:

$$\frac{\partial \sigma^2(A, B)}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - At_i - B)t_i = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \sigma^2(A, B)}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - At_i - B) = 0. \quad (3.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2, \quad C_{YT} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i t_i.$$

Тогда уравнения (3.7) и (3.8) можно записать так:

$$\sigma_T^2 A + \bar{T} B = C_{YT},$$

$$\bar{T} A + B = \bar{Y}.$$

Решая эту систему двух линейных алгебраических уравнений находим:

$$A = \frac{C_{YT} - \bar{Y} \bar{T}}{\sigma_T^2 - \bar{T}^2},$$

$$B = \bar{Y} - A \bar{T}.$$

Такие значения параметров модели принимаются как наилучшие по методу наименьших квадратов. С помощью таких вычислений производится оценивание скорости изменения долготы восходящего узла, аргумента перигея и скорости убывания полной энергии в задачах практикума.

### Вычисление погрешности определения коэффициентов линейной регрессии

Для вычисления погрешности определения коэффициентов  $A$  и  $B$  представим полученное для них решение в таком виде:

$$A = \frac{1}{\sigma_T^2 - \bar{T}^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i t_i,$$

$$B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - A \bar{T}.$$

Обозначим через  $A_0$  и  $B_0$  истинные значения коэффициентов модели, в отличие от  $A$  и  $B$ , которые будем называть оценками  $A_0$  и  $B_0$ . Связь между  $A_0$ ,  $B_0$  и  $A$ ,  $B$  получается, если в выражения для  $A$ ,  $B$  подставить вместо  $y_i$  значения из модели с учетом случайных отклонений  $\delta_i = \delta(t_i)$ . В результате получим

$$A = A_0 + \frac{1}{\sigma_T^2 - \bar{T}^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i t_i,$$

$$B = B_0 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i$$

Как уже отмечалось, предполагается, что

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i = 0, \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \delta_i^2,$$

и корреляции между  $\delta_i$  и  $\delta_j$  при  $i \neq j$  равны нулю, т.е.

$$\langle \delta_i \delta_j \rangle = 0.$$

В этом случае можно вычислить среднее значение и дисперсию оценок  $A$  и  $B$ . Вычисления дают следующий результат

$$\langle A \rangle = A_0, \quad \langle B \rangle = B_0, \quad (3.9)$$

$$\sigma_A^2 = D_A = \frac{\sigma^2}{N(\sigma_T^2 - \bar{T}^2)}, \quad \sigma_B^2 = D_B = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (3.10)$$

Величины  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  и есть погрешности вычисления коэффициентов линейной регрессии.

## 1.2 Квадратичная регрессия

Аналогичным образом можно построить оценку параметров модели квадратичной регрессии. Модель квадратичной регрессии имеет вид

$$y(t) = At^2 + Bt + C + \delta(t).$$

Уравнения (3.3) в случае такой модели будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} AT_4 + BT_3 + CT_2 &= Y_2, \\ AT_3 + BT_2 + CT_1 &= Y_1, \\ C &= Y_0 - AT_2 - BT_1. \end{aligned}$$

Исключая  $C$  приводим уравнения к виду

$$M_1 A + M_0 B = F_1, \quad M_0 A + M_2 B = F_2, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= T_4 - T_2^2, \quad M_2 = T_2 - T_1^2, \quad M_0 = T_3 - T_1 T_2, \\ F_1 &= Y_2 - T_2 Y_0, \quad F_2 = Y_1 - T_1 Y_0, \end{aligned}$$

а величины  $T_m$  и  $Y_n$  определяются следующим образом:

$$T_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^m, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad Y_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i t_i^n, \quad n = 0, 1, 2.$$



Решение уравнений (3.11) имеет следующий вид

$$A = \frac{M_2 F_1 - M_0 F_2}{M_1 M_2 - M_0^2}, \quad B = \frac{-M_0 F_1 + M_1 F_2}{M_1 M_2 - M_0^2}. \quad (3.12)$$

Параметр модели  $C$  при этом находится из соотношения  $C = Y_0 - AT_2 - BT_1$ .

Такая модель может быть использована для оценки отклонений долготы восходящего узла от векового движения.

### 1.3 Модель гармонического процесса

В прикладных задачах анализа различного рода физических и других процессов часто требуется выделять из процесса общего вида гармонические составляющие и оценивать их основные характеристики. Модель одномерного гармонического процесса  $y(t)$  с собственной частотой  $\omega$  имеет следующий вид

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C + \delta(t). \quad (3.13)$$

Согласно общему принципу метода наименьших квадратов, условие достижения функции  $\sigma$  минимального значения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial A} &= A(1 - C_2) - S_2 B + 2S_1 C - 2S_y = 0, \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial B} &= B(1 + C_2) - S_2 A + 2C_1 C - 2S_y = 0, \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial C} &= C + AS_1 + BC_1 - \bar{Y} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos 2\omega t_i, & S_2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin 2\omega t_i, \\ C_1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \omega t_i, & S_1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \omega t_i, \\ \bar{Y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, & S_y &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sin \omega t_i, & C_y &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \cos \omega t_i. \end{aligned}$$

После исключения  $C$  уравнения для амплитуд  $A$  и  $B$  гармоники опять примут вид уравнений (3.11), в которых коэффициенты будут вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 - C_2 - 2S_1^2, & M_2 &= 1 + C_2 - 2C_1^2, \\ M_0 &= -S_2 - 2C_1 S_1, \\ F_1 &= 2[S_y - S_1 \bar{Y}], & F_2 &= 2[C_y - C_1 \bar{Y}]. \end{aligned}$$

Решение (3.11) будет иметь тот же вид (3.12). Параметр  $C$  будет вычисляться по формуле

$$C = -AS_1 - BC_1 - \bar{Y}.$$

Суммарная амплитуда гармоник и оценка начальной фазы имеют вид

$$A_0 = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}.$$

Эта модель может быть использована для оценивания параметров модели отклонения векового движения аргумента перигея и средней аномалии в эпоху от векового движения.

## 2 Вычисление погрешностей измерения сложных параметров

Одной из задач практикума является задача вычисления погрешностей величин, которые являются функциями от величин, измеряемых непосредственно в эксперименте. Такие величины мы будем называть сложными. Так в задачах об измерении параметра  $J_2$  непосредственно измеряемыми в эксперименте величинами являются параметры орбитального движения спутника - аргумент перигея, долгота восходящего узла и т.д. Сам же параметр  $J_2$  является функцией этих величин.

Предположим, что измеряемый параметр  $p$ , является некоторой функцией от измеряемых непосредственно в эксперименте величин  $X_i, i = 1, \dots, L$ , т.е.

$$p = P(X_1, X_2, \dots, X_L).$$

Предположим далее, что измеряемые непосредственно в эксперименте величины  $X_i$  характеризуются оценками средних значений  $\bar{X}_i$  и суммарной статистической и приборной погрешностями равной  $\sigma_i$ , соответственно, т.е.  $\sigma_i^2$  есть дисперсия разброса, порождаемого неконтролируемыми внешними причинами и погрешностью шкалы приборов. Тогда в качестве оценки параметра  $p$  выбирается значение

$$\bar{p} = P(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_L),$$

и в случае независимости случайных отклонений отдельных величин  $X_i$  абсолютная погрешность измерения параметра  $p$  определяется следующей формулой:

$$\sigma_p = \sqrt{\left| \frac{\partial P}{\partial X_1} \right|^2 \cdot \sigma_1^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial X_2} \right|^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left| \frac{\partial P}{\partial X_L} \right|^2 \cdot \sigma_L^2} \Bigg|_{X_1=\bar{X}_1, X_2=\bar{X}_2, \dots, X_L=\bar{X}_L}. \quad (3.14)$$

Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\frac{\sigma_p}{\bar{p}} = \sqrt{\left| \frac{\partial \ln P}{\partial X_1} \right|^2 \cdot \sigma_1^2 + \left| \frac{\partial \ln P}{\partial X_2} \right|^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left| \frac{\partial \ln P}{\partial X_L} \right|^2 \cdot \sigma_L^2} \Bigg|_{X_1=\bar{X}_1, X_2=\bar{X}_2, \dots, X_L=\bar{X}_L}.$$

## 2.1 Вычисление погрешностей измерения параметра $J_2$

В качестве примера рассмотрим вычисление погрешности вычисления  $J_2$  по данным о долготе восходящего узла. Соответствующая формула для оценки  $J_2$  дается соотношением:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} J_2 \left( \frac{R_E}{p} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}. \quad (3.15)$$

Заметим, что в эту формулу входят следующие непосредственно измеряемые параметры:  $i$  - наклонение,  $p$  - фокальный параметр,  $n$  - среднее движение, и наклон графика линейной регрессии  $R_{anl}$ . Радиус Земли будем считать постоянной, измеренной с абсолютной точностью. То же самое относится к эксцентриситету  $e$ , который считается величиной равной нулю, что соответствует круговой орбите. Заметим, что в рассматриваемом приближении величины  $i$ ,  $p$ ,  $n$  считаются постоянными. Однако анализ данных показывает, что за период времени, на котором оцениваются параметры линейной регрессии все эти параметры заметно эволюционируют, особенно, если рассматривать достаточно большие промежутки времени. Поэтому эти изменения параметров с точки зрения данного приближения следует считать случайными (не предсказуемыми) и для построения оценки  $J_2$  по формуле (3.15) в них следует подставлять средние значения этих величин, полученные за время наблюдения на выбранном интервале времени. Для малых эксцентриситетов  $e \sim 0$ , случай которых рассматривается в данной задаче, величины  $p$  и  $n$  являются не независимыми и связаны соотношением

$$p = \left( \frac{GM}{n^2} \right)^{1/3}.$$

Поэтому при вычислении погрешности оценки  $J_2$  в формулу (3.14) следует подставлять дисперсию изменений только величин  $n$  и  $i$ . В формулу (3.15) входит так же параметр  $R_{anl}$  линейно регрессии графика векового изменения долготы восходящего узла. Для оценки его погрешности необходимо воспользоваться формулой (3.10) для оценки параметра  $A$  линейной регрессии.

В результате получаем следующую формулу для оценивания относительной погрешности  $J_2$ :

$$\frac{\sigma_{J_2}}{\bar{J}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{R_{anl}}^2}{R_{anl}^2} + \frac{49}{9} \frac{\sigma_n^2}{n^2} + \frac{\sigma_i^2 \sin^2 i}{\cos^4 i}}. \quad (3.16)$$

Из этой формулы следует, что отклонения в значениях  $i$  могут приводить к существенным погрешностям в измерении  $J_2$  для спутников на орбитах близких к полярным, когда  $\cos i \ll 1$ .

Для аргумента перигея погрешность вычисляется по формуле:

$$\frac{\sigma_{J_2}}{\bar{J}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{R_{anl}}^2}{R_{anl}^2} + \frac{49}{9} \frac{\sigma_n^2}{n^2} + 25 \frac{\sigma_i^2 \cos^2 i \sin^2 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^4}}, \quad (3.17)$$

а для средней аномалии по формуле:

$$\frac{\sigma_{J_2}}{\bar{J}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{R_{anl}}^2}{R_{anl}^2} + \frac{49}{9} \frac{\sigma_n^2}{n^2} + 9 \frac{\sigma_i^2 \cos^2 i \sin^2 i}{(1 - 3 \cos^2 i)^4}}, \quad (3.18)$$

Здесь  $\sigma_i$  и  $\sigma_n$  - погрешности измерения наклона и среднего движения, включающие статистический разброс измерений этих величин,  $\sigma_{R_{anl}}$ ,  $\sigma_{R_{arp}}$ ,  $\sigma_{R_{aan}}$  - погрешности метода линейной регрессии для соответствующих параметров.

## 2.2 Вычисление погрешностей относительной плотности атмосферы

## 3 Методы сглаживания временных рядов

Особенно их применение широко распространено в задачах спектрального анализа временных рядов. Однако они применяются и в других областях обработки данных.

### 3.1 Фильтрация временных рядов

Под фильтрацией временных рядов подразумевают, как правило, линейное преобразование, позволяющее изменять Фурье-спектр этого ряда, удаляя часть гармонических его составляющих. Пусть имеется временной дискретный ряд измерений  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_N$  некоторого физического параметра  $u(t)$ , изменяющегося со временем, произведенных через равные промежутки времени  $\Delta t$ :

$$u_k = u(t_k), \quad t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

В этом случае под линейной сглаживающей (низкочастотной по области пропускания) фильтрацией подразумевают преобразование следующего общего вида:

$$U_k = \sum_{j=-P}^P W_j u_{k-j}, \quad k = P, \dots, N - P. \quad (3.19)$$

Здесь вещественные неотрицательные числа  $W_j \geq 0$ ,  $j = -P, \dots, P$  называют коэффициентами фильтра, а целое число  $P$  называют полушириной окна фильтра. Числа  $W_j$  должны также удовлетворять условиям нормировки:

$$\sum_{j=-P}^P W_j = 1,$$

и симметричности:

$$W_j = W_{-j}, \quad j = -P, \dots, P.$$

Кроме сглаживающей или низкочастотной фильтрации применяют высокочастотную фильтрацию, позволяющую удалять тренды, и полосовую фильтрацию. Под высокочастотной фильтрацией понимают линейное преобразование, состоящее из преобразования (3.19) и последующего вычитания полученного ряда из исходного:

$$V_k = u_k - U_k, \quad k = -P, \dots, P. \quad (3.20)$$

Здесь числа  $U_k$  определяются соотношениями (3.19). Полосовая фильтрация состоит в применении к исходному ряду последовательно преобразований низкочастотной фильтрации с полушириной окна  $P$  и высокочастотной фильтрации с полушириной окна  $Q > P$ . В случае высокочастотной фильтрации полученный ряд содержит частотные составляющие выше некоторой характерной частоты отсечки фильтра, а полосовой - в некоторой ограниченной области (полосе) частот. В задачах данного практикума используется сглаживающий или низкочастотный фильтр.

При использовании фильтров следует иметь в виду, что их применение сопряжено с уменьшением длины исходного ряда на величину ширины окна, равную  $2P$ . Это видно из определений их линейных преобразований. Особенно это важно при использовании высокочастотных фильтров, для которых полуширина должна быть очень большой, что приводит к существенному сокращению длины исходного ряда и, соответственно, к потере точности или надежности статистических оценок, получаемых на их основе.

В зависимости от выбора коэффициентов  $W_k$  фильтра различают множество различных их видов сглаживающих фильтров, которые определяют множество различных видов подавления высокочастотных составляющих спектра исходного сигнала. Мы рассмотрим лишь три их вида. Другие виды фильтров описаны в различных учебниках и руководствах по обработке данных (см. например, [13, 14]). Заметим, что для целей задачи 3, не большой разницы в применении любого из приведенных ниже фильтров. Большую роль играет выбор полуширины окна для получения достаточно надежных значений производной от фокального параметра. Подбор полуширины осуществляется непосредственно во время работы с конкретным временным рядом.

### Прямоугольный фильтр

Прямоугольный фильтр определяется выбором коэффициентов в соответствии со следующим правилом:

$$W_k = w_0, \quad k = -P, \dots, P. \quad (3.21)$$

Из условия нормировки сразу находим, что число  $w_0$  должно быть связано с полушириной окна фильтра следующим соотношением:

$$w_0 = \frac{1}{2P + 1}.$$

Графики весовых коэффициентов фильтров приведены на рис. 2.1 (а,б,в).

### Косинусный фильтр (Тьюки)

Косинусный фильтр (рис. 2.1.(б)) задается следующими соотношениями

$$W_k = \frac{1}{2P} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi k}{P} \right) \right), \quad k = -P, \dots, P. \quad (3.22)$$

### Треугольный фильтр

Треугольный фильтр (рис. 2.1.(в)) задается следующими соотношениями

$$W_k = \frac{1}{P^2} (2P - |k - P|), \quad k = -P, \dots, P. \quad (3.23)$$

## 3.2 Кусочно-линейная регрессия и кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием

Хотя использование фильтров для получения сглаженной оценки временного хода фокального параметра является наиболее простым способом решения этой задачи, тем не менее представляет интерес и другие типы сглаживания. Основной проблемой получения сглаженной оценки с помощью сглаживающих фильтров является упомянутое ранее уменьшение длины фильтрованного ряда по сравнению с исходным. Одним из методов избежать этой проблемы является методы кусочно-линейной регрессии и сглаживающего кубического сплайна, который описан в монографии [12]<sup>1</sup>). Рассмотрим их по отдельности.

### Кусочно-линейная регрессия

В задаче 3 основной проблемой является получение устойчивой оценки скорости изменения фокального параметра со временем. Метод кусочно-линейной регрессии позволяет решить эту проблему с помощью использования метода наименьших квадратов с линейной моделью, которая применяется к отдельным небольшим участкам временного ряда, в данном случае к измерениям фокального параметра. Для этого весь ряд значений временного ряда разбивается на некоторое число  $K$  сегментов, содержащих  $N_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  точек так, что полное число точек ряда  $N$  равно сумме точек сегментов:

$$N = \sum_{k=1}^K N_k.$$

Числа  $N_k$  могут отличаться, но самый простой их выбор, это их равенство  $N_k = [N/K]$ ,  $k = 1, \dots, K-1$ ,  $N_K = N - (K-1)[N/K]$ , где  $[f]$  - означает целую часть вещественного числа  $f$ . После

<sup>1</sup>Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 454 С.

указания концов сегментов  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, K$  на каждом из них для измеренных значений параметра (фокального параметра) вычисляются параметры линейной регрессии  $A_k, B_k$ :

$$u = A_k t + B_k, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, K.$$

Коэффициент  $A_k$  и является оценкой скорости изменения параметра  $u$  на каждом из сегментов. Приписывая это значение всем точка сегмента получаем кусочно постоянную аппроксимацию скорости изменения параметра  $u$ . Величина “сглаживания” в этом случае будет зависеть от числа сегментов и от их длины. Чем больше сегментов выбирается, тем короче в среднем становятся их длины, тем сглаживание оказывается меньшим и уменьшается устойчивость или надежность оценки производной. Поэтому число сегментов должно быть сравнительно небольшим. Оптимальное число сегментов подбирается экспериментально для каждого ряда отдельно. В этом состоит существенный недостаток такого подхода. Однако простота его реализации является его относительным достоинством.

### Кубические сплайны

Чтобы избежать трудностей, связанных как с фильтрацией (уменьшение длины ряда), так и с линейно-кусочной регрессией, можно воспользоваться методами сплайновой интерполяции. Одним из наиболее простых методов сплайновой интерполяции является метод кубических сплайнов и его модификация - метод кубической сглаживающей сплайн-функции.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  вещественной оси  $x$  задана сетка  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ , в узлах которой заданы значения функции  $u_k = u(x_k)$ . метод кубических сплайн-функций реализует идею об интерполяции значений функции  $u(x)$  в промежуточные точки сетки с помощью гибкой упругой линейки, проходящей через все точки  $P_k = (x_k, u_k)$  плоскости  $x, u$ . Такая линейка у чертежников Великобритании начала XX-века называлась сплайном.

Упругая линейка, изогнутая по закону  $g = g(x)$  так, что бы проходить через все заданные точки  $P_k = (x_k, u_k)$ , с точки зрения теории упругого твердого тела доставляет минимум функционалу энергии изгиба тонкой ленты. Этот функционал можно записать в виде:

$$\mathcal{E} = \int_a^b (g'')^2 dx, \quad (3.24)$$

где

$$g'' = \frac{d^2 g}{dx^2}.$$

Для того, что бы найти форму линейки  $g(x)$ , которая называется сплайн-функцией, необходимо найти минимум функционала (3.24) при условии того, что он точно проходит через точки  $P_k$ . В результате с помощью метода множителей Лагранжа приходим к задаче на абсолютный экстремум для функционала

$$\mathcal{E}_1 = \int_a^b (g'')^2 dx + \sum_{k=1}^K \lambda_k (g(x_k) - u_k),$$

где  $\lambda_k$  - множители Лагранжа.

Решение этой задачи эквивалентно функции  $g(x)$ , которая на каждом сегменте  $[x_{k-1}, x_k]$  представляет собой кубический полином следующего вида:

$$g_k(x) = m_k x^3 + n_k x^2 + p_k x + q_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \quad (3.25)$$

При этом на границах сегментов должны выполняться граничные условия:

$$g_k''(x_k) = g_{k+1}''(x_k), \quad g_k'(x_k) = g_{k+1}'(x_k), \quad g_k(x_k) = g_{k+1}(x_k), \quad (3.26)$$

т.е.  $g(x)$  в целом является функцией класса  $C^2$ , т.е. имеющей непрерывные производные до второго порядка включительно.

Решение этой задачи полностью приведено в [12]. Мы лишь укажем окончательные результаты решения этой задачи.



## Литература

---

# Литература

- [1] А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986 г.
- [2] Ю.В.Александров. Введение в физику планет. Киев. “Вища школа”, 1982
- [3] В.В. Белецкий. Очерки о движении космических тел. М.:“Наука”,1972, 320 с.
- [4] Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968, 800 с.
- [5] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. под. ред. Дубошина, М.:Изд. Наука, 1971, с. 584
- [6] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М.:Наука, 1973
- [7] Б.А. Тверской. Основы теоретической космофизики.М.: Изд. УРСС, 2004, 376 с.
- [8] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. М.: Мир, 1976.
- [9] Мультимедийный курс: Жизнь Земли в атмосфере Солнца. Под ред. А.С. Ковтюх, НИИЯФ МГУ, 2005
- [10] Космический практикум. Под. ред. А.С. Ковтюха. Москва.: Изд. УДО, 2007
- [11] А.С. Монин. Солнечный цикл. Ленинград.: Гидрометеиздат, 1980
- [12] Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
- [13] Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1972. т.1-2.
- [14] Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
- [15] Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе. Преп. МГИ АН УССР, 1986. Ч. 1,2.

## Литература

---

# Оглавление

1	Введение в космофизический практикум . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Земля. Движение искусственных спутников Земли</b>	<b>3</b>
1	Теоретические основы . . . . .	5
1.1	Движение точечной частицы в поле тяготения Земли . . . . .	5
1.2	Влияние сопротивления атмосферы на движение спутника . . . . .	15
2	Входные данные для выполнения работ . . . . .	17
3	Задачи практикума . . . . .	22
3.1	Задача 1. Измерение $J_2$ по вековым изменениям кеплеровских параметров орбиты спутник . . . . .	22
3.2	Задача 2. Измерение $J_2$ по долгопериодическим изменениям кеплеровских параметров орбиты спутника . . . . .	24
3.3	Задача 3. Исследование изменчивости плотности атмосферы на высоте спутника с помощью метода оценивания величины сопротивления атмосферы	26
3.4	Задача 4. Исследование взаимосвязи изменений плотности атмосферы и солнечной активности . . . . .	28
3.5	Задача 5. Моделирование движения спутника на низких орбитах вблизи Земли	29
3.6	Задача 6. Моделирование движения спутника на геостационарной орбите .	30
4	Приложение 1. Тексты программ для выполнения заданий . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Солнце</b>	<b>39</b>
1	Теоретические основы . . . . .	41
1.1	Солнечные пятна и их перемещение по диску Солнца . . . . .	41
1.2	Дифференциальное вращение Солнца . . . . .	45
1.3	Солнечный ветер, СКЛ и спираль Паркера . . . . .	51
2	Задачи практикума . . . . .	53
2.1	Задача 7. Динамика и кинематика солнечных пятен . . . . .	53
2.2	Задача 8. Динамика площади солнечных пятен . . . . .	54
2.3	Задача 9. Дифференциальное вращение Солнца . . . . .	55
2.4	Движение заряженных частиц в межпланетном магнитном поле. Спираль Паркера . . . . .	65

<b>3</b>	<b>Математические алгоритмы обработки данных</b>	<b>67</b>
1	Метод наименьших квадратов . . . . .	67
1.1	Линейная регрессия . . . . .	69
1.2	Квадратичная регрессия . . . . .	71
1.3	Модель гармонического процесса . . . . .	72
2	Вычисление погрешностей измерения сложных параметров . . . . .	73
2.1	Вычисление погрешностей измерения параметра $J_2$ . . . . .	74
2.2	Вычисление погрешностей относительной плотности атмосферы . . . . .	75
3	Методы сглаживания временных рядов . . . . .	75
3.1	Фильтрация временных рядов . . . . .	75
3.2	Кусочно-линейная регрессия и кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием . . . . .	77