ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Е.Л. ЕМЕЛЬЯНОВА, А.Л. УСОЛЬЦЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2006

УДК 517.1 (075)

Инновационная образовательная программа "Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий"

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. Ф. Демичев

Емельянова Е. Л., Усольцев А. Л.

Исследование функций и построение графиков : метод. указания /*Е. Л. Емельянова., А. Л. Усольцев.* – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 18 с.

Методические указания и варианты расчетно-графической работы составлены в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей вузов и обеспечивают методическую поддержку расчетно-графической работы «Полное исследование и построение графиков функций».

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов всех специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 517.1 (075)

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Цель данных указаний – изложить и проиллюстрировать на примерах схему исследования графика функции одной переменной.

Поставим задачу: исследовать и построить график некоторой функции $y = f(x)$.

План решения будет следующим:

1. Находим область определения функции $D(f)$.
2. Находим интервалы непрерывности функции; находим точки разрыва (если они есть) и устанавливаем их характер; строим схематично график функции в окрестностях точек разрыва.
3. Выясняем вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).
4. Устанавливаем, является ли функция чётной, нечётной или общего вида. Исследуем функцию на периодичность.
5. Находим (если это возможно) точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки, на которых функция знакопостоянна, т.е. $f(x)>0$ или $f(x)<0$.
6. С помощью первой производной находим интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.
7. С помощью второй производной находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
8. По полученным данным строим эскиз графика данной функции.

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Пример № 1

Провести полное исследование и построить график функции:

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} \ .$$

Решение

1. Область определения: $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2. Так как рассматриваемая функция является элементарной, то она непрерывна во всей своей области определения, т.е. интервалами непрерывности будут интервалы

$(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, а $x = 0$ – точка разрыва функции.

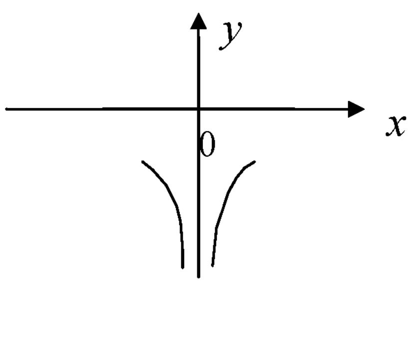
Определим ёе характер. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty \ ;$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty \ .$$

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва II рода.

Эскиз графика в окрестности точки разрыва выглядит следующим образом:



Так как $x = 0$ – точка разрыва II рода, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y = kx+b$.

Вычислим:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^3 + 14x - 6}{4x^3} = \frac{1}{2}$$

далее находим

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2} x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} - \frac{1}{2} x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 - 2x^3}{4x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\frac{5}{4}$$

Следовательно, при $x \to \pm\infty$ график исследуемой функции имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$, т.е. $y = \frac{1}{2} x - \frac{5}{4}$

4. Очевидно, что $\forall x \in D(y) \quad -x \in D(y)$. Найдём $f(-x)$:

$$f(x) = \frac{-2x^3 - 5x^2 - 14x - 6}{4x^2} = -\frac{2x^3 + 5x^2 + 14x + 6}{4x^2}.$$

Очевидно, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной. Функция также не является периодичной.

5. Так как $x = 0$ не входит в область определения функции, то точек пересечения с осью Оy у графика функции нет.

Найдём точки пересечения с осью Оx:

$$\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+14x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x+6\right)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ при } x=\frac{1}{2}$$

Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2};0\right)$ является точкой пересечения графика функции с осью Ox.

Перепишем выражение, задающее функцию, в виде:

$$y=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x+6\right)}{4x^2}.$$

Так как $x^2-2x+6>0 \quad \forall x \in D(f)$ и $4x^2>0 \quad \forall x \in D(f)$, то $f(x)>0$ при $x>\frac{1}{2}$ и $f(x)<0$ при $x<\frac{1}{2}$.

6. Вычислим производную данной функции:

$$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{(6x^2-10x+14)x^2-2x(2x^3-5x^2+14x-6)}{x^4}$$

$$=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2x^3}.$$

$f'(x)=0$ при $x=1, x=2, x=-3$ и $f'(x)$ не определена при $x=0$. Точки из $D(f)$, в которых $f'(x)$ обращается в ноль или не существует, называют критическими точками. Т. к. $x=0$ не входит в $D(f)$, то критическими точками будут $x=1, x=2, x=-3$.

Если в интервале $(a;\ b)$ $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, если же $f'(x)<0$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то $f(x)$ имеет в точке x_0 max, а если с «–» на «+», то $f(x)$ имеет в точке x_0 min.

Таким образом получаем таблицу:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не опр.	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{49}{12}$	↘	Не опр.	↗	$\frac{5}{4}$	↘	$\frac{9}{8}$	↗
		max				max		min	

7. Найдём вторую производную:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{(3x^2-7)x^3-3x^2(x^3-7x+6)}{x^6} = \frac{7(x-\frac{9}{7})}{x^4}$$

Если в интервале $(a;\ b)$ $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$), то график функции является вогнутым (выпуклым) на этом интервале.

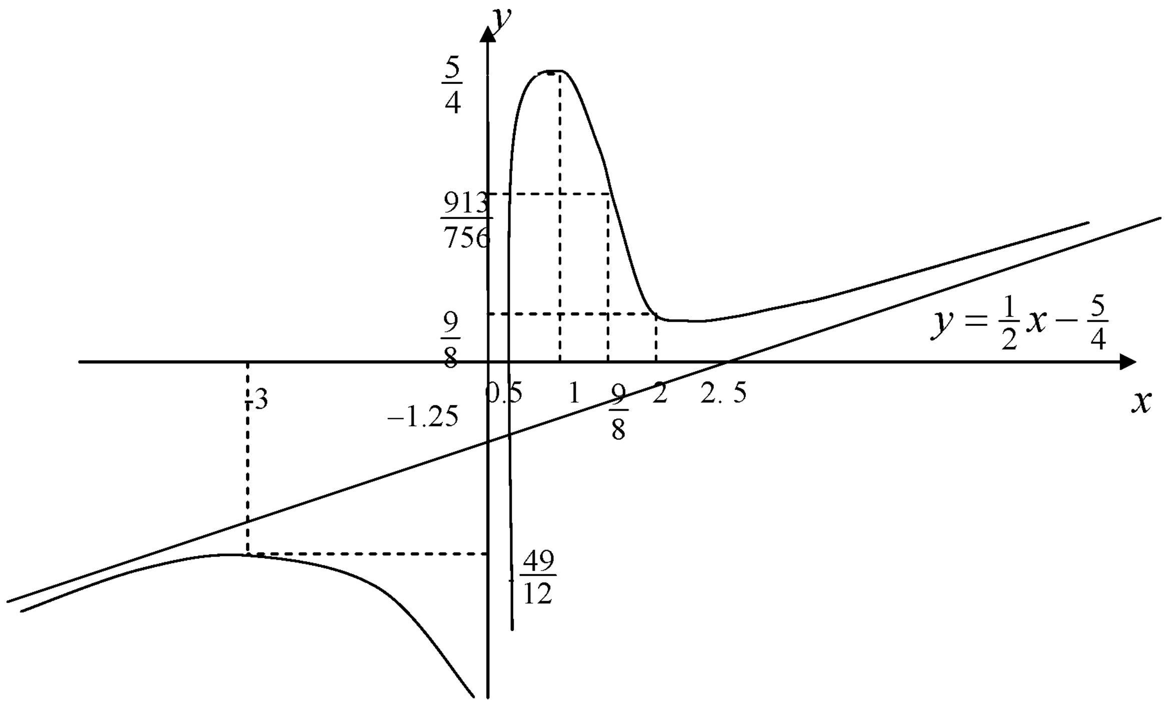
Если при переходе через точку x_0 из $D(f)$, $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.

$f''(x) = 0$ при $x = \frac{9}{7}$, $f''(x)$ не определена при $x = 0$. Составим таблицу, дающую информацию об интервалах выпуклости, вогнутости и точках перегиба графика данной функции:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\frac{9}{7})$	$\frac{9}{7}$	$(\frac{9}{7};+\infty)$
$f''(x)$	$-$	Не опр.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Не опр.	$\cap$	$\frac{913}{756}$	$\cup$

Точка $(\frac{9}{7};\frac{913}{756})$ – точка перегиба графика функции.

8.Построим эскиз графика данной функции:



Пример № 2

Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Решение

1. $D(f)=(0;+\infty)$.

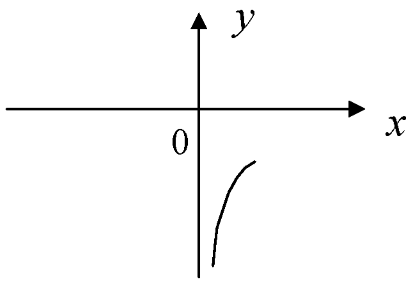
2. Так как данная функция является элементарной, то она непрерывна на всей своей области определения, следовательно, $(0;+\infty)$ – интервал непрерывности функции.

3. Исследуем поведение функции на границе интервала:

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty.$$

Следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота графика функции.

Эскиз графика в окрестности точки x=0:



Выясним, имеет ли график наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=(\textit{используя правило Лопиталя})=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\frac{3}{2}\sqrt{x}}=0.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\textit{используя правило}$$

$$\textit{Лопиталя}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Следовательно, при $x\to+\infty$ график данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

4. Так как область определения функции несимметрична относительно точки $x=0$, то функция не является ни чётной, ни нечётной.

Также функция не является периодической.

5. Так как $x = 0 \notin D(f)$, то точек пересечения с осью Оy нет.

При $y = 0$: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, т.о. $(1;0)$ – точка пересечения графика с осью Оx.

6. Находим с помощью первой производной интервалы монотонности и экстремумы функции.

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}};$$

$y' = 0$ при $\ln x = 2$, т.е $x = e^2$ – критическая точка (см. пример №1.)

Составим таблицу:

x	$(0; e^2)$	e^2	$(e^2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

max

7. Исследуем график на выпуклость (вогнутость) с помощью второй производной.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}2x\sqrt{x} - (2 - \ln x)3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-\sqrt{x}(8 - 3\ln x)}{4x^3}.$$

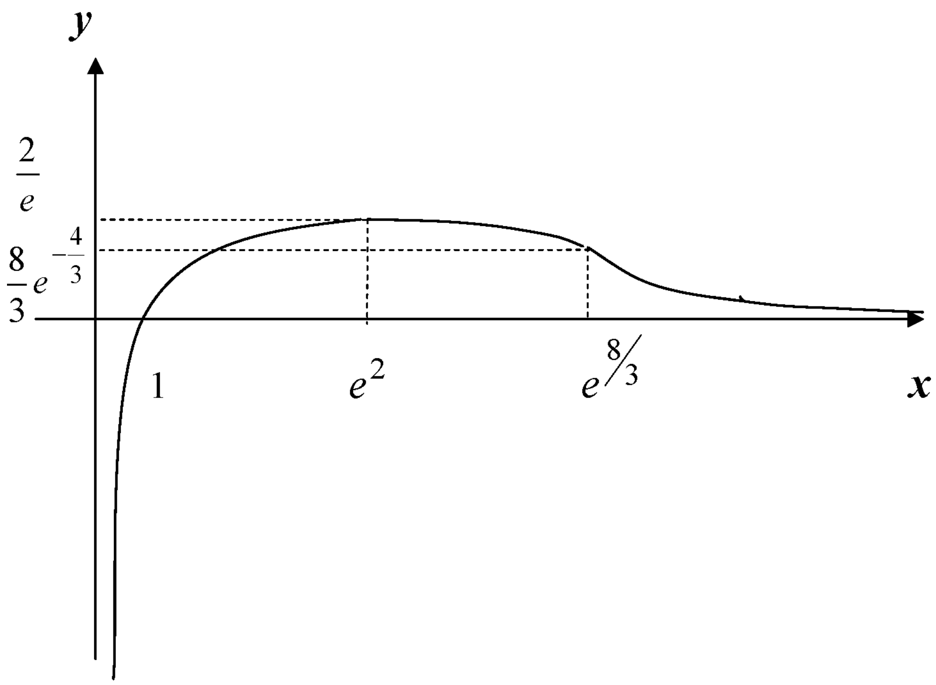
$f''(x) = 0$ при $3\ln x = 8$, т.е. $x = e^{\frac{8}{3}}$.

Составим таблицу (см. пример № 1):

x	$(0;e^{\frac{8}{3}})$	$e^{\frac{8}{3}}$	$(e^{\frac{8}{3}};\pm\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$	$\cup$

$(e^{\frac{8}{3}};\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}})$ – точка перегиба графика функции.

8. Построим эскиз графика данной функции:



Пример № 3

Провести полное исследование и построить график функции

$y = \sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$.

Решение

1. $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

2. Рассматриваемая функция является элементарной, кроме того, она определена на всей числовой оси, следовательно, она непрерывна на всей числовой оси.

3. Так как функция не имеет точек разрыва, то график функции не имеет вертикальных асимптот. Выясним вопрос о наличии у графика наклонных асимптот.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x}} = \infty$, следовательно, наклонных асимптот у графика нет.

4. $f(-x) = \sqrt[3]{x^2}\,(-x-5)$;

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной. Функция также непериодична.

5. При $x = 0$ $y = 0$;

$\sqrt[3]{x^2}\,(x-5) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 5$.

Итак, $(0;0)$ и $(5;0)$ – точки пересечения графика функции с осями координат.

Очевидно, что при $x \in (-\infty;0) \cup (0;5)$ $f(x)<0$, а при $x \in (5;+\infty)$ $f(x) > 0$.

6. Находим с помощью первой производной интервалы монотонности и экстремумы функции.

$$f'(x) = \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f'(x) = 0$ при $x = 2$; $f'(x)$ не определена при $x = 0$.

Составим таблицу (см. пример № 1):

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	Не опр.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$
		max		min	

Заметим, что так как при $x = 0$ сама функция является непрерывной, а её производная $f'(x)$ терпит разрыв, то точка $x = 0$ – точка так называемого "острого" максимума.

7. Исследуем график на выпуклость (вогнутость) с помощью второй производной.

$$f''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - \dfrac{x-2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{x+1}{x\sqrt[3]{x}}$$

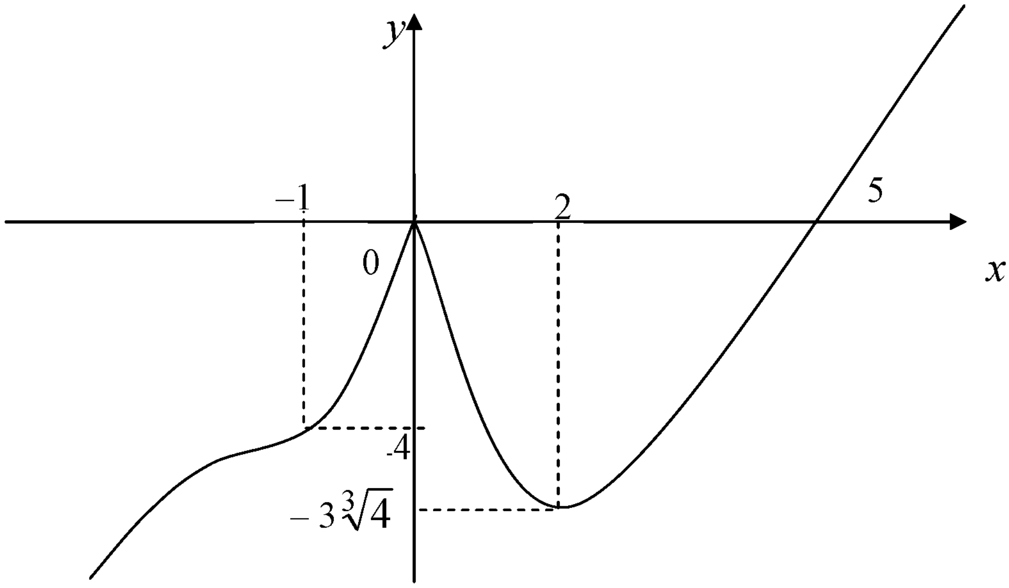
$f''(x) = 0$ при $x = -1$, $f''(x)$ не определена при $x = 0$.

Составим таблицу (см. пример № 1):

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	Не опр.	$+$
$f(x)$	$\cap$	-4	$\cup$	0	$\cup$

Таким образом, $(-1;-4)$ – точка перегиба графика функции. Точка $(0;0)$ не является точкой перегиба.

8. Построим эскиз графика данной функции:



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Провести полное исследование и построить график функции.

1. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}$

2. $y = \dfrac{2x^2}{4x^2 - 1}$

3. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

4. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$

5. $y = \ln(x^2 + 4x)$

6. $y = e^{\frac{1}{3-x}}$

7. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x}$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x^2}$

9. $y = (x - 1)e^{3x+1}$

10. $y = \dfrac{(x - 3)^2}{4(x - 1)}$

16. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

17. $y = \dfrac{4x^2}{x^3 - 1}$

18. $y = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

19. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

20. $y = x^2 \cdot e^{-x}$

21. $y = \sqrt[5]{x^4} \cdot e^{-x}$

22. $y = \dfrac{(x + 2)^2}{x + 1}$

23. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{2x^2}$

24. $y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}$

25. $y = \ln \cos x$

11. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$

12. $y = e^{2x - x^2}$

13. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$

14. $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$

15. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = x + \pi \cdot \mathrm{arctg} x$

28. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 2}}$

29. $y = \sqrt[3]{2 - 3x^3}$

30. $y = \dfrac{x^3 + 1}{2x^2}$

Учебное издание

Емельянова Елена Львовна,
Усольцев Андрей Львович

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ
И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Методические указания

Технический редактор Ф. В. Г р е ч н и к о в
Редакторская обработка М. Г. Б о к а р е в а, А. А. Г н у т о в а
Корректорская обработка С. А. Н е ч и т а й л о
Компьютерная верстка С. А. М и х а л к и н а
Доверстка Н. А. Д о ц е н к о, А. А. Г н у т о в а
Донабор А. А. Г н у т о в а

Подписано в печать 22.11.06 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,16. Усл. кр.-отт. 1,28. Печ. л. 1,25.
Тираж 59 экз. Заказ . ИП-22/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.