

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

# ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2006

УДК 621.452  
ББК 22.213  
Р484



**Инновационная образовательная программа  
"Развитие центра компетенции и подготовка  
специалистов мирового уровня в области аэро-  
космических и геоинформационных технологий"**

Составители: *В.П. Ржевский, Ф.В. Паровой, Д.С. Лежин,  
В.С. Мелентьев, А.С. Гвоздев*

Рецензент канд. техн. наук, доц. Ю. Л. К о в ы л о в

Р484 **Исследование крутильных колебаний роторов:** метод. указания /  
[сост. *В.П. Ржевский и др.*]. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм.  
ун-та, 2006. – 40 с.: ил

Изложены основные сведения о колебаниях, методах расчета и пакетах прикладных программ для оценки динамического состояния роторов двигателей. Приведены методики расчетного и экспериментального определения собственных частот и форм крутильных колебаний для системы эквивалентного ротора (вала).

Методические указания разработаны на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов и предназначены для студентов факультета «Двигатели летательных аппаратов», выполняющих лабораторные работы по курсу «Динамика двигателей».

УДК 621.452  
ББК 22.213

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	4
1. Общие сведения о крутильных колебаниях . . . . .	7
2. Приведение реальной системы коленчатого вала к эквивалентной . . . . .	10
3. Определение собственных частот и форм крутильных колебаний эквивалентной системы . . . . .	16
4. Анализ крутильных колебаний с помощью пакета ADAMS .	26
5. Цель лабораторного занятия . . . . .	33
6. Установка и методика проведения эксперимента . . . . .	34
7. Последовательность выполнения работы . . . . .	35
8. Контрольные вопросы . . . . .	36
Приложение. Справочные материалы . . . . .	38

## ВВЕДЕНИЕ

В работающем двигателе возникают переменные силы и моменты, действующие как на отдельные детали, так и на совокупность деталей, определенным образом связанных между собой и называемых далее системами. Переменные силы и моменты вызывают вынужденные колебания (вибрацию) деталей, узлов (например, роторов) и двигателя в целом. Система может совершать колебания относительно состояния равновесия и при отсутствии внешних сил. Такие колебания называются свободными или собственными.

Колебания в двигателе приводят к дополнительным динамическим нагрузкам и напряжениям, снижению надежности и ресурса, оказывают влияние на работу систем. Двигатель становится интенсивным источником шума.

Статистика показывает, что число отказов, связанных с вибрацией, в машиностроении достигает восьмидесяти процентов. Поэтому борьба с колебаниями является важной и актуальной проблемой современного двигателестроения.

Мероприятиям по устранению или уменьшению колебаний необходимо уделять самое пристальное внимание на этапах проектирования (начиная с выбора конструктивной и силовой схем), изготовления, доводки и эксплуатации двигателей. Виброактивность современных двигателей всех назначений должна удовлетворять жестким требованиям норм R51 ЕЭК ООН.

К настоящему времени разработана теория механических колебаний, позволяющая не только вскрыть довольно сложную природу соответствующих физических явлений, но и обеспечить целенаправленную борьбу с вибрацией.

Если параметры колебательной системы (масса, жесткость или упругость, коэффициенты трения) постоянны либо меняются со временем, но не зависят от координат и скоростей, то поведение таких систем может быть описано с помощью линейных дифференциальных уравнений. Такие системы называются линейными.

Однако имеется большое количество систем, где параметры сложным образом зависят от смещения или скорости (параметрические колебания). Дифференциальные уравнения, описывающие поведение таких систем, становятся нелинейными, а сами системы также называются нелинейными. Нелинейные уравнения дают более полное и правильное представление о колебаниях систем. С их помощью можно исследовать такие вопросы, как устойчивость, автоколебания, параметрические резонансы систем и т.д.

С энергетической точки среди колебательных систем можно выделить:

- консервативные, в которых нет (условно) потерь энергии;
- диссипативные, в которых первоначально сообщенная энергия расходуется, в результате чего колебания затухают;
- автоколебательные, в которых происходит не только потеря энергии, но и пополнение ее за счет имеющихся в системе постоянных источников энергии (этим автоколебания отличаются от вынужденных колебаний, амплитуда и период которых определяется характером внешнего воздействия).

Любая механическая система в действительности имеет бесчисленное число степеней свободы (системы с распределенными параметрами). Точное решение задачи о колебаниях таких систем можно получить лишь для простых случаев, например, для прямых валопроводов с большой протяженностью. Поэтому число степеней свободы системы ограничивают.

При расчете на крутильные колебания валопроводов они представляются как дискретные упругомассовые системы, то есть как системы с сосредоточенными параметрами. Это дает возможность ограничить число степеней свободы системы и с приемлемой степенью точности решать практические задачи.

Для исследования крутильных колебаний применяются различные методы составления дифференциальных уравнений. Для некоторых случаев уравнения крутильных колебаний составляются на основе принципа Даламбера, как уравнения равновесия всех моментов сил, действующих на отдельные элементы валопровода (ротора). Более общим методом исследования колебаний является метод, основанный на применении уравнения Лагранжа.

По виду деформаций при колебаниях различают продольные, изгибные, крутильные и сложные (связанные) колебания. При связан-

ных колебаниях в зависимости от величины жесткостей системы в различных направлениях могут возникать одновременно несколько видов колебаний (например, продольно - крутильные колебания роторов двигателей внутреннего сгорания).

Отдельные детали или сборочные единицы (например, ротора) обычно рассчитываются на колебания как изолированные элементы при возникновении в них только одного вида колебаний, например, изгибных или крутильных. Такой метод расчета для многих задач является оправданным. Однако в этом случае исключается возможность оценки динамического состояния детали или сборочной единицы в системе, т.е. во взаимосвязи с другими деталями и узлами, что существенно сказывается на особенностях колебаний.

Полный спектр частот и соответствующих им форм колебаний, а также распределение напряжений в отдельных элементах можно получить, рассматривая систему как единое целое.

Для расчета сложных систем на колебания применяются различные методы, например, метод динамических жесткостей или динамических податливостей.

Наиболее перспективным методом расчета валопроводов на колебания является матричный метод. Этот метод универсален, компактен, легко реализуется с использованием компьютерных технологий. Особенно удобно использовать его при расчете крутильных колебаний сложных систем.

К настоящему времени создано большое количество пакетов прикладных программ для исследования кинематики и динамики сложных механических систем. Наибольшее распространение получило семейство программ ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems) фирмы Mechanical Dynamics ([www. Adams.com](http://www.Adams.com)).

Упрощенный и быстрый анализ кинематического и динамического состояний механизмов может быть выполнен в КОМПАС-3DV8 Plus (разработан компанией АСКОН) при использовании библиотеки «Универсальный механизм Express».

Крутильные колебания представляют проблему в турбовинтовых (турбовальных) и, особенно, в поршневых двигателях. Поэтому в первой части методических указаний приведена методика теоретического и экспериментального определения собственных частот и форм колебаний коленчатых валов ДВС.

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Коленчатый вал, как всякая упругая система, под действием внешней переменной нагрузки приходит в колебательное движение. Колебания упругой системы, продолжающиеся и после того, как вызвавшая их нагрузка перестала действовать, называются *свободными*. Колебания, вызываемые и поддерживаемые периодически изменяющейся нагрузкой, называются *вынужденными*.

Частота  $p$  свободных колебаний системы зависит от геометрической формы, размеров и упругости отдельных ее элементов.

Под влиянием сопротивлений внутренних (изменения структуры материала, гистерезиса) и внешних (трения относительно наружной среды) свободные колебания постепенно затухают, т.е. уменьшаются отклонения отдельных точек системы (углы  $\varphi$ ) относительно положения равновесия. Чем эти сопротивления больше, тем быстрее происходит полное затухание колебаний системы.

Частота вынужденных колебаний  $\omega_e$  зависит от характера изменения действующей нагрузки.

В некоторых случаях, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний и вызываемые ею напряжения в элементах системы резко возрастают. Подобное состояние системы называется *резонансом*.

При колебаниях упругой системы ее потенциальная энергия в крайнем положении, наиболее удаленном от положения равновесия, достигает максимума. При приближении к положению равновесия потенциальная энергия превращается в кинетическую, и в положении равновесия наибольшее значение имеет уже кинетическая энергия, т.к. скорость колебаний ( $d\varphi/dt$ ) становится максимальной. При дальнейшем переходе системы из положения равновесия в другое крайнее положение кинетическая энергия колебания снова превращается в потенциальную.

При отсутствии внешних нагрузок, а также внутренних и внешних сопротивлений, т.е. при незатухающих свободных колебаниях, сумма обеих энергий не изменяется. При наличии этих сопротивлений на преодолении их затрачивается часть энергии колебаний системы, и колебания постепенно затухают. При исследовании упругих

крутильных колебаний системы учитывают следующие действующие на нее нагрузки (рис. 1):

а) Моменты сил инерции отдельных масс

$$M_u = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

где  $J$  - массовый момент инерции.

При большой частоте колебаний мгновенные ускорения  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  достигают очень больших значений, что и обуславливает весьма значительные величины моментов сил инерции колеблющихся масс.

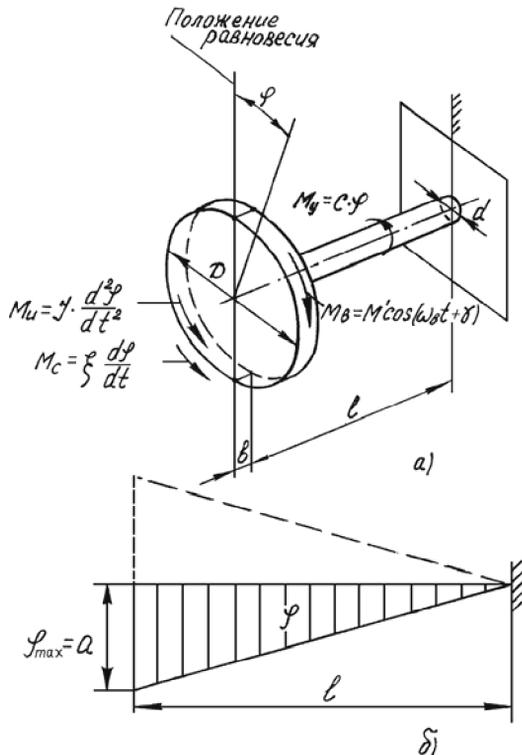


Рис. 1. Крутильные колебания одномассовой системы:  
 а) моменты, действующие на систему;  
 б) эпюра углов поворота системы

б) Моменты сил упругости ( $M_y = C\varphi$ , где  $C$  - крутильная жесткость вала), стремящиеся вернуть систему в положение равновесия и препятствующие ее удалению из этого положения. Эти силы для наиболее часто встречающихся в инженерной практике случаев колебаний, в частности, при расчете коленчатых валов принимаются пропорциональными отклонениям системы из положения равновесия.

в) Внешние переменные моменты сил  $M_e = M' \cos(\omega t + \gamma)$ , вызывающие вынужденные колебания системы. При этом вынужденные колебания обуславливаются не абсолютными значениями моментов, а их изменениями относительно среднего значения  $M'$ .

г) Моменты сил сопротивления колебаниям системы

$$M_c = \xi d\varphi/dt,$$

где  $\xi$  - коэффициент пропорциональности или так называемый коэффициент заглушения. В условиях работы коленчатых валов, близких к резонансным, эти силы значительно уменьшают амплитуду колебаний, а следовательно, и напряжения в элементах КВ. Однако явление резонанса остается, хотя и в смягченной форме.

Для более эффективного снижения амплитуды колебаний при резонансе необходимы специальные устройства, повышающие сопротивление среды колебаниям системы.

Колебания упругих систем, в частности крутильные колебания коленчатых валов, удобно вначале рассматривать как незатухающие и лишь в дальнейшем учитывать влияние затухания на характер и интенсивность колебаний.

Исследование крутильных колебаний КВ, как правило, производится для упрощенной, так называемой *эквивалентной* системы, состоящей из длинного прямого вала постоянного сечения с жестко закрепленными на нем массами (грузами), число которых равно числу масс исследуемой системы, включая сюда массы, связанные с отдельными коленами кривошипного механизма.

Расчет коленчатых валов на крутильные колебания может быть разбит на следующие этапы:

- 1) приведение действительной (реальной) системы коленчатого вала и связанных с ним масс к эквивалентной (теоретической) системе;
- 2) определение частот собственных колебаний для эквивалентной системы;

- 3) определение действующих на систему внешних нагрузок (моментов) и представление их в виде суммы отдельных тригонометрических функций (гармоник);
- 4) расчет вынужденных колебаний вала (без затухания и с затуханием);
- 5) определение резонансных условий работы вала;
- 6) создание безрезонансных условий работы вала или подбор специальных устройств (демпферов) для гашения крутильных колебаний.

## **2. ПРИВЕДЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ**

В систему коленчатого вала ДВС входят не только собственно узел коленчатого вала с присоединенными к нему движущимися массами кривошипных механизмов, но и кинематически с ним связанные редукторы, мультипликаторы, винты, крыльчатки и т. д., существенно влияющие на колебания всей системы.

Действительная колебательная система вала, как было сказано выше, заменяется теоретической системой, состоящей из прямолинейного “не имеющего массы” приведенного вала с размещенными на нем отдельными грузами (массами), и эквивалентной действительной системе в смысле равенства кинетической и потенциальной энергии при колебаниях.

Задача приведения действительной системы к теоретической сводится к определению приведенной длины отдельных участков вала (между каждыми двумя соседними массами) и моментов инерции отдельных приведенных масс.

Длины отдельных участков приведенного вала определяются из условия равенства их жесткостей жесткостям заменяемых участков действительного вала. В этом случае и углы закрутки приведенного и действительного участков вала при одинаковых приложенных нагрузках будут равными. При этом размеры сечения приведенного вала обычно берут равными размерам коренных шеек коленчатого вала.

### *Определение приведенных длин участков коленчатого вала*

1. Приведенная длина носка или задней части вала (участки 2 и 4 на рис. 2,а) с размерами кольцевого сечения  $D_1$  и  $d_1$  длиной  $l_1$  определяется из условия

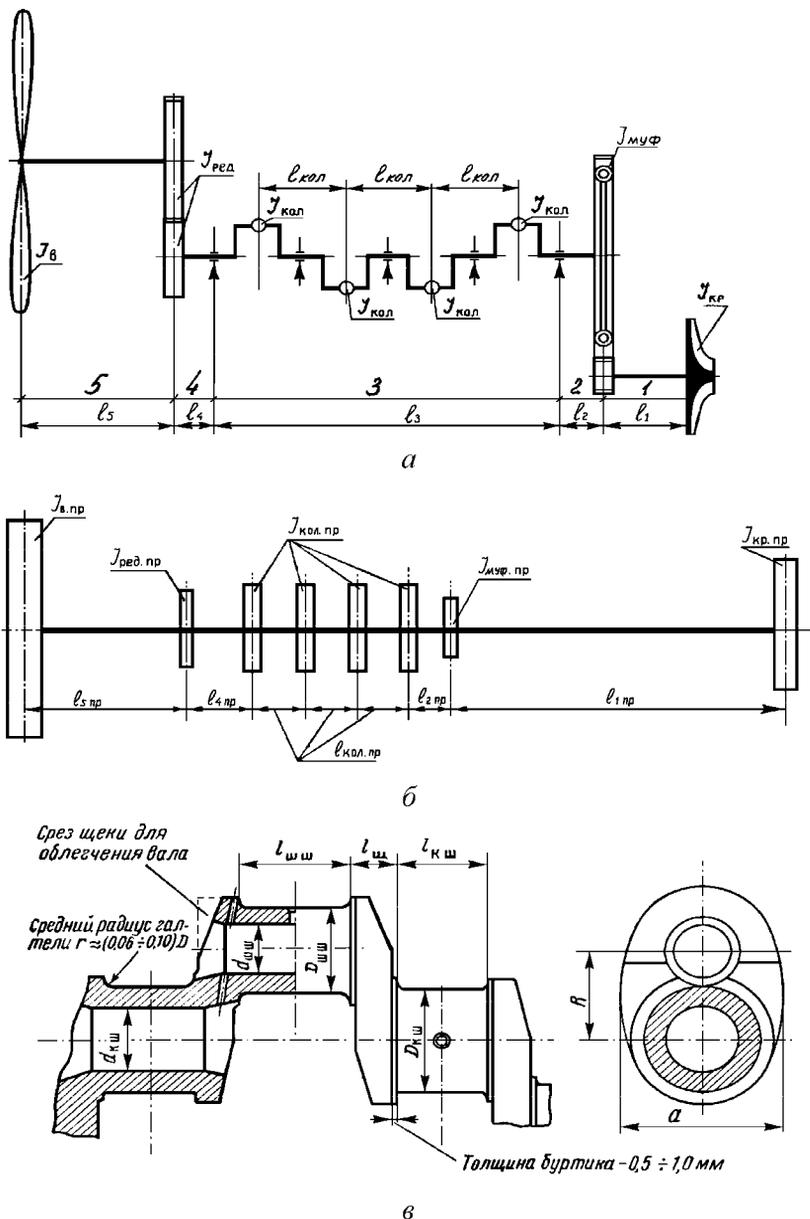


Рис.2. Приведение реальной системы коленчатого вала к эквивалентной: реальная система (а), эквивалентная система (б) и конструктивная схема колена вала (в)

$$C_1 = C_{np},$$

где  $C_1$  - жесткость рассматриваемого участка действительного вала,  
 $C_{np}$  - жесткость соответствующего участка приведенного вала,  
 размеры сечения которого равны размерам сечения коренной шейки (см. рис. 2, в).

Поскольку при кручении вала

$$C = \frac{J_{пол} G}{l},$$

где  $J_{пол}$  - полярный момент инерции сечения вала, а  $G$  - модуль упругости второго рода (принимается одинаковым для реального и приведенного участков вала), то

$$\frac{J_{пол1} G}{l_1} = \frac{J_{пол np} G}{l_{np}},$$

где индекс «*np*» относится к длине участка и моменту инерции приведенного вала, а индекс 1 - к заменяемому участку действительного вала.

Так как для кольцевого сечения полярный момент инерции

$$J_{пол} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

то окончательно получим

$$l_{np} = l_1 \frac{D_{кш}^4 - d_{кш}^4}{D_1^4 - d_1^4},$$

где  $D_{кш}$  и  $d_{кш}$  - наружный и внутренний диаметры коренной шейки.

2. Приведенная длина участка с коленами (участка 3 на рис. 2, а) аналитически не может быть определена с достаточной точностью вследствие сложной геометрической формы этого участка. Поэтому она подсчитывается по эмпирическим формулам, полученным в результате обработки статистических данных по закрутке колен некоторых конструкций валов.

Хорошие результаты дает эмпирическая формула, предложенная С.С. Зиманенко

$$I_{\text{кол. пр}} = \left( I_{\text{кш}} + 0,6l_{\text{ш}} \frac{D_{\text{кш}}}{l_{\text{кш}}} \right) + \left( 0,8l_{\text{шш}} + 0,2 \frac{a}{R} D_{\text{кш}} \right) \frac{D_{\text{кш}}^4 - d_{\text{кш}}^4}{D_{\text{шш}}^4 - d_{\text{шш}}^4} + R \sqrt{\frac{R}{D_{\text{шш}}}} \frac{D_{\text{кш}}^4 - d_{\text{кш}}^4}{l_{\text{ш}} a^3},$$

где обозначения показаны на рис. 2, в.

В последней формуле первый член правой части представляет собой длину коренной шейки с учетом влияния на жесткость колена ее сопряжения со щекой. Второй член – приведенную длину шатунной шейки с тем же условием. Третий член – приведенную длину двух щек, учитывающую изгибную деформацию щеки в плоскости, перпендикулярной колену при приложении к концам колена одинаковых крутящих моментов разного направления.

3. Приведенную длину участков валов, вращающихся с отличными от коленчатого вала частотами (участки 1 и 5 на рис. 2, а), определяют, исходя из следующих соображений.

Крутящие моменты на участках действительного и приведенного валов связаны с угловыми деформациями и жесткостями этих участков следующими простыми соотношениями:

$$M_{\text{кр}\delta} = C_{i\delta} \varphi_{\delta},$$

$$M_{\text{кр}np} = C_{i np} \varphi_{np},$$

откуда

$$\frac{C_{i np}}{C_{i\delta}} = \frac{M_{\text{кр}np}}{M_{\text{кр}\delta}} \frac{\varphi_{\delta}}{\varphi_{np}}.$$

В кинематически связанных валах крутящие моменты обратно пропорциональны, а угловые деформации прямо пропорциональны их частотам вращения. Обозначив  $n_{\delta}/n_{np} = i$ , получим

$$C_{i np} / C_{i\delta} = i^2,$$

или  $C_{i np} = C_{i\delta} i^2.$

Подставляя значения жесткостей, получим

$$\left( \frac{J_{пол} G}{l_i} \right)_{np} = \left( \frac{J_{пол} G}{l_i} \right)_{\delta} i^2,$$

откуда приведенная длина соответствующих участков вала (при  $G_{np}=G_{\delta}$ ) равна

$$l_{i np} = l_{i \delta} \frac{J_{пол. np}}{J_{пол. \delta}} \frac{1}{i^2}.$$

### **Определение моментов инерции приведенных масс**

Основными массами, образующими колебательную систему, являются:

- 1) массы отдельных колен вала и связанных с ними поступательно и вращательно движущихся частей кривошипно-шатунного механизма;
- 2) массы крыльчатки нагнетателя и винта (если они есть);
- 3) массы шестерен и деталей редуктора и мультипликатора.

Остальные связанные с валом массы (шестерни приводов агрегатов, кулачковые шайбы и т.д.) обладают относительно небольшими моментами инерции и при расчете крутильных колебаний вала могут не учитываться.

При составлении эквивалентной системы моменты инерции отдельных масс должны подбираться, как сказано выше, таким образом, чтобы их кинетическая энергия при колебаниях соответствовала кинетической энергии колеблющихся масс действительной системы.

1. Момент инерции приведенной массы колена

$$J_{к np} = J_{кол} + M_{ш вр} R^2 + M_{п np} R^2,$$

где  $J_{кол}$  - момент инерции собственно колена (включая противовесы);

$M_{ш вр}$  - масса части шатунного механизма, отнесенной к вращающимся массам;

$M_{п np}$  - условная масса связанных с одним коленом поступательно движущихся частей, отнесенная к оси шатунной шейки;

$R$  - радиус колена.

Момент инерции собственно колена обычно подсчитывается по чертежу путем деления колена на отдельные элементы приблизи-

тельно геометрически правильной формы и суммирования их моментов инерции:

$$J_{кол} = \sum m_x r_x^2,$$

где  $m_x$  - масса  $x$  - го элемента;

$r_x$  - расстояние от центра тяжести этого элемента до оси коренной шейки.

Условная масса связанных с одним коленом поступательно движущихся частей может быть определена из равенства кинетической энергии этих масс в теоретической схеме среднему значению кинетической энергии действительных поступательно движущихся масс за один оборот вала:

$$\frac{1}{2} M_{n np} R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^2 d\alpha,$$

где  $M_n$  - масса поступательно движущихся частей кривошипно - шатунного механизма одного колена;  $W$  - скорость поршня;  $\alpha$  - угол поворота вала относительно оси цилиндра.

Это равенство после подстановки в него выражения для скорости поршня и ряда преобразований дает следующее соотношение:

$$M_{n np} = \frac{M_n}{2} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} \right).$$

2) Момент инерции приведенных масс винта и крыльчатки также определяется из условия равенства кинетических энергий:

$$\frac{J_i \dot{\phi}_i^2}{2} = \frac{J_{i np} \dot{\phi}_i^2}{2} \frac{1}{i^2},$$

где  $J_i$  - действительный момент инерции соответственно винта или крыльчатки;

$\dot{\phi}_i = \frac{d\phi_i}{dt}$  - угловая скорость деформации вала винта или крыльчатки;

$i$  - передаточное число от коленчатого вала к рассматриваемому валу.

Таким образом,  $J_{i np} = J_i i^2$ .

3) Моменты инерции таких деталей, как шестерни и валики привода винта и крыльчатки нагнетателя, определяются тем же методом, что и момент инерции собственно колена, т. е. путем разбивки их на отдельные элементы:

$$J_{дет} = \sum m_x r_x^2 .$$

Вид эквивалентной (расчетной) системы коленчатого вала показан на рис. 2, б.

### **3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ**

Определение собственных частот и форм колебаний упругой системы является классической задачей в теории линейных колебаний. К ней сводятся значительное число инженерных задач – изгибные, продольные, крутильные колебания валопроводов, общие колебания двигателя на узлах подвески и т.д.

Как правило, точное решение подобных задач получить невозможно, поэтому расчетная модель упрощается.

Один из способов упрощения сводится к следующему:

- в системе выделяют абсолютно твердые тела, обладающие массой  $m_i$  или массовым моментом инерции  $J_i$ ;
- связи между телами заменяются невесомыми упругими участками, характеризующимися жесткостями  $c_i$  или податливостями  $1/c_i$ ;
- положение твердых тел определяется обобщенными координатами  $q_i$ .

Задача определения собственных частот и форм колебаний распадается на следующие этапы:

1. Составление дифференциальных уравнений свободных колебаний;
2. Решение дифференциальных уравнений и определение собственных частот колебаний;
3. Определение форм колебаний для каждой из собственных частот.

#### *Способы составления дифференциальных уравнений*

Имеется три способа составления дифференциальных уравнений для системы с конечным числом степеней свободы  $s$ .

Первый, наиболее общий способ, основан на применении уравнения Лагранжа, которое для консервативной системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0,$$

где для  $n$ -массовой крутильной системы кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\varphi}_i^2$ , а потенциальная энергия  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \Delta \varphi_i^2$ . Подставив значения кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ \dots, \\ J_i \ddot{\varphi}_i - C_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \\ \dots, \\ J_n \ddot{\varphi}_n - C_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0. \end{cases}$$

Вторым способом является составление так называемой прямой формы уравнений колебаний. В этом случае из системы выделяются сосредоточенные массы  $m_i$  (или массовые моменты инерции  $J_i$ ), на которые действуют восстанавливающие силы упругости (или моменты сил упругости). Затем, применяя принцип Даламбера, записываются дифференциальные уравнения движения в форме равенства сил инерции (моментов сил инерции) и восстанавливающих сил упругости (моментов сил упругости). Применение второго способа для решения задач о крутильных колебаниях будет показано ниже.

Третий способ составления дифференциальных уравнений свободных колебаний связан с использованием обобщенного уравнения метода сил.

$$q_i = \frac{1}{c_{i1}} p_1 + \frac{1}{c_{i2}} p_2 + \dots + \frac{1}{c_{ik}} p_k + \dots + \frac{1}{c_{in}} p_n,$$

где для крутильных колебаний  $q_i = \varphi_i$ ,  $p_i = -J_i \ddot{\varphi}_i$ , а  $\frac{1}{c_{ik}}$  – угол закрутки  $i$ -й массы от единичного момента, приложенного к точке  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Выбор способа составления дифференциальных уравнений свободных колебаний зависит от типа упругой системы. Для решения задачи свободных крутильных колебаний системы эквивалентного вала наиболее удобным является второй способ.

Составим систему дифференциальных уравнений свободных крутильных колебаний для одно-, двух-, трех- и  $n$ -массовых систем эквивалентного вала, пользуясь вторым способом.

Из рис. 1 видно, что общее уравнение движения для одномассовой системы будет иметь вид

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \varphi + \xi \frac{d\varphi}{dt} = M' \cos(\omega_0 t + \gamma).$$

Пренебрегая моментами сил сопротивления ( $\xi \frac{d\varphi}{dt} = 0$ ) и считая, что внешний (возмущающий) момент прекратил свое действие, а на диск действует только момент сил упругости, получим уравнение свободных колебаний одномассовой системы

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \varphi = 0,$$

или  $J\ddot{\varphi} + C\varphi = 0$ .

Для двухмассовой системы эквивалентного вала (к такой системе приводится, например, однорядный звездообразный двигатель с винтом без редуктора и нагнетателя) свободные колебания будут происходить следующим образом (см. рис. 3, а). При прекращении действия равных и противоположно направленных внешних моментов обе массы начнут совершать свободные колебания с одинаковой частотой и противоположными направлениями так, что некоторое промежуточное сечение  $O-O$  будет оставаться неподвижным, образуя так называемый узел колебаний (см. рис. 3).

Записав уравнение движения для каждой из масс (для каждого диска), получим систему двух дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания двухмассовой системы

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{cases}$$

(углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отсчитываются от нейтрального положения).

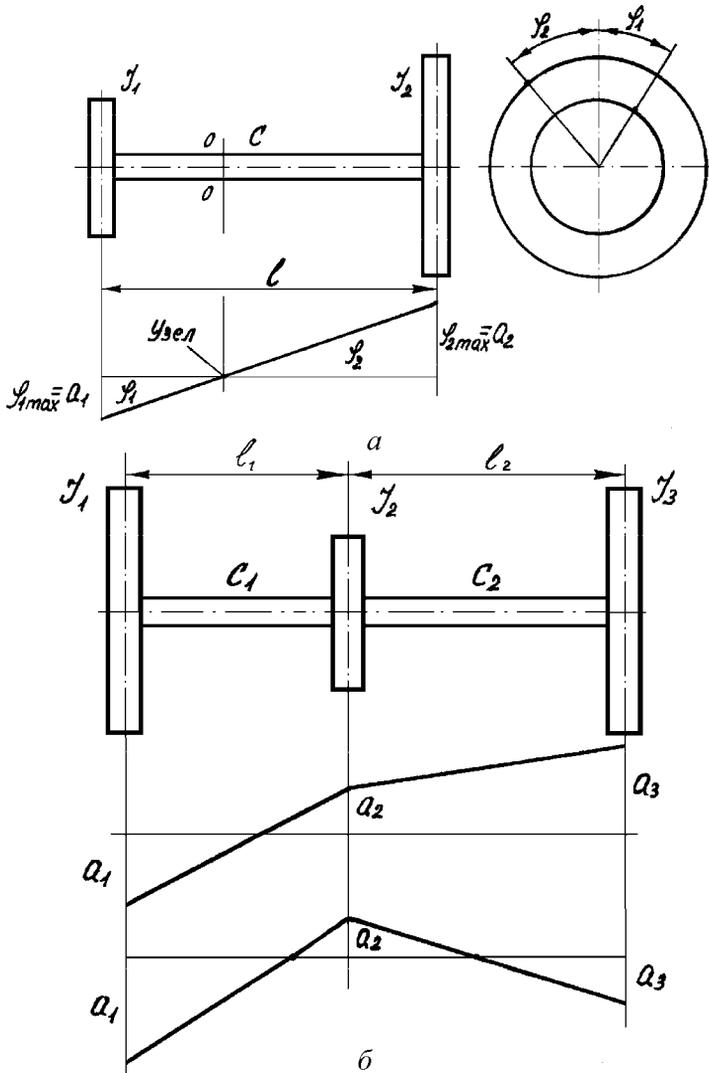


Рис.3. Двухмассовая (а) и трехмассовая (б) системы эквивалентного вала и формы их крутильных колебаний

Разные знаки в моментах сил упругости объясняются тем, что эти моменты действуют в противоположные стороны. На рис. 4 изображена схема экспериментальной установки и ее двухмассовая эквивалентная система с заделкой вала с одной стороны. Система

дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания такой системы, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 \varphi_1 - C_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{cases}$$

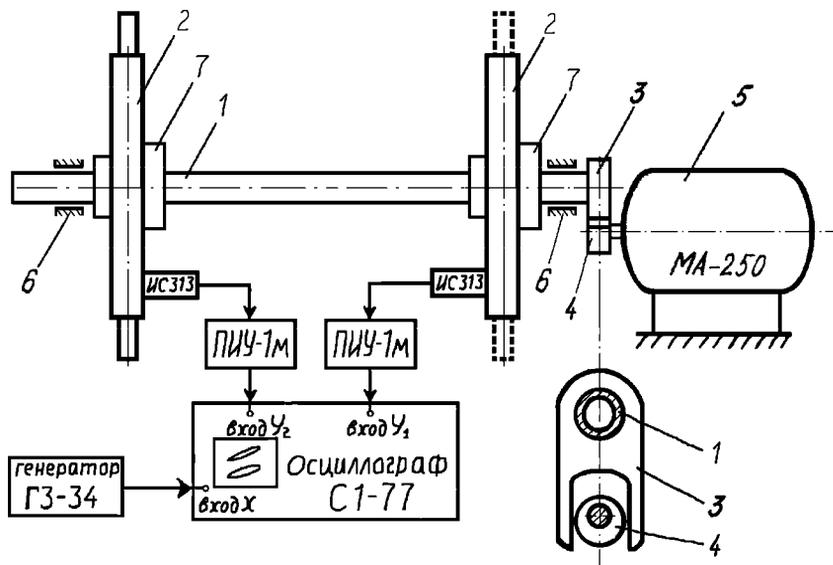
Для трехмассовой системы (см. рис. 3, б) эквивалентного вала (к такой системе можно привести однорядный звездообразный двигатель с винтом и редуктором или нагнетателем) система уравнений, описывающих свободные колебания, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{cases}$$

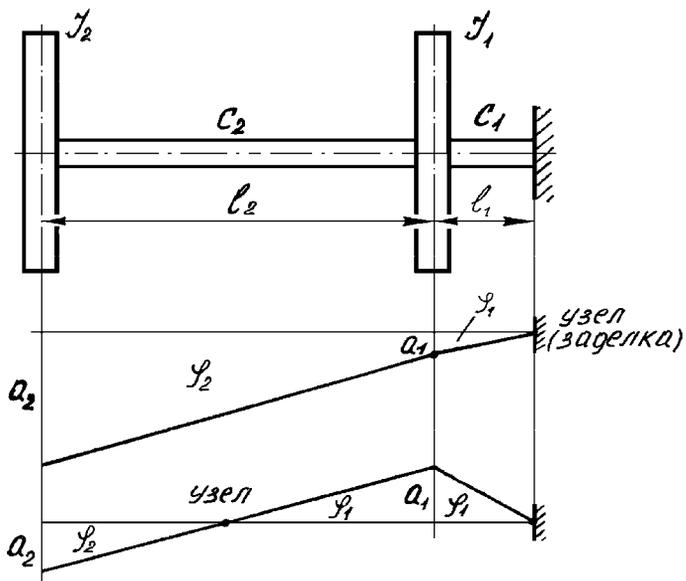
Различный вид уравнений для крайних и средней масс (дисков) объясняется тем, что восстанавливающий момент сил упругости для крайних масс действует с одной стороны, а для средней массы с обеих сторон от нее: слева – отрицательный, справа – положительный.

Используя это правило, можно записать систему дифференциальных уравнений для определения собственных частот крутильных колебаний  $n$ -массовой эквивалентной системы

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ \dots, \\ J_i \ddot{\varphi}_i - C_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \\ \dots, \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - C_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + C_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0, \\ J_n \ddot{\varphi}_n - C_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0. \end{cases}$$



а



б

Рис.4. Схема экспериментальной установки (а) и ее эквивалентная система (б)

### Решение дифференциальных уравнений

Решением дифференциальных уравнений свободных колебаний являются гармонические функции  $\varphi_i = a_i \cos(pt + \gamma)$ , что обусловлено повторяемостью процессов, описываемых решаемыми уравнениями.

Для определения собственных частот колебаний  $p$  подставим значения углов и их вторых производных  $\ddot{\varphi}_i = -a_i p^2 \cos(pt + \gamma)$  в любую из систем дифференциальных уравнений. В результате подстановки получим: для одномассовой системы  $Jp^2 - C = 0$ , откуда

$$p = \sqrt{\frac{C}{J}};$$

для двухмассовой системы (см. рис. 3, а)

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 + C(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C(a_1 - a_2) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$p = \sqrt{C \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}.$$

Для двухмассовой системы эквивалентного вала экспериментальной установки, изображенной на рис. 4,

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 - C_1 a_1 + C_2(a_2 - a_1) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C_2(a_2 - a_1) = 0. \end{cases}$$

Найдя отношение амплитуд  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  из второго

уравнения системы и подставив это значение в первое уравнение, получим уравнение для определения собственных частот крутильных колебаний эквивалентного вала экспериментальной установки

$$p^4 - \left( \frac{C_1}{J_1} + \frac{C_2}{J_2} + \frac{C_2}{J_1} \right) p^2 + \frac{C_1 C_2}{J_1 J_2} = 0.$$

Решение этого уравнения дает два действительных значения  $p_1$  и  $p_2$  собственных частот.

Для трехмассовой системы, изображенной на рис. 3, б,

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 - C_1(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 + C_1(a_1 - a_2) - C_2(a_2 - a_3) = 0, \\ J_3 p^2 a_3 + C_2(a_2 - a_3) = 0. \end{cases}$$

Найдя отношение амплитуд  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_1}{C_1 - J_1 p^2}$  и  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{C_2}{C_2 - J_3 p^2}$

из первого и третьего уравнений системы и подставив их значения во второе уравнение, получим уравнение четвертой степени для определения собственных частот

$$p^4 - \left( \frac{C_1}{J_1} + \frac{C_2}{J_2} + \frac{C_1}{J_2} + \frac{C_2}{J_3} \right) p^2 + C_1 C_2 \left( \frac{1}{J_2 J_3} + \frac{1}{J_1 J_2} \right) = 0.$$

Это уравнение переходит в уравнение для определения собственной частоты крутильных колебаний для эквивалентного вала экспериментальной установки, если принять, например, что  $J_3$  (в заделке) бесконечно велик.

Для  $n$ -массовой системы получим

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 + C_1(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C_1(a_1 - a_2) + C_2(a_2 - a_3) = 0, \\ \dots, \\ J_i p^2 a_i - C_{i-1}(a_{i-1} - a_i) + C_i(a_i - a_{i+1}) = 0, \\ \dots, \\ J_{n-1} p^2 a_{n-1} - C_{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) + C_{n-1}(a_{n-1} - a_n) = 0, \\ J_n p^2 a_n + C_{n-1}(a_{n-1} - a_n) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы проводится аналогично решению для трехмассовой системы. Выражая отношения амплитуд  $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_2}$  и т. д.

из первого, второго и т. д. уравнений, получим уравнение степени  $2(n - 1)$  для определения собственных частот, где  $n$  - число масс системы.

Таким образом, для системы из четырех масс значение частоты необходимо определять из уравнения шестой степени, для пяти масс из уравнения восьмой степени и т. д. Решение этих уравнений даст  $n - 1$  действительных значений собственных частот.

Обычно для практических целей достаточно ограничиться определением только двух-трех наиболее низких частот (соответствующих одноузловой, двухузловой и трехузловой формам колебаний), так как более высокие частоты не вызывают опасных напряжений в коленчатых валах.

Для многомассовых эквивалентных систем часто прибегают к приближенному решению задачи, заменяя несколько рядом расположенных масс одной (момент инерции которой равен сумме моментов инерции заменяемых масс), расположенной в центре тяжести заменяемых масс. Правильность полученных значений частот по упрощенной схеме подтверждается подстановкой их в исходное уравнение.

### *Определение форм колебаний для каждой из собственных частот*

Форма крутильных колебаний эквивалентной системы определяется по знакам в отношении амплитуд между соседними массами (дисками).

Из рис. 1 видно, что для одномассовой системы возможна единственная форма колебаний с узлом в заделке.

Для двухмассовой системы, изображенной на рис. 3, *а*, возможна также единственная форма колебаний с узлом между массами, при

этом отношении амплитуд колебаний 
$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{J_2}{J_1}.$$

Для двухмассовой системы эквивалентного вала, к которой приводится экспериментальная установка (см. рис. 4, *б*), возможны две

формы крутильных колебаний, которые соответствуют собственным частотам  $p_1$  и  $p_2$ .

Если при подстановке в формулу  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  какой - то

из частот получим положительное отношение амплитуд  $\left( \frac{a_2}{a_1} > 0 \right)$ ,

то это означает, что при этой частоте диски колеблются в фазе, т.е. реализуется одноузловая (узел в заделке) форма колебаний.

Если же окажется, что  $\frac{a_2}{a_1} < 0$ , то колебания дисков происходят

в противофазе, т.е. реализуется двухузловая форма колебаний (узлы в заделке и между дисками).

Выражение  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  можно записать следующим об-

разом:  $a_2(C_2 - J_2 p^2) = a_1 C_2$ . Отсюда видно, что при  $(C_2 - J_2 p^2) = 0$  амплитуда  $a_1$  также должна быть равна нулю.

Физически это означает, что при частоте  $p_{\delta, \epsilon} = \sqrt{\frac{C_2}{J_2}}$  второй диск

полностью гасит колебания первого. Такая частота называется *частотой динамического гашения*. Это явление используется при создании гасителей крутильных колебаний.

Для трехмассовой системы эквивалентного вала из уравнений движения получим  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_1}{C_1 - J_1 p^2}$ , а  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{C_2}{C_2 - J_3 p^2}$ .

Из рис. 3, б видно, что если при подстановке одной из собственных частот окажется, что  $a_1/a_2 < 0$ , а  $a_3/a_2 > 0$ , то эта частота соответствует одноузловой форме колебаний. Если же окажется, что  $a_1/a_2 < 0$  и  $a_3/a_2 < 0$ , то эта частота соответствует двухузловой форме колебаний.

Аналогично проводится анализ форм крутильных колебаний для  $n$  - массовых систем эквивалентного вала.

#### 4. АНАЛИЗ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА ADAMS

В современных программных пакетах для инженерных расчетов предусмотрены способы определения собственных частот и форм колебаний валов ДВС. Основной этап этого расчета носит название «модальный анализ». Название это происходит от английского слова «mod», что обычно переводится на русский как «форма колебаний». На сегодняшний день на кафедре применяются две программы для расчета крутильных колебаний: ANSYS и ADAMS. В принципе, методы их расчета весьма похожи, однако ADAMS специально адаптирован для анализа динамического состояния механизмов. Далее рассмотрим метод расчета частот и форм крутильных колебаний систем коленчатых валов ДВС (рис.5) в среде ADAMS.

При этом вы можете избрать два пути:

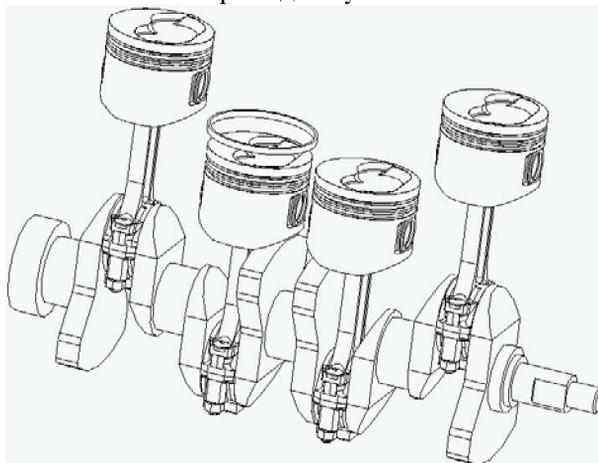


Рис. 5. Объемная модель системы коленчатого вала

##### 1. Использование эквивалентных схем

Поскольку для многих конструкций известны методы построения эквивалентных схем, можно заранее создать такую схему, определившись с массами и моментами инерции абсолютно жестких частей, а также длиной, жесткостью и демпфированием деформируемых участков. Затем подобную схему можно ввести в ADAMS, как показано на рис. 6. Преимущество метода в скорости ввода модели в

программу и простоте модели. Основной недостаток – необходимость больших предварительных расчетов и невозможность определения напряжения в деталях при вибрационном расчете. В этом случае трехмерная модель может помочь вам лишь в определении масс и моментов инерции всех деталей. Моделирование деформируемых участков может производиться двояко:

- а) использование деформируемых стержней;
- б) использование «псевдогибких» соединений.

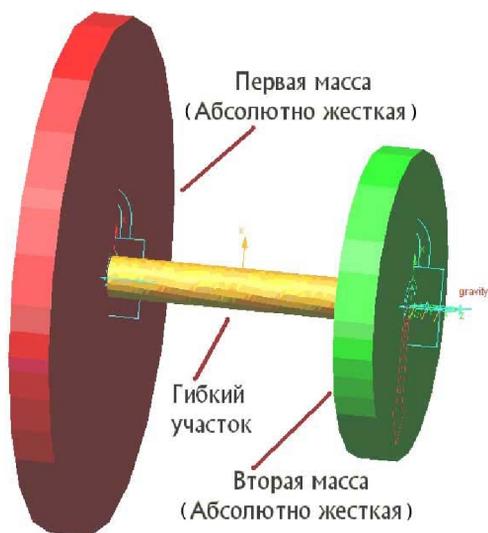


Рис. 6. Внешний вид двухмассовой эквивалентной системы в пакете ADAMS

О методе а) подробно рассказывается ниже. Метод б) заключается в замене реальных деформируемых тел пружинами эквивалентной жесткости и демпфирования. Набор пружин весьма широк, от простейших линейных (для колебаний растяжения-сжатия) и торсионных (для крутильных колебаний), до многокомпонентных, которые позволяют задавать жесткости и коэффициенты демпфирования по всем шести степеням свободы (для изгибных и сложных колебаний). Все упругие элементы позволяют задавать нелинейные жесткости и демпфирование.

## 2. Использование объемной модели

Вы можете напрямую ввести в ADAMS объемную модель двигателя вместе с материалами, из которых изготовлены детали, затем оснастить граничными условиями и произвести расчет. В этом случае отпадает необходимость в построении эквивалентных схем. Кроме того, созданная единожды модель может использоваться для кинематического, статического, динамического, прочностного, вибрационного и прочих типов расчетов. Немаловажна и высокая точ-

ность расчета за счет учета совместного действия разных форм колебаний.

Недостаток – необходимость иметь точную объемную геометрию, подобную показанной на рис. 7, а также длительное время создания модели.

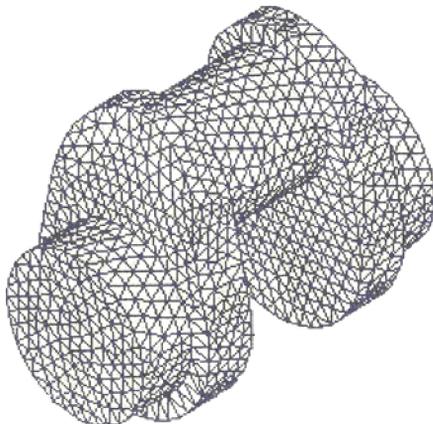


Рис. 7. Образец разбивки колена вала на конечные элементы

В этом случае, очевидно, использование «псевдогибких» соединений исключается, и приходится прибегать к созданию деформируемых тел. Для создания деформируемых тел используется метод конечных элементов МКЭ. При наличии современных расчетных машин это очень легкий и точный метод, тем более что почти все операции автоматизированы. Этот метод использует программа ANSYS. Он замечательно подходит для решения статических задач. Од-

нако при попытке применить его при решении задач кинематики и динамики, обнаруживается слабость метода. Расчет работы механизма является нелинейной задачей, перемещения механизма на много порядков превышают допустимые деформации тел.

Кроме того, постоянно меняются скорости и силы, воздействующие на деформируемое тело. Попытки использовать в этом случае метод конечных элементов приводят к раздуванию системы уравнений и такому росту сложности расчета, который не под силу даже современным компьютерам.

В качестве альтернативы этому методу был предложен метод Крейга-Бамптона, или метод суперпозиции мод. Суть метода заключается в следующем:

- а) тело разбивается на конечные элементы;
- б) производится модальный расчет, в ходе которого определяется заданное число форм колебаний тела;
- в) конечные элементы перестают участвовать в расчете, поскольку тело теперь представляет собой один суперэлемент, харак-

теризуемый набором форм колебаний. Предполагается, что каждая форма колебаний действует независимо от другой. В этом случае полную деформацию на узле тела можно определить, как векторную сумму перемещений от каждой формы;

г) после создания самого деформируемого тела, возникает вопрос: каким образом полученный суперэлемент может быть включен в твердотельную механическую модель?

Для этого был предложен специальный метод. Для гибкого тела, помимо описанных выше форм колебаний, названных «нормальными», были введены «моды присоединения». Мод присоединения – это форма колебаний, вызванная единичной деформацией в точке присоединения по всем требуемым степеням свободы. Определив таким образом жесткость в этой точке от единичной деформации, ADAMS может присоединить в ней к деформируемому телу другой объект, будь то твердое тело, сила, соединение или другое деформируемое тело.

Таким образом, вы заранее должны выбрать точки, в которых деформируемое тело будет взаимодействовать с другими элементами, и при создании суперэлемента указать компьютеру рассчитать необходимые моды присоединения;

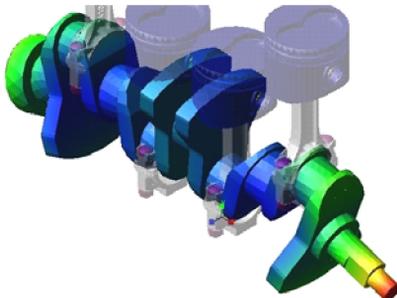


Рис. 8. Изгибная форма колебания коленчатого вала двигателя

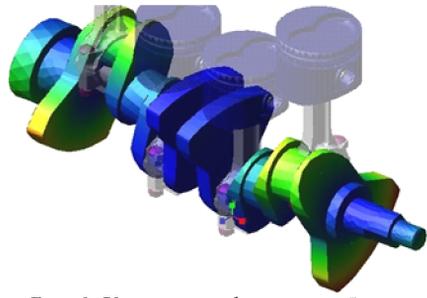


Рис. 9. Крутильная форма колебания коленчатого вала двигателя

д) теперь, если тело было создано с помощью встроенных опций ADAMS, вам достаточно прикрепить его в заданных местах вашей модели. Если же вы создали тело в другом пакете, например в ANSYS, вы можете импортировать его в ADAMS, используя файл MNF. MNF – это модальный нейтральный файл, в котором хранятся геометрия и все формы колебаний тела.

На этом построение модели заканчивается и можно приступить к расчету.

В пакете ADAMS существует два способа определения собственных форм и частот:

1. В динамическом расчете.
2. С помощью модуля ADAMS/Vibration.

В первом случае вы сами задаете возбуждающую силу, а затем проводите обычный расчет динамики системы. Если вы задали возбуждающую силу с монотонно изменяющейся частотой, то вы можете пройти по всему интересующему вас спектру частот. В процессе анализа вы можете просмотреть деформации гибкого вала (рис. 8,9) в любом из его маркеров.

Анализируя графики (рис.10), можно определить текущую форму колебаний и ее частоту. В то же самое время вы отслеживаете амплитуду колебаний, следите за поведением всей системы и измеряете напряжения в деформируемом теле.

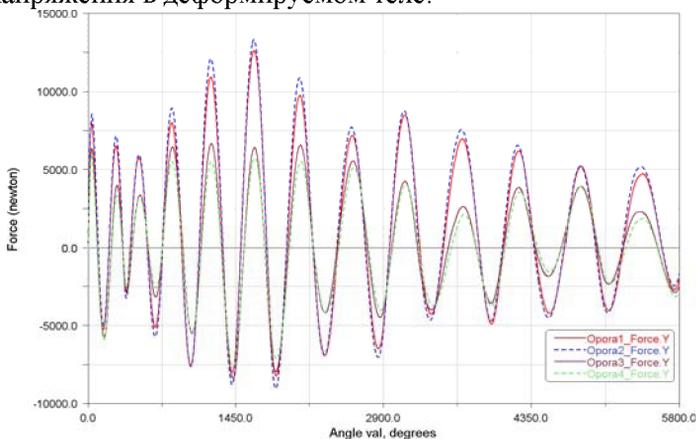


Рис. 10. Получение резонанса для четырех опор в динамическом расчете

Во втором случае во входном канале выбирается маркер, к которому приложено возбуждающее воздействие, и параметры возбуждающей силы. В простейшем случае достаточно использовать силовое воздействие с гармонической функцией фиксированной амплитуды монотонно возрастающей частоты.

В выходном канале выбирается маркер, параметры которого необходимо измерить. Измеряться могут все доступные параметры, такие как перемещение, скорость, ускорение, сила и многие другие.

Назначается диапазон частот, в котором требуется производить поиск.

Программа находит все формы колебаний системы в указанном диапазоне. На рис. 11 показана амплитуда, а на рис. 12 – фаза одной из форм колебаний системы.

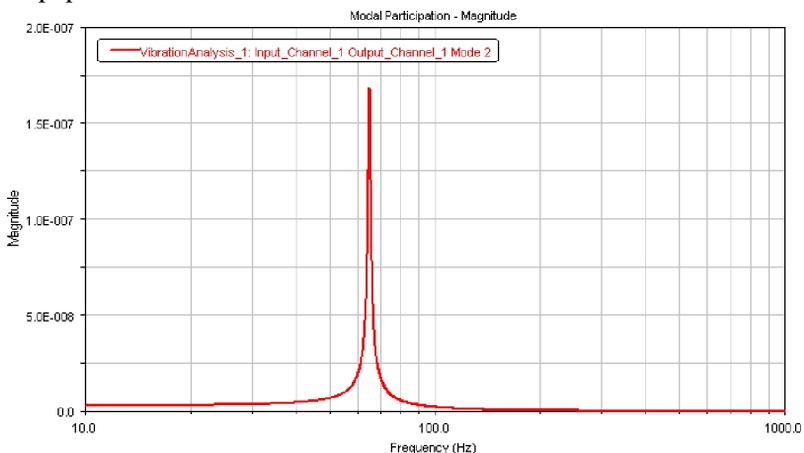


Рис. 11. Амплитуда крутильной формы колебания коленчатого вала с частотой 65 Гц

Если для одного входного канала использовать несколько выходных, то можно настроить каждый на восприятие только одного типа форм колебаний, поскольку по умолчанию ADAMS находит все формы колебаний, лежащие в заданном диапазоне: растяжения-сжатия, изгибные и крутильные. Для некоторых режимов доступна визуализация форм колебаний на экране, что позволяет непосредственно определить их тип. Как правило, первые 6 форм колебаний одинаковы у деформируемого и недеформируемого тела – это перемещение по шести степеням свободы. Остальные формы колебаний присутствуют только у деформируемых тел.

Помимо определения собственных форм колебаний, ADAMS/Vibration позволяет определить дополнительные параметры, такие как передаточная функция, вклад каждой формы колебаний в общую энергию деформации и т.д.

Возможен расчет вынужденных колебаний. Выбор метода расчета собственных форм зависит от конструкции и требуемых выходных данных. Для поршневого двигателя сложность заключается прежде всего в задании входного канала, который должен имитиро-

вать переменную, нелинейную газовую силу. Поэтому для предварительного

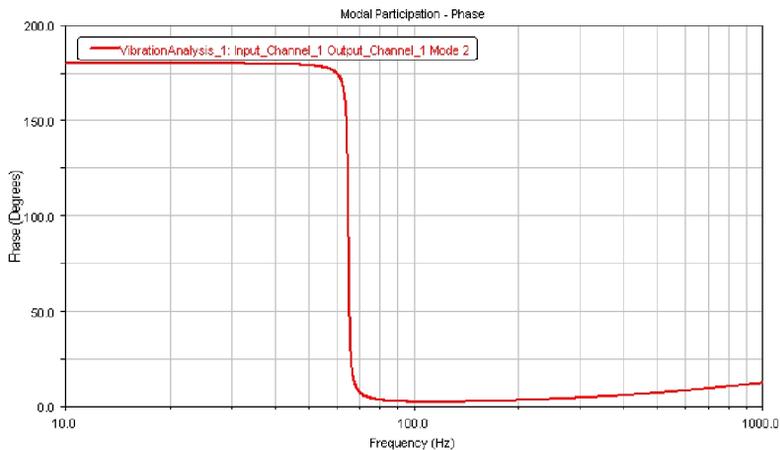


Рис. 12. Фазы крутильных колебаний коленчатого вала

расчета ДВС, особенно многоцилиндровых, как правило, используется динамический метод. Для более точного и полного расчета применяется специальный модуль ADAMS/Vibration. При этом газовую силу приходится моделировать гармонической функцией или их суммой из условия равенства частоты и совершаемой работы. Для самых простых случаев достаточно обеспечить совпадение частот реальной газовой и возбуждающей силы. Возможно задание возбуждающего воздействия как периодического перемещения поршня.

Таким образом, для формы колебаний, рассмотренной в этом примере, мы получили частоту в 65 Гц. Сама форма колебаний приведена на рис. 9. Для наглядности амплитуда колебаний увеличена во много раз. Реальные отклонения не более миллиметра. Чтобы получить точное значение амплитуды, можно запустить динамический расчет двигателя на полученной частоте и отследить изменение интересующего параметра, как показано на рис. 10.

## 5. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАНЯТИЯ

Целью лабораторной работы является изучение вопросов, связанных с крутильными колебаниями коленчатых валов (КВ) двигателей внутреннего сгорания (ДВС).

Крутильные колебания возникают в связи с действием на коленчатый вал переменных крутящих моментов, которые (в особенности на резонансных режимах) приводят к появлению усталостных трещин и в отдельных случаях к разрушению элементов конструкции. Поэтому коленчатые валы ДВС подлежат обязательному расчету на крутильные колебания.

Целью настоящей работы является изучение способа приведения реальной системы коленчатого вала к эквивалентной (теоретической или расчетной) системе и овладение методиками расчетного и экспериментального определения собственных частот и форм крутильных колебаний системы эквивалентного вала.

При выполнении лабораторной работы используются:

- настоящее пособие;
- установка для исследования крутильных колебаний валов;
- плакат с данными для расчетов.

Рекомендуется следующая последовательность проведения занятия:

1. По настоящему пособию изучить общие сведения о колебаниях.
2. Познакомиться с методом приведения реальной системы коленчатого вала к эквивалентной (расчетной).
3. Изучить методы определения собственных частот и форм колебаний упругих систем с сосредоточенными массами.
4. Рассчитать собственные частоты и частоты динамического гашения крутильных колебаний для двухмассовой системы (реализованной на установке).
5. Познакомиться с конструкцией установки и методикой проведения эксперимента.
6. Выполнить экспериментальные исследования.
7. Сравнить результаты теоретических расчетов и экспериментальных данных.
8. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

В процессе работы выполнять необходимые записи в тетради для лабораторных работ. Лабораторная работа рассчитана на 4 часа и проводится в лаборатории динамики и прочности. За 15 минут до окончания занятия нужно быть готовым к опросу.

## 6. УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 4, *а* представлена схема экспериментальной установки, на рис. 4, *б* - ее эквивалентная система.

В опорах 6 установлен вал 1 с насаженными дисками 2.

С помощью цанговых зажимов 7 положения дисков могут меняться по длине вала 1, изменяя тем самым крутильные жесткости соответствующих участков вала и число вариантов эквивалентной системы. На одном конце вала жестко установлена качалка 3, вилке которой вращается через подшипник 4 вал ротора электродвигателя 5. Подшипник 4 поставлен с эксцентриситетом, благодаря чему при вращении вала электродвигателя качалка 3 совершает угловые перемещения, передающиеся на вал 1 установки.

Так кинематически возбуждаются вынужденные крутильные колебания дисков 2 на упругом вале 1. Для работы электродвигателя 5 (МА- 250) подается постоянный ток, вырабатываемый электромашиным усилителем АДУ- 1300.

Методика проведения эксперимента заключается в регистрации резонансных крутильных колебаний дисков 2 на упругом вале 1 путем замера амплитуд, частот и фаз для каждой формы колебаний.

Для этого на каждом из дисков установлены пьезоэлектрические датчики для замера вибраций типа ИС-313. При колебаниях в датчиках индуцируется э.д.с., которая подается на прибор измерения ускорения типа ПИУ-1М. В нем сигнал усиливается и подается на пластины вертикального отклонения луча двухлучевого осциллографа типа С1- 77.

Явление резонанса характеризуется резким увеличением амплитуды колебаний. Наступление резонансного режима крутильных колебаний регистрируется по максимальному увеличению вертикального луча осциллографа, а также по максимальному отклонению стрелки прибора ПИУ- 1М.

После того как момент резонанса зафиксирован, соответствующая ему частота может быть определена частотомером.

Для избежания возможных ошибок при определении резонанса необходимо использовать звуковой генератор. Для этого на пластины горизонтального отклонения луча осциллографа подается сигнал звукового генератора типа ГЗ-34. В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний на экране осциллографа будет

получаться фигура Лиссажу. При совпадении частот эта фигура будет иметь форму эллипса или наклонной прямой. Численные значения частот определяют по шкале звукового генератора.

Определение форм колебаний и фаз колеблющихся дисков осуществляется визуально с помощью строботаксиметра и по взаимному расположению эллипсов фигур Лиссажу на экране двухлучевого осциллографа.

## 7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить инструкцию по технике безопасности у преподавателя или лаборанта.
2. Получить у преподавателя данные варианта эквивалентного вала.
3. Провести расчет собственных частот колебаний по уравнению для определения собственных частот, определить соответствующие им формы.  
Определить частоту динамического гашения.
4. Внимательно ознакомиться с экспериментальной установкой и ее описанием.
5. Включить осциллограф, звуковой генератор, приборы ПИУ- 1М и дать им прогреться.
6. По разрешению преподавателя или лаборанта включить питание постоянным током.
7. Включением выключателя ВК1 произвести пуск электромашинного усилителя.
8. Включением выключателя ВК- 2 произвести пуск электродвигателя.
9. Плавно регулируя частоту возбуждения реостатами и вращая ручку изменения частоты звукового генератора, добиться изображения эллипса на экране осциллографа.
10. Произвести настройку установки вначале на первую, а затем на вторую критическую частоту, произвести запись частот.
11. С помощью строботаксиметра или по экрану осциллографа визуально определить форму колебаний – движения дисков в фазе или в противофазе.
12. Снизить реостатом частоту вращения электродвигателя.

13. Выключить последовательно электродвигатель МА-250, электро-машинный усилитель АДУ-1300, генератор ГСР- 9000, звуковой генератор, приборы ПИУ-1М, осциллограф.
14. Оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- Название и цель работы.
- Расчетную схему эквивалентного вала и его параметры.
- Расчет собственных частот крутильных колебаний системы и частоты динамического гашения.
- Масштабное изображение формы колебаний для каждой из частот.
- Сравнение расчетных и экспериментальных значений собственных частот колебаний и анализ причин их расхождения.
- Изображение наблюдаемых фигур Лиссажу на критических частотах колебаний системы и частоте динамического гашения.
- Выводы по работе.

## **8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Последовательность расчета коленчатых валов на крутильные колебания.
2. Что такое эквивалентная (теоретическая) или расчетная система коленчатого вала?
3. Как осуществляется приведение длин отдельных участков коленчатого вала?
4. Как определяются моменты инерции приведенных масс?
5. Какой вид имеет эквивалентный вал?
6. Способы составления дифференциальных уравнений свободных колебаний.
7. Как решается система дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания эквивалентного вала?
8. Как составить и решить уравнение для свободных колебаний одномассовой системы, изображенной на рис. 1?
9. Что такое “форма колебания”?
10. Как определить, какая частота какой форме соответствует?
11. От каких параметров системы эквивалентного вала зависит собственная частота колебаний?

12. Что такое крутильная жесткость и как она определяется?
13. По каким формулам определяются моменты инерции вращающихся дисков?
14. Что такое частота динамического гашения и как она определяется?
15. В каких устройствах используется явление динамического гашения?
16. Каким образом можно упрощенным способом определить собственную частоту крутильных колебаний по одноузловой форме для эквивалентного вала экспериментальной установки?
17. К какому изменению (увеличению или уменьшению) частоты собственных колебаний приведет:
  - увеличение диаметра вала?
  - увеличение диаметра диска?
  - увеличение толщины диска?
  - увеличение длины вала?

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Массовый момент инерции диска с отверстием:

$$J = \rho \frac{\pi b}{32} (D^4 - d^4), [\text{кг} \cdot \text{м}^2].$$

2. Крутильная жесткость  $i$ -го участка вала с отверстием:

$$C_i = \frac{J_{\text{пол}} G}{l_i}, [\text{Н} \cdot \text{м}],$$

где  $J_{\text{пол}} = \frac{\pi}{32} (d_n^4 - d_e^4), [\text{м}^4].$

Для вычисления массовых моментов инерции дисков и крутильных жесткостей участков вала приведем основные параметры установки, имитирующей эквивалентный вал:

- диаметры вала: наружный  $d_n = 6 \cdot 10^{-3}$  м;  
внутренний  $d_e = 4 \cdot 10^{-3}$  м;
- длина участков вала (если не оговорено иначе):  
 $l_1 = 7,9 \cdot 10^{-2}$  м;  
 $l_2 = 20 \cdot 10^{-2}$  м;
- плотность материала дисков  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;
- модуль упругости материала вала  $G = 8,1 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Каждый диск состоит из деталей, поэтому суммарный массовый момент инерции

$$J_1 = J_{N1} + J_{N2} + J_{N3},$$

$$J_2 = J_{N1} + J_{N2} + J_{N3} + 2J_{N4},$$

где  $J_{N4} = m_{N4} R_{ц.м}^2$  – массовый момент инерции плоской лопатки (пластины), установленной на диске. Масса пластины определяется произведением ее объема на плотность материала, радиус центра тяжести измеряется на установке.

Если все значения при вычислениях подставлять в системе СИ, частота получается в радианах в секунду. Частоту в герцах при необходимости можно получить, разделив полученные значения на  $2\pi$ .

Размеры (мм) и форма отдельных деталей дисков представлены на рис. 13.

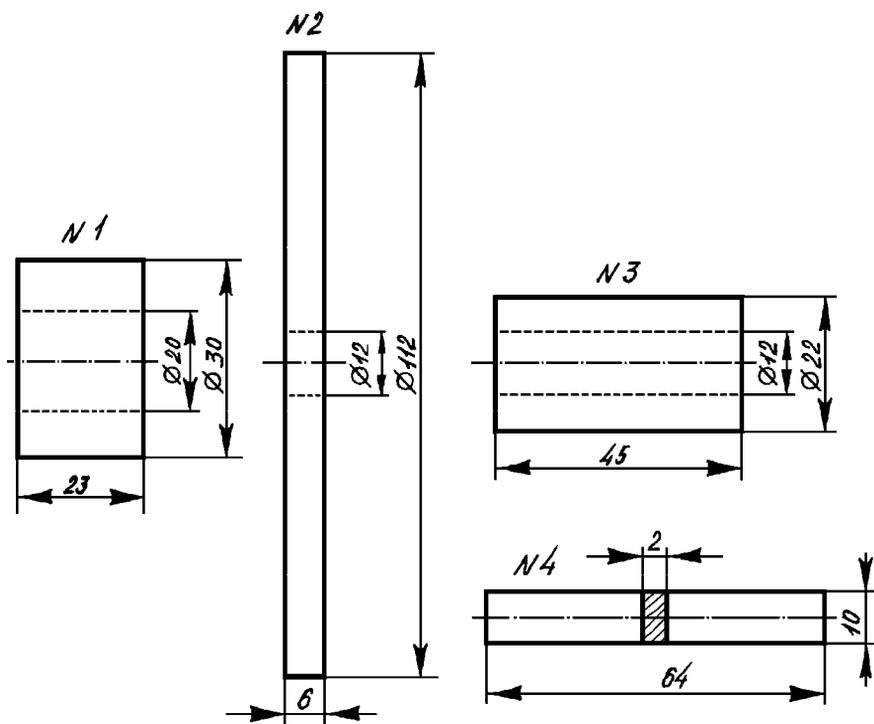


Рис. 13. Размеры (мм) и форма отдельных деталей дисков

Учебное издание

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ**

*Методические указания*

*Составители: Ржевский Валерий Прокофьевич,  
Паровой Федор Васильевич,  
Лежин Дмитрий Сергеевич  
Мелентьев Владимир Сергеевич  
Гвоздев Александр Сергеевич*

Научный редактор В. С. Кузьмичев  
Редакторская обработка Т. Ю. Деппова  
Корректорская обработка Н. Н. Теплова  
Доверстка С. А. Нечитайло

Подписано в печать 21.12.06. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,1. Усл. кр.-отг. 2,2. Печ.л. 2,5.

Тираж 50 экз. Заказ . ИП-96/2006

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.