МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2015

УДК 517.37 СГАУ: 5 (075)
ББК 22.161.1я7

Составители: ***С.В. Бушков, Л.В. Коломиец***

Рецензент канд. физ.-матем. наук, доц. СамГУ Е .Я. Г о р е л о в а

Кратные интегралы и их приложения: метод. указания / сост.: *С.В. Бушков, Л.В. Коломиец*. – Самара: СГАУ, 2015. – 52 с.

Составлены в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета. Указания обеспечивают полную теоретическую и методическую поддержку практических занятий по темам «Кратные интегралы и их приложения».

Рекомендованы студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам.

УДК 517.37 СГАУ: 5 (075)
ББК 22.161.1я7

© СГАУ, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей задана непрерывная функция $f\left(x, y\right)$. Выполним действия:

1. Произвольным образом разобьем область D кусочно-гладкими дугами на n частичных областей D_i с площадями ΔS_i (рис. 1).

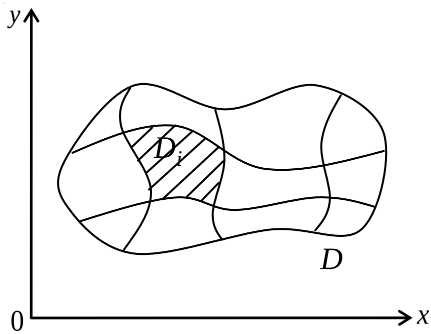


Рис. 1. Разбиение плоской области D

2. Диаметром частичной области называется верхняя грань расстояний между точками этой области: $d_i = \sup \rho\left(M_1, M_2\right)$, $M_1, M_2 \in D_i$.

Обозначим верхнюю грань диаметров частичных областей для данного разбиения $\lambda = \sup d_i$.

3. В каждой частичной области D_i произвольным образом выберем точку $M_i\left(\xi_i, \eta_i\right)$ и вычислим значение функции $f\left(\xi_i, \eta_i\right)$.

4. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \cdot \Delta S_i .$$

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***двойным интегралом от функции*** $f\left(x, y\right)$ ***по области*** D и обозначается

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta S_i\ .$$

В этом случае функция $f(x,y)$ называется ***интегрируемой по Риману*** в области D.

В определении интеграла предел не должен зависеть от способа разбиения. Поэтому, если интеграл существует, можно выбрать разбиение области D на прямоугольники с помощью прямых, параллельных осям координат (рис. 2).

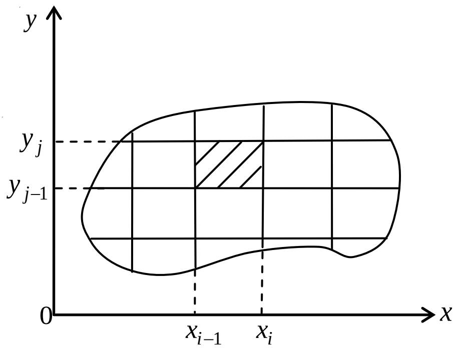


Рис. 2. Разбиение плоской области D на прямоугольники

Пусть D_{ij} – прямоугольник со сторонами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Площадь такого прямоугольника равна $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, а интегральная сумма имеет вид

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

В связи с этим используют другое обозначение двойного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Замечание. Двойной интеграл есть ***число***, зависящее только от вида области D и функции $f(x,y)$. В связи с этим переменные интегрирования можно обозначить любыми буквами:

$$I=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_D f\left(u,v\right)dudv.$$

Как и для функции одной переменной, ***необходимым условием*** существования двойного интеграла является ***ограниченность*** подынтегральной функции $f\left(x,y\right)$. Однако, это условие не является достаточным.

Например, функция Дирихле

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ и } y - \text{рациональные числа;}\\ 0, & \text{если } x \text{ или } y - \text{иррациональное число}\end{cases}$$

является ограниченной, но неинтегрируемой ни в одной области.

Достаточные условия интегрируемости содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1 (сильное достаточное условие). Если функция $f\left(x,y\right)$ ***непрерывна*** в замкнутой ограниченной области D, то она интегрируема в области D.

Теорема 2 (слабое достаточное условие). Если функция $f\left(x,y\right)$ ***кусочно-непрерывна*** в замкнутой ограниченной области D, то она интегрируема в области D. Напомним, что функция $f\left(x,y\right)$ называется кусочно-непрерывной в области D, если она непрерывна во всех точках области D, за исключением, быть может, точек, лежащих на конечном числе кусочно-гладких кривых. В точках этих кривых функция $f\left(x,y\right)$ может иметь разрывы первого (но не второго) рода.

Везде в дальнейшем будем предполагать, что все подынтегральные функции интегрируемы в области D.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в трехмерном пространстве задано тело, ограниченное ***снизу*** плоской замкнутой ограниченной областью D, ***сбоку*** – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, при этом направляющая цилиндрической поверхности совпадает с границей области D. ***Сверху*** тело ограничено графиком непрерывной функции $z = f(x,y) \geq 0.$ Проекция этого графика на плоскость Oxy совпадает с областью D (рис. 3).

Такое тело называется ***криволинейным цилиндром.***

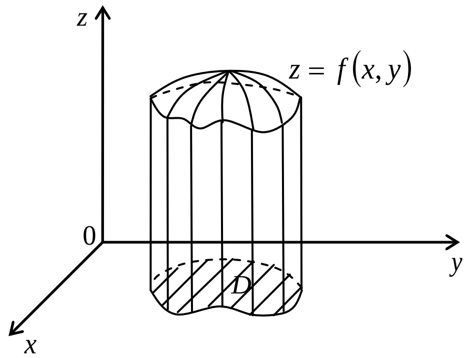


Рис. 3. Криволинейный цилиндр в пространстве

Интегральная сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$ является здесь суммой объемов прямых цилиндров с основаниями, площади которых равны ΔS_i, и высотами $f(\xi_i, \eta_i)$. Эта сумма приближенно равна объему всего цилиндрического тела. При $\lambda \to 0$ получаем точное значение ***объема криволинейного цилиндра*** в виде двойного интеграла:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Замечание. Если в формуле вычисления объема криволинейного цилиндра положить $f(x,y)\equiv 1,$ то объем цилиндра будет численно равен площади основания. Таким образом, получаем формулу вычисления ***площади плоской области*** D:

$$S_D=\iint\limits_D dxdy.$$

3. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – интегрируемые в области D функции. Тогда справедливы следующие свойства.

1) (*линейность*). Для любых действительных чисел α и β выполняется

$$\iint\limits_D\left[\alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y)\right]dxdy=$$

$$=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

2) (*аддитивность*). Пусть $D=D_1\cup D_2$, $D_1\cap D_2=\varnothing$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3) Если $f(x,y)\geq 0,\ \forall(x,y)\in D,$ то $\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy\geq 0.$

4) Если $f(x,y)\geq g(x,y)\geq 0,\ \forall(x,y)\in D,$ то

$$\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy\geq\iint\limits_D g(x,y)\ dxdy.$$

5) (*оценка модуля интеграла*).

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy\right|\leq\iint\limits_D\left|f(x,y)\right|\ dxdy.$$

6) (*оценка интеграла*). Если $m=\min\limits_D f(x,y),\ \ M=\max\limits_D f(x,y),$

S_D – площадь области D , то справедлива оценка

$$m \cdot S_D \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le M \cdot S_D\,.$$

7) (*теорема о среднем*). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то найдется такая точка $M(\overline{x},\overline{y}) \in D,$ что выполняется равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot S_D,$$

где S_D – площадь области D. Значение $f(\overline{x},\overline{y})$ при этом называется ***средним значением*** функции $f(x,y)$ в области D:

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{S_D} \cdot \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление двойных интегралов сводится к последовательному вычислению одномерных интегралов.

Случай прямоугольной области

Пусть область D есть прямоугольник $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\}$ со сторонами, параллельными осям координат, а $f(x,y)$ – непрерывная в области D функция. Если переменную x зафиксировать, то функция $f(x,y)$ будет зависеть только от y. Следовательно, существует интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$ Этот интеграл можно рассматривать как функцию, зависящую от $x,$ поэтому существует интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$

В итоге получится ***повторный интеграл***

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Аналогично можно получить ещё один повторный интеграл:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Теорема 3. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области D, то существуют оба повторных интеграла, равных между собой и равных двойному интегралу:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Пример 1. Вычислите интеграл $\iint_D \left(x^2+2y\right) dxdy,$ где D – область, ограниченная прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

Решение. Область интегрирования D (рис. 4) представляет собой прямоугольник $D=\left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1 \right\}$, следовательно, по теореме 3 оба повторных интеграла равны двойному. Покажем это. Вычислим первый повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_0^1 \left(x^2+2y\right) dy$. Сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y, при этом x считается константой:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 \left(x^2+2y\right) dy = \int_0^2 \left(x^2 y + y^2\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^2 \left(x^2+1\right) dx = \frac{14}{3}.$$

Теперь вычислим другой повторный интеграл $\int_0^1 dy \int_0^2 \left(x^2+2y\right) dx$, при этом во внутреннем интеграле y считается константой:

$$\int_0^1 dy \int_0^2 \left(x^2+2y\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)\Bigg|_0^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{8}{3}+4y\right) dy = \frac{14}{3}.$$

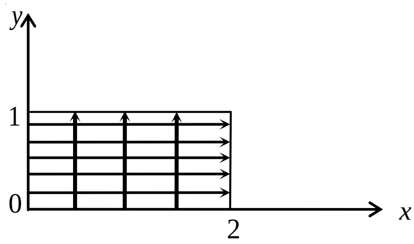


Рис. 4. Область интегрирования к примеру 1

Таким образом, $\iint\limits_D \left(x^2+2y\right)dxdy=\dfrac{14}{3}$.

Ответ: $\dfrac{14}{3}$.

Случай криволинейной области

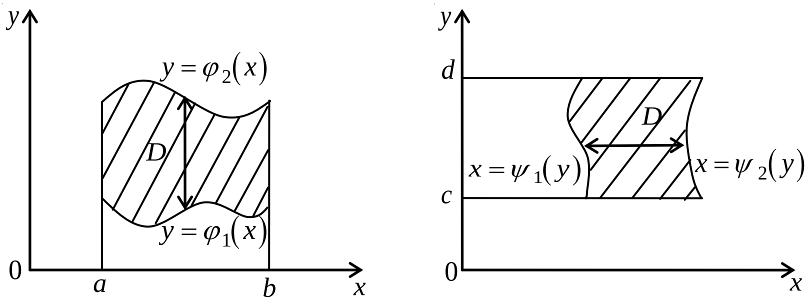
Пусть область D ограничена сверху и снизу двумя непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, а по бокам – вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$. Если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области D не более чем в двух точках, то такая область называется ***правильной в направлении оси*** Oy (рис. 5 *а*). В этом случае двойной интеграл равен повторному:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Если область D ограничена слева и справа графиками кривых $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, а сверху и снизу – прямыми $y=c$ и $y=d$, и при этом любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу области D не более, чем в двух точках, то такая область называется ***правильной в направлении оси*** Ox (рис. 5 *б*).

В этом случае двойной интеграл равен повторному:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$



а *б*

Рис. 5. Примеры правильных областей

Важно запомнить: ***пределы внешнего интеграла – всегда числа. Пределы внутреннего интеграла могут зависеть от внешней переменной.***

<u>Пример 2.</u> Измените порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Решение. Задание изменить порядок интегрирования означает, что нужно записать равный данному повторный интеграл по области D так, чтобы во внешнем интеграле интегрирование производилось по переменной x, а во внутреннем интеграле – по переменной y.

Построим сначала область D.

Область интегрирования первого интеграла имеет вид $D_1 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\quad 0 \le x \le \sqrt{y} \right\}$. Эта область находится внутри горизонтальной полосы $0 \le y \le 1$ и ограничена координатной осью $x = 0$ и параболой $x = \sqrt{y}$.

Область интегрирования второго повторного интеграла имеет вид $D_2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 1 \le y \le \sqrt{2},\ 0 \le x \le \sqrt{2-y^2} \right\}$. Эта область находится внутри горизонтальной полосы $1 \le y \le \sqrt{2}$ и ограничена координатной осью $x = 0$ и полуокружностью $x = \sqrt{2 - y^2}$.

Области D_1 и D_2 изображены на рис. 6.

Объединяя области D_1 и D_2, по свойству аддитивности получим область интегрирования для суммы двух повторных интегралов: $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Пределы внешнего интеграла – всегда числа. По рис. 6 найдем пределы интегрирования внешнего интеграла по области D: $0 \le x \le 1$.

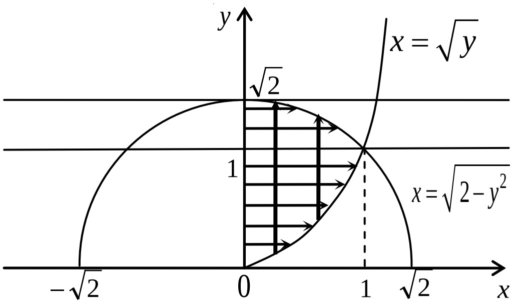


Рис. 6. Область интегрирования к примеру 2

Чтобы определить пределы изменения внутренней переменной y, нужно внутри области D построить «стрелочки», параллельные оси $\mathrm{O}y$ (рис. 6). Видно, что все такие стрелочки начинаются на параболе $x = \sqrt{y}$ ($y = x^2$) и кончаются на полуокружности $x = \sqrt{2 - y^2}$ ($y = \sqrt{2 - x^2}$). Таким образом, переменная y изменяется в пределах $x^2 \le y \le \sqrt{2 - x^2}$, а объединенная область D определяется неравенствами $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{2 - x^2} \right\}$.

По свойству аддитивности сумма повторных интегралов равна одному интегралу с другим порядком интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Напомним еще раз, что пределы внутреннего интеграла могут зависеть от внешней переменной.

Ответ: $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

<u>Пример 3.</u> Измените порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Решение. Область интегрирования D (рис. 7) находится внутри горизонтальной полосы $0 \le y \le 1$ и ограничена *слева* – полуокружностью $x = -\sqrt{4-y^2}$ (или $x^2+y^2=4,\ x \le 0$), *справа* – другой полуокружностью $x = -\sqrt{4y-y^2}$ (или $x^2+(y-2)^2=4,\ x \le 0$).

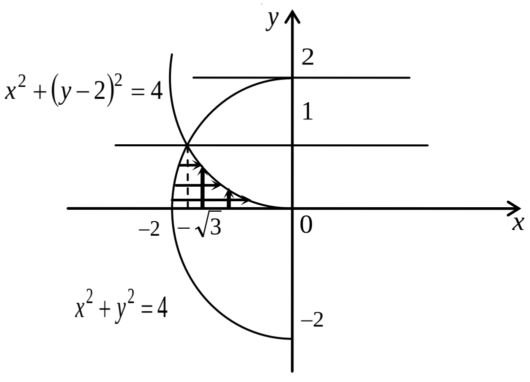


Рис. 7. Область интегрирования к примеру 3

Запишем интеграл таким образом, чтобы во внешнем интеграле интегрирование производилось по переменной x, а во внутреннем интеграле – по переменной y.

Пределы внешнего интеграла всегда числа: $-2 \le x \le 0$.

Чтобы выяснить, как изменяется внутренняя переменная интегрирования y, внутри области D построим «стрелочки», параллельные оси Oy. При этом замечаем, что если $x \in \left[-2, -\sqrt{3}\right]$, то переменная y изменяется от 0 до окружности $x^2 + y^2 = 4$. При $x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right]$ y меняется от 0 до окружности $x^2 + \left(y-2\right)^2 = 4$. Так как верхний участок области D задан двумя линиями, то прямая $x = -\sqrt{3}$ разбивает область D на две подобласти $D_1 = \left\{ \left(x, y\right) \middle| -2 \le x \le -\sqrt{3},\ \ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \right\}$,

$D_2 = \left\{ \left(x, y\right) \middle| -\sqrt{3} \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2-\sqrt{4-x^2} \right\}$.

По свойству аддитивности двойного интеграла получаем ответ.

Ответ: $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x, y\right) dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\left(x, y\right) dy.$

<u>Пример 4.</u> Вычислите интеграл $\iint\limits_{D} \left(x^2 + y + 3\right) dx\, dy$, где D – область, ограниченная линиями $2x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Область интегрирования представляет собой треугольник и изображена на рис. 8.

Пусть внешний интеграл берется по x, а внутренний – по y, тогда при интегрировании во внутреннем интеграле x считается постоянной величиной.

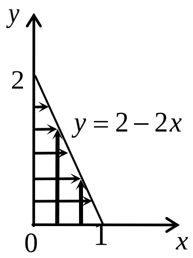


Рис. 8. Область интегрирования к примеру 4

$$\iint\limits_D \left(x^2+y+3\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} \left(x^2+y+3\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left. x^2 y + \frac{y^2}{2} + 3y \right) \right|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2\left(2-2x\right) + \frac{\left(2-2x\right)^2}{2} + 3\left(2-2x\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-2x^3+4x^2-10x+8\right) dx = \frac{23}{6}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда внешний интеграл берется по y, а внутренний по x :

$$\iint\limits_D \left(x^2+y+3\right) dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-\frac{y}{2}} \left(x^2+y+3\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\left. \frac{x^3}{3} + y\,x + 3x \right) \right|_0^{1-\frac{y}{2}} dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{3}\left(1-\frac{y}{2}\right)^3 + y\left(1-\frac{y}{2}\right) + 3\left(1-\frac{y}{2}\right) \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-\frac{y^3}{24} - \frac{y^2}{4} - y + \frac{10}{3} \right) dy = \frac{23}{6}.$$

Ответ: $\frac{23}{6}$.

Вывод. Не важно, в каком порядке интегрировать функцию по правильной области D, интеграл равен одному и тому же числу. В связи с этим, при вычислении двойного интеграла следует выбирать такой порядок интегрирования, чтобы переход от двойного интеграла к повторному осуществлялся наименьшим числом слагаемых.

<u>Пример 5.</u> Вычислите двойной интеграл

$$I=\iint\limits_D\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy,$$

где область D ограничена линиями $x=1,\ y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$.

Решение. Область интегрирования изображена на рис. 9.

Обратим внимание, что если внешний интеграл взять по переменной x, получим один повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dy$.

Если же рассматривать внешний интеграл по y, то получим сумму двух повторных интегралов:

$$\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{1}\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y^3}^{1}\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dx.$$

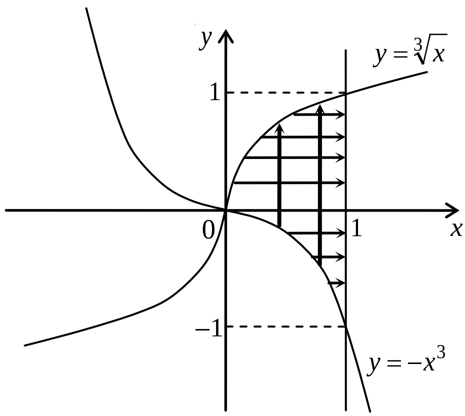


Рис. 9. Область интегрирования к примеру 5

Поэтому, выбирая первый вариант, запишем:

$$\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2y^3+\frac{10}{3}x^4y^5\right)\Bigg|_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}dx=\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{10}{3}x^{\frac{17}{3}}+x^{11}+\frac{10}{3}x^{19}\right)dx=1.$$

Ответ: 1.

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле применяют также, если первообразная сложно вычисляется или вообще не выражается через элементарные функции.

Пример 6. Вычислите интеграл $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy,$ где область D ограничена линиями: $x=0,\ \ y=\sqrt{2\pi},\ \ y=2x.$

Решение. Область интегрирования D изображена на рис. 10. Попробуем перейти к повторному интегралу, когда внешний интеграл берется по переменной x:

$$\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}dx\int\limits_{2x}^{\sqrt{2\pi}}y^2\cos\frac{xy}{2}\,dy\,.$$

При вычислении внутреннего интеграла потребуется два раза интегрировать по частям, но в итоге все равно получится интеграл, не выражающийся через элементарные функции.

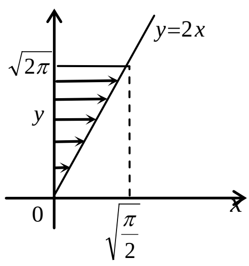


Рис. 10. Область интегрирования к примеру 6

Так как порядок интегрирования не влияет на значение двойного интеграла, рассмотрим повторный интеграл, где внешней переменной является y.

$$\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2}\,dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} \cos\,\frac{xy}{2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} \frac{2}{y}\cos\,\frac{xy}{2}\,d\left(\frac{xy}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} ydy\,\sin\frac{xy}{2}\Bigg|_0^{\frac{y}{2}} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} y\,\sin\frac{y^2}{4}\,dy = -4\cos\frac{y^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}} = 4.$$

Таким образом, изменение порядка интегрирования позволило свести двойной интеграл к повторному, вычисление которого не представляло труда.

Ответ: 4.

Изменение порядка интегрирования иногда бывает полезным для вычисления сложных интегралов.

Пример 7. Вычислите несобственный интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,\; a > 0,\; b > 0.$$

Решение. Нетрудно убедится, что $\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \displaystyle\int\limits_a^b e^{-xy} dy.$

С учетом этого равенства запишем:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b e^{-xy} dy = \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_0^{\beta} dx \int\limits_a^b e^{-xy} dy.$$

Изменим порядок интегрирования по прямоугольной области:

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^b dy\int_0^\beta e^{-xy}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^b \frac{1-e^{-\beta y}}{y}dy=$$

$$=\ln\frac{b}{a}-\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^b \frac{e^{-\beta y}}{y}dy=\ln\frac{b}{a}.$$

Ответ: $\ln\frac{b}{a}$.

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ требуется перейти к другим переменным по формулам $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v). \end{cases}$

Функция $f(x,y)$ превращается в функцию $f(x(u,v),\ y(u,v))$.

Однако при замене переменных меняется не только подынтегральная функция, но и сама область интегрирования, т.е. двойной интеграл претерпевает кардинальное изменение.

Предположим: 1) переменные u,v изменяются в некоторой области G плоскости Ouv;

2) функции $x(u,v),\ y(u,v)$ непрерывны и имеют в области G непрерывные частные производные;

3) ***функциональный определитель Якоби (якобиан)***, составленный из частных производных, не обращается в нуль ни в одной точке области:

$$\Im=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\neq 0.$$

При этих предложениях область G взаимно-однозначно отображается в некоторую область D на плоскости Oxy, причем граничные точки проходят в граничные, а внутренние – во внутренние.

В определении двойного интеграла участвует площадь ΔS_i бесконечно малой области. Выясним, как изменяется эта площадь при замене переменных. Рассмотрим прямоугольник P на плоскости $\mathrm{O}uv$; его площадь $\Delta S_P = \Delta u \cdot \Delta v$. Образом прямоугольника P на плоскости $\mathrm{O}xy$, является криволинейный параллелограмм Π с площадью ΔS_Π (рис. 11).

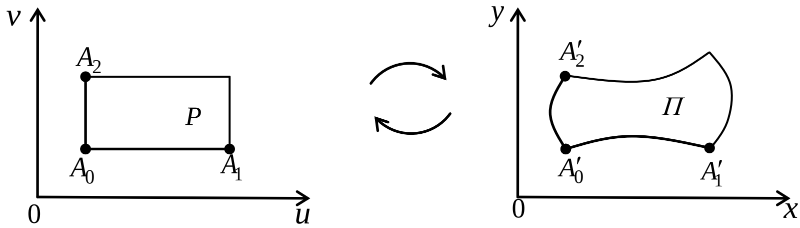


Рис. 11. Образ прямоугольной области при замене координат

Можно доказать, что с точностью до бесконечно малых высших порядков площадь криволинейного параллелограмма будет равна $\Delta S_\Pi = \left|\Im\right| \cdot \Delta S_P$. В этом заключается ***геометрический смысл якобиана:*** при замене переменных модуль якобиана в каждой точке равен отношению соответствующих друг другу бесконечно малых площадей:

$$\left|\Im\right| = \frac{\Delta S_\Pi}{\Delta S_P} = \frac{dS_\Pi}{dS_P}.$$

Запишем формулу преобразования двойного интеграла при замене переменных:

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right) \cdot dS_\Pi = \begin{bmatrix} x = x\left(u,v\right) \\ y = y\left(u,v\right) \end{bmatrix} = \iint\limits_G f\left(x(u,v),\ y(u,v)\right) \cdot \left|\Im\right| \cdot dS_P$$

или в других обозначениях

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right) dxdy = \begin{bmatrix} x = x\left(u,v\right) \\ y = y\left(u,v\right) \end{bmatrix} = \iint\limits_G f\left(x(u,v),\ y(u,v)\right)\left|\Im\right| dudv.$$

Наиболее распространенной заменой координат на плоскости являются полярные координаты $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Вычислим якобиан при такой замене.

$$\mathfrak{I} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тогда, согласно формуле замены переменных, получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |\mathfrak{I}| = \rho \end{bmatrix} = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\ \rho\, d\rho d\varphi.$$

В частности, площадь области D в полярных координатах находится по формуле.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G \rho\, d\rho d\varphi.$$

Замечание. На практике не обязательно детально строить область G. Достаточно выяснить пределы изменения переменных ρ и φ по виду области D.

<u>Пример 8.</u> Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к полярным координатам и расставьте пределы интегрирования, где D – область, ограниченная окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$.

Решение. Область интегрирования D построена на рис. 12.

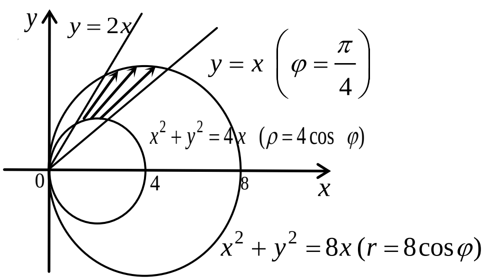


Рис. 12. Область интегрирования к примеру 8

При переходе к полярным координатам в качестве внешней переменной обычно берут полярный угол φ. Из рисунка видно, что угол φ изменяется от прямой $y = x$ с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\varphi_1 = 1$ $\left(\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}\right)$ до прямой $y = 2x$ с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\varphi_2 = 2$ $\left(\varphi_2 = \operatorname{arctg}2\right)$.

Чтобы выяснить, как изменяется внутренняя переменная ρ, проведем ***внутри*** области D «стрелочки» (лучи $\varphi = const$), выходящие из начала координат (рис. 12). Из рисунка видно, что все стрелочки начинаются на окружности $x^2 + y^2 = 4x$ (в полярных координатах $\rho = 4\cos\varphi$). Заканчиваются все стрелочки на окружности $x^2 + y^2 = 8x$ (в полярных координатах $\rho = 8\cos\varphi$). Модуль якобиана перехода к полярным координатам равен $\left|\Im\right| = \rho$.

Таким образом, получаем повторный интеграл:

$$\iint\limits_D f\left(x, y\right) dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f\left(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\rho\right)\ \rho\, d\rho.$$

<u>**Пример 9.**</u> Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f\left(x, y\right) dx\, dy$ к полярным координатам и расставьте пределы интегрирования, где D – область, ограниченная правой петлей лемнискаты Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам и получим следующее уравнение лемнискаты Бернулли:

$$\rho^4 = a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right); \quad \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Область существования лемнискаты определяет неравенство $\cos 2\varphi \geq 0$, решением которого является $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi k$.

Лемниската Бернулли построена на рис. 13.

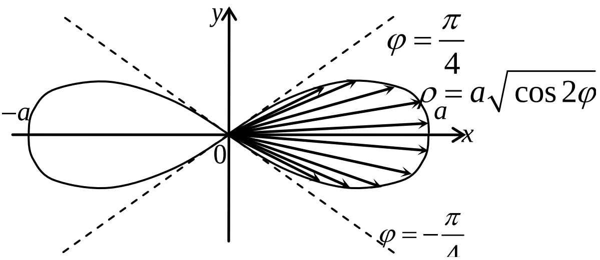


Рис. 13. Область интегрирования к примеру 9

Расставим пределы интегрирования в полярных координатах:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Пример 10. С помощью перехода к полярным координатам вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$, где D – часть кольца $x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\le x\sqrt{3}$.

Решение. Область интегрирования D изображена на рис. 14.

Подынтегральная функция в полярных координатах равна $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)=\varphi$.

При переходе к полярным координатам уравнения прямых $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y=x\sqrt{3}$ запишутся как $\varphi=\frac{\pi}{6}$ и $\varphi=\frac{\pi}{3}$ соответственно. Уравнения окружностей $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$ в полярных координатах имеют вид $\rho=1$ и $\rho=3$ соответственно.

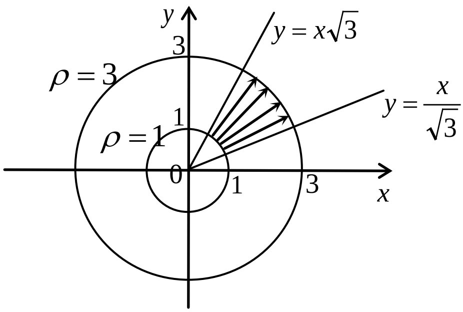


Рис. 14. Область интегрирования к примеру 10

Перейдем в данном интеграле к полярным координатам и расставим пределы интегрирования:

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^3 \varphi \cdot \rho\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\bigg|_1^3 d\varphi = 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{6}$.

Иногда бывает удобно применить ***обобщенные полярные координаты***

$$\begin{cases} x = a\,\rho\cos\varphi; \\ y = b\,\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Обобщенные полярные координаты называют еще ***эллиптическими***, т.к. уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в этих координатах имеет простой вид $\rho = 1$. Модуль якобиана для обобщенных полярных координат равен

$$\Im = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Формула перехода к обобщенным полярным координатам имеет вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_G f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)\ ab\rho\ d\varphi\ d\rho.$$

<u>Пример 11.</u> Вычислите интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x\,y}\,dxdy,$ где D – область, ограниченная линией $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)^4=\dfrac{x\,y}{\sqrt{6}}$ и лежащая в первом квадранте.

Решение. Чтобы построить область интегрирования $D,$ перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\,\rho\cos\varphi; \\ y=\sqrt{3}\,\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Значения a и b подбираются с таким расчетом, чтобы при подстановке выражений $x=a\rho\cos\varphi,$ $y=b\rho\sin\varphi$ в уравнение кривой, коэффициенты при x^2 и y^2 сократились, и можно было применить основное тригонометрическое тождество.

После указанной замены уравнение границы области D примет вид

$$\left(\rho^2\right)^4=\frac{\sqrt{2}\rho\cos\varphi\cdot\sqrt{3}\rho\sin\varphi}{\sqrt{6}};\quad \rho=\sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}.$$

Область существования этой кривой определяет неравенство $\sin 2\varphi\ge 0$, решением которого служит неравенство $\pi k\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}+\pi k$. Построим кривую и отметим область в первом квадранте (рис. 15).

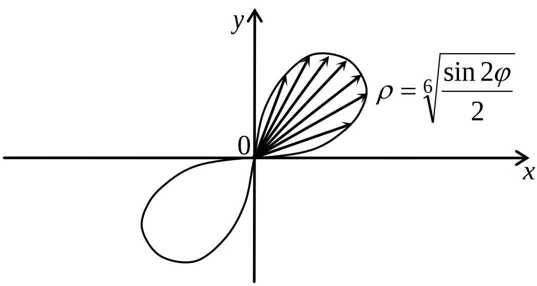


Рис. 15. Область интегрирования к примеру 11

Модуль якобиана для обобщенных полярных координат равен

$$\left|\Im\right|=ab\rho=\sqrt{6}\,\rho.$$

Тогда $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} \sqrt[4]{6}\sqrt{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}\sqrt{6}\,\rho\, d\rho =$

$$= \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} d\varphi = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{6}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Объем криволинейного цилиндра.

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dx\,dy,$$

где D – проекция тела на плоскость Oxy,

$z = z(x,y) \geq 0$ – уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, где $z(x,y)$ – непрерывная в области D функция.

2. Площадь плоской фигуры D**.**

$$S_D = \iint\limits_D dx\,dy.$$

3. Масса плоской пластины D ***с переменной поверхностной плотностью*** $\mu(x,y)$, где $\mu(x,y)$ – непрерывная в области D функция.

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy.$$

4. Координаты центра тяжести плоской пластины.

$$x_c = \frac{1}{m}\cdot\iint\limits_D x\cdot\mu(x,y)\,dxdy,\quad y_c = \frac{1}{m}\cdot\iint\limits_D y\cdot\mu(x,y)\,dxdy,$$

где m – масса пластины, $\mu(x,y)$ – непрерывная поверхностная плотность.

5. Моменты инерции плоской пластины относительно осей координат Ox, Oy ***и начала координат соответственно.***

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \mu(x, y)\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \mu(x, y)\,dxdy,$$

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mu(x, y)\,dxdy.$$

6. Площадь поверхности.

Пусть поверхность S задана в ***явном виде*** уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, D – проекция поверхности S на плоскость $0xy$. Тогда площадь поверхности S вычисляется по формуле

$$S_{пов.} = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dx\,dy.$$

Пусть поверхность S задана в ***неявном виде*** уравнением $F(x, y, z) = 0$, где функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам. Тогда площадь поверхности S вычисляется по формуле

$$S_{пов.} = \iint\limits_D \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'|}\,dxdy.$$

Пример 12. Найдите объем тела, ограниченного плоскостями координат, плоскостями $x = 4$, $y = 4$ и эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$.

Решение. Проекцией тела на плоскость Oxy будет квадрат D (рис. 16).

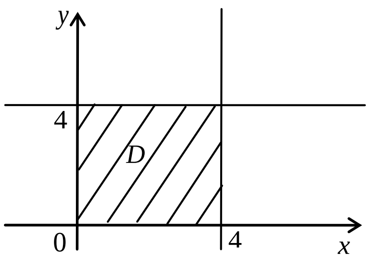


Рис. 16. Проекция на плоскость к примеру 12

Сверху тело ограничивает эллиптический параболоид $z = x^2 + y^2 + 1$. Объем найдем по формуле объема криволинейного цилиндра:

$$V = \iint\limits_D z(x, y)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^4 \left(x^2 + y^2 + 1\right)dy = \frac{560}{3}.$$

Ответ: $\frac{560}{3}$.

<u>Пример 13.</u> Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой требуется найти, на рис. 17.

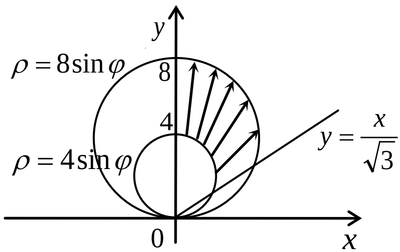


Рис. 17. Плоская фигура к примеру 13

Область D ограничена двумя окружностями $x^2 + y^2 = 4y$ и $x^2 + y^2 = 8y$. Вычислить интеграл будет удобнее, если перейти к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Уравнения указанных окружностей в полярных координатах имеют вид: $\rho = 4\sin\varphi$, $\rho = 8\sin\varphi$. Прямая $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ имеет угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и образует с осью Ox угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Перейдем в формуле площади плоской фигуры к полярным координатам и вычислим интеграл:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}\rho\,d\rho=24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi=4\pi+3\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\pi+3\sqrt{3}.$

__**Пример 14.**__ Пластина D задана ограничивающими её линиями: $x=\frac{1}{4}$, $y=0$, $y^2=16x$ $(y\geq 0)$. Поверхностная плотность в каждой точке пластины равна $\mu=16x+\frac{9y^2}{2}$. Найдите массу пластины.

Решение. Изобразим пластину D на рис. 18.

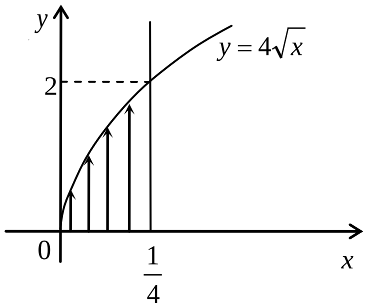


Рис. 18. Плоская пластина к примеру 14

Массу найдем по формуле массы плоской пластины с переменной поверхностной плотностью:

$$m=\iint\limits_D\left(16x+\frac{9y^2}{2}\right)dxdy=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}dx\int\limits_0^{4\sqrt{x}}\left(16x+\frac{9y^2}{2}\right)dy=2\,.$$

Ответ: 2.

__**Пример 15.**__ Найдите площадь части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=2a\,x,\ z\geq 0,\ a>0.$

Решение. Поверхность конуса задана неявно уравнением $x^2+y^2-z^2=0$.

Найдем частные производные $F'_x=2x,\ F'_y=2y,\ F'_z=-2z$ и вычислим корень $\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Проекцией D поверхности конуса на плоскость Oxy будет круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2a\,x$ (рис. 19).

По формуле площади поверхности запишем:

$$S_{пов}=\iint\limits_D \frac{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}{|\,F'_z\,|}dxdy=\iint\limits_D \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{|\,2z\,|}dxdy.$$

Переменную z выразим из уравнения конуса: $z=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$.

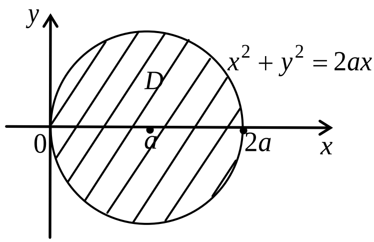


Рис. 19. Проекция поверхности конуса к примеру 15

Подставим найденное выражение вместо переменной z в интеграл:

$$S_{пов}=\iint\limits_D \frac{\sqrt{2x^2+2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\,S_D=\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

В этом примере использована формула вычисления площади плоской фигуры через двойной интеграл, а площадь круга S_D найдена по формуле πR^2.

Ответ: $\sqrt{2}\,\pi\, a^2$.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в некоторой замкнутой ограниченной области $V \subset R^3$ задана непрерывная функция $f\left(x, y, z\right)$. Выполним действия:

1) произвольно разобьем область V кусочно-гладкими поверхностями на n элементарных ячеек V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) в каждой элементарной ячейке V_i выберем произвольно точку $M_i\left(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i\right)$ и вычислим $f\left(M_i\right)$;

3) обозначим объем элементарной ячейки ΔV_i и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta V_i$;

4) обозначим через λ наибольший из диаметров ячеек V_i .

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta V_i$ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***тройным интегралом по области*** V ***от функции*** $f\left(x, y, z\right)$ и обозначается

$$\iiint\limits_V f\left(x, y, z\right)\, dV = \iiint\limits_V f\left(x, y, z\right)\, dx\, dy\, dz.$$

Функция $f\left(x, y, z\right)$ называется ***интегрируемой в области*** V .

Необходимым условием существования тройного интеграла является ограниченность функции $f\left(x, y, z\right)$ в области V, а достаточным условием – непрерывность $f\left(x, y, z\right)$ по совокупности переменных.

8. СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ – интегрируемые в области V функции. Тогда справедливы следующие свойства:

1) (*линейность*). Для любых действительных чисел α и β выполняется

$$\iiint\limits_V \left[\alpha \cdot f(x, y, z) + \beta \cdot g(x, y, z)\right] dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dxdydz.$$

2) (*аддитивность*). Пусть $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)\, dxdydz. 3$$

3) Если $f(x, y, z) \geq 0$, $\forall x, y, z \in V$, то $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \geq 0$.

4) Если $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, $\forall x, y, z \in V$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \geq \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dxdydz .$$

5) (*оценка модуля интеграла*).

$$\left|\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz\right| \leq \iiint\limits_V \left|f(x, y, z)\right| dxdydz.$$

6) (*оценка интеграла*). Если $m = \min\limits_V f(x, y, z)$,

$M = \max\limits_V f(x, y, z)$, то справедлива оценка:

$$m \cdot \mathbf{V}_V \leq \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \leq M \cdot \mathbf{V}_V,$$

где $\mathbf{V}_V$ – объем области V.

7) (*теорема о среднем*). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, то найдется такая точка $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in V$, что выполняется равенство

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \mathbf{V}_V .$$

Средним значением функции $f(x,y,z)$ ***в области*** V называется значение $f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\frac{1}{\mathbf{V}_V}\cdot\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов. Например, если область V задана неравенствами $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, $\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_b^a dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

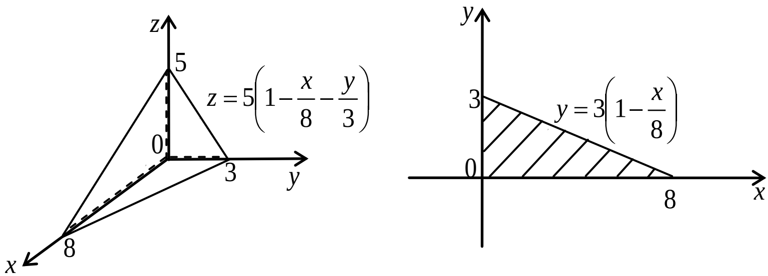
Таких повторных интегралов можно записать 6 штук. Если область V правильная в направлении всех осей, то все эти 6 повторных интегралов равны между собой и равны тройному интегралу.

Аналогично двойным повторным интегралам, ***пределы внешнего интеграла – всегда числа. Пределы внутреннего интеграла могут зависеть от внешней переменной. Пределы самого внутреннего интеграла могут зависеть от двух внешних переменных.***

<u>Пример 16.</u> Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6}$, где область V ограничена плоскостями $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$, $x=0, y=0, z=0$.

Решение. Область интегрирования V представляет собой пирамиду (рис. 20 *а*). Ее проекция на плоскость Oxy изображена на рис. 20 *б*.

Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле. Пределы изменения x и y найдем из рис. 20 *б* аналогично двойному интегралу: $0\le x\le 8$, $0\le y\le 3\left(1-\frac{x}{8}\right)$. Переменная z будет изменяться от плоскости $z=0$ до наклонной плоскости $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$ или $z=5\left(1-\frac{x}{8}-\frac{y}{3}\right)$ (см. рис. 20 *а*).



а *б*

Рис. 20. Область интегрирования к примеру 16

Запишем повторный интеграл:

$$I=\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6}=\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} dy\int\limits_0^{5\left(1-\frac{x}{8}-\frac{y}{3}\right)} \frac{dz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6}.$$

Аналогично двойным интегралам, вычисление начинается с самого внутреннего интеграла.

$$I=\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} dy\int\limits_0^{5\left(1-\frac{x}{8}-\frac{y}{3}\right)} \left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^{-6} 5\,d\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)=$$

$$=-\frac{5}{5}\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} \left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^{-5}\Bigg|_0^{5\left(1-\frac{x}{8}-\frac{y}{3}\right)} dy=$$

$$=-\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} \left[\frac{1}{32}-\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}\right)^{-5}\right]dy=$$

$$=-\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} \frac{1}{32}dy+\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} \left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}\right)^{-5} 3d\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}\right)=$$

$$= -\frac{1}{32}\int_0^8 3\left(1-\frac{x}{8}\right)dx - \frac{3}{4}\int_0^8 \left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}\right)^{-4}\Bigg|_0^{3\left(1-\frac{x}{8}\right)} dx = 1.$$

Ответ: 1.

10. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть задано некоторое преобразование координат в пространстве

$$\begin{cases} x = x(u,v,w); \\ y = y(u,v,w); \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$$

где $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ непрерывно-дифференцируемые функции. Если якобиан этого преобразования

$$\Im = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в каждой точке области V, то это преобразование взаимно-однозначно отображает область V в системе координат $0xyz$ в область Ω в системе координат $0uvw$, причем граничные точки переходят в граничные, а внутренние – во внутренние.

Аналогично двойному интегралу формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\Im\right| dudvdw.$$

Рассмотрим основные виды криволинейных координат в пространстве.

Цилиндрические координаты

В системе цилиндрических координат положение произвольной точки $M \subset R^3$ однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, z), где z – аппликата точки M, а (ρ, φ) – полярные координаты проекции точки M на плоскость Oxy (точки M_1). Цилиндрические координаты представлены на рис. 21.

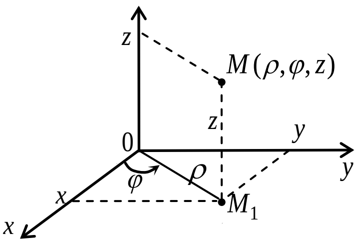


Рис. 21. Цилиндрические координаты точки M

Если полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox, то связь между декартовыми и ***цилиндрическими координатами*** точки M определяются соотношением:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан при таком отображении равен

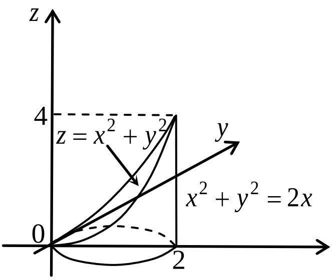
$$\Im = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, формула перехода к ***цилиндрическим координатам*** в тройном интеграле имеет вид:

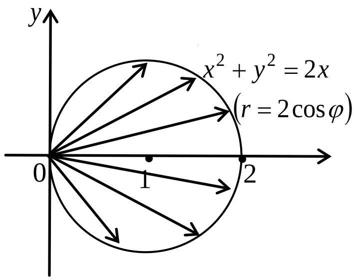
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\varphi d\rho dz.$$

Пример 17. Перейдите в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ к цилиндрическим координатам и расставьте пределы интегрирования, если область V ограничена цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=2x$, плоскостью $z=0$ и параболоидом $z=x^2+y^2$.

Решение. Область V представляет собой цилиндрическое тело и изображена на рис. 22 *а*. Проекция этого тела на плоскость $0xy$ показана на рис. 22 *б* и представляет собой круг с границей $x^2+y^2=2x$ (в цилиндрических координатах $r=2\cos\varphi$).



А



б

Рис. 22. Область интегрирования к примеру 17

Пределы интегрирования φ и ρ найдем по рисунку 22 *б* так же, как расставляли пределы в полярных координатах в двойном интеграле. Переменная z, как видно из рис. 22 *а*, изменяется от плоскости $z=0$ до параболоида $z=x^2+y^2$ (в цилиндрических координатах $z=\rho^2$).

Запишем повторный интеграл:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz.$$

Сферические координаты

В системе сферических координат положение произвольной точки $M\subset R^3$ однозначно определяется тройкой чисел (r,φ,θ), где r – расстояние от начала координат до точки M. Пусть M_1 – проекция точки

M на плоскость Oxy, тогда φ – угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM_1}$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox. Третья координата θ есть угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления оси Oz, $0 \le \theta \le \pi$ (рис. 23).

Декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через r, φ и θ следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \\ z = r\cos\theta\ . \end{cases}$$

Числа r, φ и θ называются ***сферическими координатами*** точки M, т.к. каноническое уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ имеет в этих координатах простой вид $r = R$.

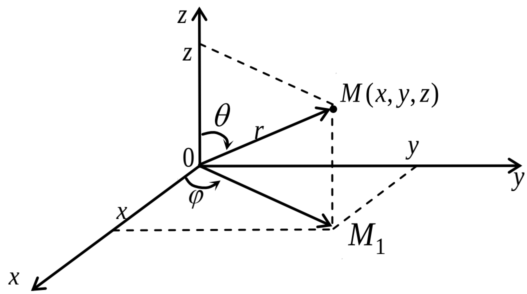


Рис. 23. Сферические координаты точки в пространстве

Якобиан такого преобразования

$$\Im = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\theta & x'_r \\ y'_\varphi & y'_\theta & y'_r \\ z'_\varphi & z'_\theta & z'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta.$$

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta.$$

<u>**Пример 18.**</u> Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz,$ где область V находится в первом октанте, ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ и координатными плоскостями.

Решение. Область интегрирования V представляет собой восьмую часть шара радиуса R с центром в начале координат, находящуюся в первом октанте (рис. 24).

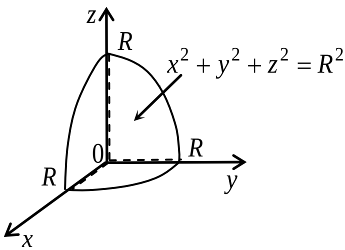


Рис. 24. Область интегрирования к примеру 18

Так как область интегрирования – часть шара, то удобней перейти к сферическим координатам. Пределы интегрирования переменной φ найдем из проекции области V на плоскость $Oxy.$ Проекция представляет собой четверть круга, находящуюся в первой четверти. Следовательно, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$ Пределы интегрирования переменных r и θ определим из пространственного рисунка 23: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$.

Запишем интеграл в сферических координатах:

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{R} \left(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \right.$$

$$\left. + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\, r^2\sin\theta dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{R} r^4\sin^3\theta dr = \frac{\pi R^5}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi R^5}{15}$.

11. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Масса неоднородного тела.

Если внутри тела $V \subset R^3$ распределена масса с непрерывной объемной плотностью $\mu(x, y, z)$, то масса тела V определяется формулой

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

2. Объем тела.

Если объемная плотность тела V постоянна и равна единице $\left(\mu(x, y, z) = 1\right)$, то масса будет численно равна объему этого тела:

$$\mathbf{V}_V = \iiint_V dxdydz.$$

3. Координаты центра тяжести.

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_V x \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{m}\iiint_V y \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_V z \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

где m – масса тела V, $\mu(x, y, z)$ – непрерывная плотность тела V.

4. Моменты инерции тела относительно осей координат Ox, Oy, Oz и начала координат соответственно.

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_O = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

Пример 19. Вычислите массу тела, ограниченного поверхностью конуса $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ и плоскостями $z=0,\ \ z=2,$ если плотность тела $\mu(x,y,z) = z.$

Решение. Тело, массу которого требуется найти, изображено на рис. 25 *а*. Проекцией этого тела на плоскость Oxy будет окружность с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 25 *б*). Уравнение конуса $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ в цилиндрических координатах имеет вид $(z-2)^2 = \rho^2$ или $z = 2-\rho$ с учетом условия $0 \le z \le 2$.

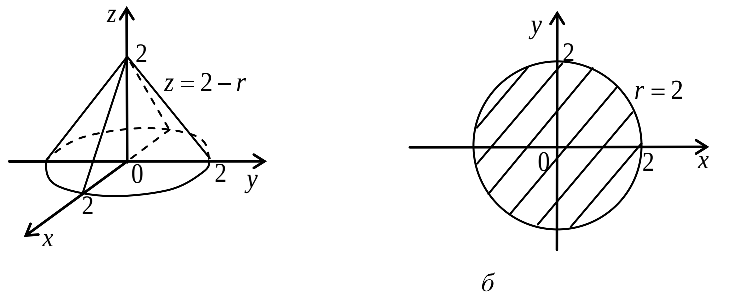


Рис. 25. Область интегрирования к примеру 19

Перейдем к цилиндрическим координатам и вычислим массу неоднородного конуса:

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V z\ dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{2-\rho} z\,dz = \frac{8\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{8\pi}{3}$.

Пример 20. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями (рис. 26): $z = x^2 + y^2,\ \ z = 2x^2 + 2y^2,\ \ y = x^2,\ \ y = x.$

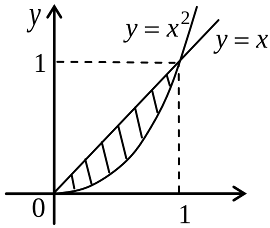


Рис. 26. Проекция тела на плоскость Oxy к примеру 20

Решение. Снизу и сверху тело ограниченно соответственно параболоидами $z = x^2 + y^2$ и $z = 2x^2 + 2y^2$. По бокам криволинейный цилиндр ограничен цилиндрическими поверхностями $y = x^2$, $y = x$ с образующими, параллельными оси Oz. Поэтому проекцией тела на плоскость Oxy будет фигура, изображенная на рис. 26. По формуле объема пространственного тела найдем:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \frac{3}{35}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{35}$.

<u>Пример 21.</u> Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $z = \dfrac{25}{4} - y^2$, $z = 0$.

Решение. Тело снизу ограничено плоскостью $z = 0$, а сверху – параболическим цилиндром $z = \dfrac{25}{4} - y^2$ с образующей, параллельной оси Ox.

По бокам криволинейный цилиндр ограничен круговой цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 + 2x = 0$ с образующей, параллельной оси Oz. Проекцией тела на плоскость Oxy будет круг, изображенный на рис. 27.

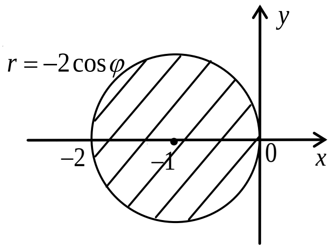


Рис. 27. Проекция тела на плоскость Oxy

Так как проекцией тела является круг, перейдем в формуле объема тела к цилиндрическим координатам. При замене $x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z$ уравнение параболического цилиндра $z=\dfrac{25}{4}-y^2$ примет вид $z=\dfrac{25}{4}-\rho^2\sin^2\varphi$, а уравнение кругового цилиндра $x^2+y^2+2x=0$ примет вид $\rho=-2\cos\varphi$.

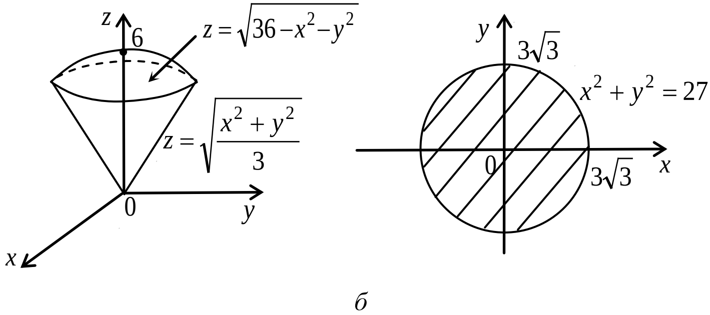
Вычислим объем:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz == \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{-2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\frac{25}{4}-\rho^2\sin^2\varphi} dz = 6\pi.$$

Ответ: 6π.

<u>Пример 22.</u> Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

Решение. Тело ограничено снизу конусом, а сверху – сферой (рис. 28 *а*). Проекцией этого тела на плоскость Oxy будет круг (рис. 28 *б*). Решим этот пример двумя способами, вычисляя тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.



а *б*

Рис. 28. Область интегрирования к примеру 22

1) Цилиндрические координаты $x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z$ **.**

Из рис. 27 *б* видно, что $0\le\varphi\le 2\pi,$ а переменная ρ изменяется от 0 до радиуса окружности. Эта окружность – результат пересечения конуса $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ (в цилиндрических координатах $z=\frac{\rho}{\sqrt{3}}$) и сферы $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$ (в цилиндрических координатах $z=\sqrt{36-\rho^2}$). Чтобы найти радиус этой окружности, приравняем правые части уравнений, определяющих конус и сферу:

$$\frac{\rho}{\sqrt{3}}=\sqrt{36-\rho^2},\quad \frac{\rho^2}{3}=36-\rho^2,$$

откуда находим радиус окружности $\rho=3\sqrt{3}.$ Тогда по формуле для объема тела получаем

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{3\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int\limits_{\rho/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-\rho^2}}dz=72\pi.$$

2) Сферические координаты.

$$x=r\cos\varphi\sin\theta;\quad y=r\sin\varphi\sin\theta;\quad z=r\cos\theta.$$

В сферических координатах только переменная φ изменяется на плоскости Oxy**:** $0\le\varphi\le 2\pi.$ Область изменения переменных θ и r найдем из пространственного рис. 28 *а*. Из него видно, что θ изменяется от 0 до угла, который образует образующая конуса с осью Oz. Чтобы найти этот угол, запишем уравнение конуса $\sqrt{3}\cdot z=\sqrt{x^2+y^2}$ в сферических координатах:

$$\sqrt{3}\cdot r\cos\theta=\sqrt{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta},$$

$$\sqrt{3}\cdot r\cos\theta=r\sin\theta,\ \ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{3},\ \ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}.$

Переменная r изменяется от 0 до сферы $x^2+y^2+z^2=36.$ Так как радиус этой сферы равен 6, то $0\le r\le 6.$ Вычислим объем:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int\limits_0^{6}r^2\sin\theta\,dr=72\pi.$$

Ответ: $72\pi.$

<u>Пример 23.</u> Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $12z=x^2+y^2$.

Решение. Тело ограничено снизу эллиптическим параболоидом, а сверху – сферой (рис. 29 *а*). Проекцией тела на плоскость Oxy является круг (рис. 29 *б*). Решим этот пример в цилиндрических координатах.

По рисунку 29 *б* определяем пределы изменения φ: $0\le\varphi\le 2\pi.$ Чтобы найти, как изменяется переменная $\rho,$ выясним радиус окружности пересечения сферы и параболоида:

$$\sqrt{64-x^2-y^2}=\frac{1}{12}\left(x^2+y^2\right),$$

или в цилиндрических координатах

$$\sqrt{64-\rho^2}=\frac{1}{12}\rho^2.$$

Решая последнее уравнение, находим $\rho=4\sqrt{3}.$

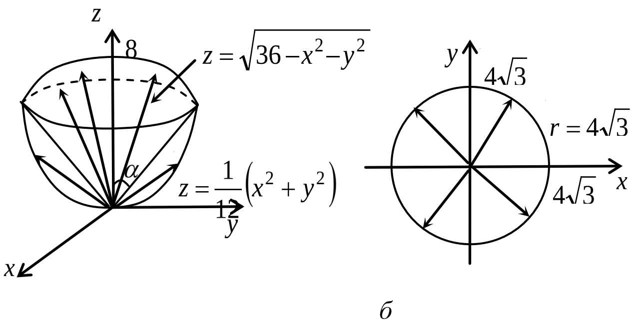


Рис. 29. Область интегрирования к примеру 23

По формуле объема тела вычислим объем:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_V \rho\, d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{12}}^{\sqrt{64-\rho^2}} dz=\frac{608\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{608\pi}{3}$.

<u>Пример 24.</u> Вычислите координаты центра тяжести неоднородного тела, занимающего область V между поверхностями $x=6\left(y^2+z^2\right)$, $y^2+z^2=3,\ \ x=0$, если плотность тела равна $\mu(x,y,z)=x^2$.

Решение. Тело V расположено в пространстве между цилиндром $y^2+z^2=3,$ круговым параболоидом $x=6\left(y^2+z^2\right)$ и плоскостью $x=0$ (рис. 30 *а*).

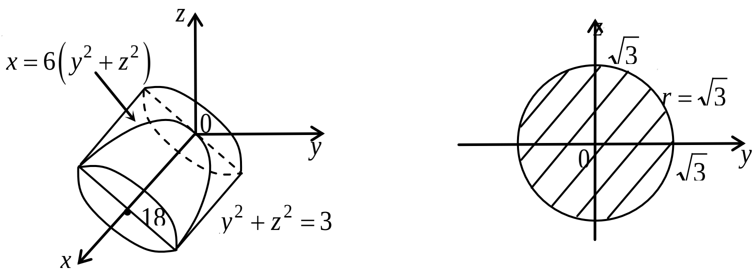


Рис. 30. Область интегрирования к примеру 24

Цилиндр $y^2+z^2=3$ и эллиптический параболоид $x=6\left(y^2+z^2\right)$ пересекаются при $x=18$ по окружности $y^2+z^2=3$, поэтому проекцией тела V на плоскость $x=0$ (координатная плоскость Ozy) является круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$ (рис. 30 *б*).

Сначала найдем массу неоднородного тела. Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам

$$\begin{cases} y=\rho\cos\varphi; \\ z=\rho\sin\varphi; \\ x=x; \end{cases} \qquad |\Im|=\rho.$$

Эти формулы аналогичны приведенным выше формулам цилиндрических координат, но полярная ось совпадает здесь с положительным направлением оси Oy, а правая тройка координатных осей (x,y,z) с помощью поворота заменена на правую тройку (y,z,x). Вычислим массу:

$$m=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V x^2\cdot\rho d\rho d\varphi dx=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_0^{6\rho^2}x^2\,dx=2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{3}}72\rho^7 d\rho=1458\pi.$$

Вычислим координаты центра тяжести неоднородного тела:

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\;\mu(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x^3\rho d\rho d\varphi dx=$$

$$=\frac{1}{1458\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_0^{6\rho^2}x^3dx=\frac{2\pi}{1458\pi}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{3}}324\rho^9 d\rho=\frac{54}{5};$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\;\mu(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho\cos\varphi\cdot x^2\rho\;d\rho d\varphi dx=$$

$$=\frac{1}{1458\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho^2 d\rho\int\limits_0^{6\rho^2}x^2dx=0;$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\,\mu(x,y,z)\,dxdydz = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho\sin\varphi \cdot x^2\rho\ d\rho d\varphi dx =$$

$$= \frac{1}{1458\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho^2 d\rho\int\limits_0^{6\rho^2} x^2 dx = 0.$$

Ответ: $\left(\frac{54}{5}, 0, 0\right)$.

12. ПОНЯТИЕ МНОГОКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

Для функции $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ аналогичным образом определяется *n*-кратный интеграл по области G *n*– мерного пространства:

$$\iint\limits_G ...\int f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_n\,.$$

Для *n*-кратных интегралов справедливы все свойства двойных и тройных интегралов, вычисление этих интегралов также сводится к последовательному интегрированию в повторных интегралах отдельно по каждой переменной.

Учебное издание

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

Составители:
Станислав Владимирович Бушков
Людмила Вадимовна Коломиец

Редактор И.И. Спиридонова
Доверстка И.И. Спиридонова

Подписано в печать 23.09.2015. Формат 60 х 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 3,25.
Тираж 200 экз. Заказ . Арт. – 45/2015.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет) (СГАУ)

443086 Самара, Московское шоссе, 34.
Изд-во СГАУ 443086 Самара, Московское шоссе, 34.