МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Интегрирование.
Неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его применение.

Электронные методические указания

САМАРА
2011

УДК 517.31

Составитель: **Пчелкина Юлия Жиганшевна**

Интегрирование. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его применение. [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. Ю.Ж. Пчелкина. – Электрон. текстовые дан. (0,38 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Настоящие методические указания содержат образцы решений типовых задач, необходимые для выполнения упражнений и индивидуальных заданий, по теме «Интегрирование», соответствующей программе 1-го курса математического анализа факультета информатики.

Методические указания предназначены для подготовки бакалавров направления 010400.62 «Прикладная математика и информатика» факультете информатики, изучающих дисциплину «Математический анализ» в 1 и 2 семестрах.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

1. Способы вычисления неопределённых интегралов

Задача 1.1. Вычислить $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Решение. Применим способ внесения выражения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C .$$

Задача 1.2. Вычислить $\int \frac{2xdx}{x+3}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{2xdx}{x+3} = 2\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = 2\int\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx = 2\left(\int dx - 3\int \frac{dx}{x+3}\right) = 2x - 3\ln|x+3| + C .$$

Задача 1.3. Вычислить $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

Сведём данный интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{2-3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right| + C .$$

Задача 1.4. Вычислить $\int \frac{\ln xdx}{x}$;

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{\ln xdx}{x} = \begin{bmatrix} \ln x = t, \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C .$$

Задача 1.5. Вычислить $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}} = \begin{bmatrix} t = 1-2x^2, \\ dt = -4xdx \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-2x^2} + C .$$

Задача 1.6. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$.

Решение. Введём подстановку $t = x-1, x = t+1, dt = dx$. Получим:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2(t+1)+4} = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C .$$

Задача 1.7. Вычислить $\int x \, arctg\, x \, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$. В данном случае: $u = arctgx, dv = x\,dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2}$. Подставляя эти выражения в формулу, получим:

$$I = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctg\, x + C .$$

Задача 1.8. Вычислить $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5}\, dx$.

Решение. Введем подстановку $t = 1-3x^5$, откуда $dt = -15x^4 dx$. Тогда $I = -\frac{1}{15}\int \sqrt[4]{t}\, dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к прежней переменной:

$$I = -\frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = -\frac{4}{75}\sqrt[4]{t^5} + C = -\frac{4}{75}\sqrt[4]{(1-3x^5)^5} + C .$$

Задача 1.9. Вычислить $\int \sin^3 x dx$;

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$. Введём подстановку $\cos x = t$, тогда $dt = -\sin x dx$ и получим: $-\int (1-t^2)dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

Задача 1.10. Вычислить $\int \cos^4 x \sin^3 dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)\sin x\, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x dx$

Введём подстановку $\cos x = t$, тогда $dt = -\sin x dx$. Получим:

$-\int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$.

2. Способы вычисления определенных и несобственных интегралов

Задача 2.1. Вычислить $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-2x}$.

Решение. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} = F(4)-F(3) = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$

Задача 2.2. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 2x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x+\sin x)dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5}-\cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{5}+\cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}.$$

Задача 2.3. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = F(1)-F(0) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Задача 2.4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Решение. Точка $x=1$ является особой точкой, поскольку подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому:

$I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right|-\ln 1\right)=\frac{1}{2}(-\infty-0)=-\infty$ - получили бесконечный предел.

Таким образом, данный интеграл расходится.

3. Приложения определенного интеграла

Задача 3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=2\ .$$

Решение. Площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, образованных прямой $y=x$ и гиперболой $y=\frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$.

$$S=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)\Bigg|_1^2=2-\ln 2-\frac{1}{2}+0=1\frac{1}{2}-\ln 2\ .$$

Задача 3.2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=0, x=0\ .$$

Решение. Используем формулу для нахождения объёма тел вращения: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

$$V=\pi\int_0^1 (1-x^2)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{3}\ .$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. Лекции по математическому анализу //М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 1 //М.: Издательство Проспект, 2007. – 660 с.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 2 //М.: Издательство Проспект, 2004. – 357 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1 //М.: Физматлит, 2005. – 645 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2 //М.: Физматлит, 2006. – 464 с.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // М.: Наука, 1985. – 384с.

7. Райков Д.А. Одномерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1982. –416 с.

8. Райков Д.А. Многомерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1989. –272 с.