ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени С.П.КОРОЛЕВА»

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к выполнению дипломных проектов*

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 519.2(075)

Рецензент: канд. тех. наук, доц. каф. СГАУ Н.Л. А к с е н о в а

Кратные интегралы и их приложения: метод. указания к выполнению дипломных проектов / сост. *Н.Ю. Поникарова*. - Самара: Самар. госуд. аэрокосм. ун-т, 2008. – 44 с.

Содержат краткие теоретические сведения, задачи для проведения практических занятий, выполнения домашних заданий, варианты контрольной работы по кратным интегралам и их приложениям. Приведены примеры решения типовых задач.

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов второго курса Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 519.2(075)

СОДЕРЖАНИЕ

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Двойным интегралом от непрерывной функции двух переменных $f(x,y)$ по замкнутой ограниченной области D плоскости xOy называется предел двумерной интегральной суммы

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta S_i ,$$

где n - число разбиений области D на частичные области с площадями ΔS_i и диаметрами d_i, $C_i(x_i, y_i)$- произвольные точки частичных областей $(i = 1,2,3,...,n)$.

Двойной интеграл обладает всеми основными свойствами определенного интеграла.

Элемент площади в декартовых координатах равен $dS = dx\,dy$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах сводится к вычислению двукратного интеграла путем проектирования области D на одну из координатных осей Ox или Oy.

1) Спроектируем область D на ось Ox (рис.1).

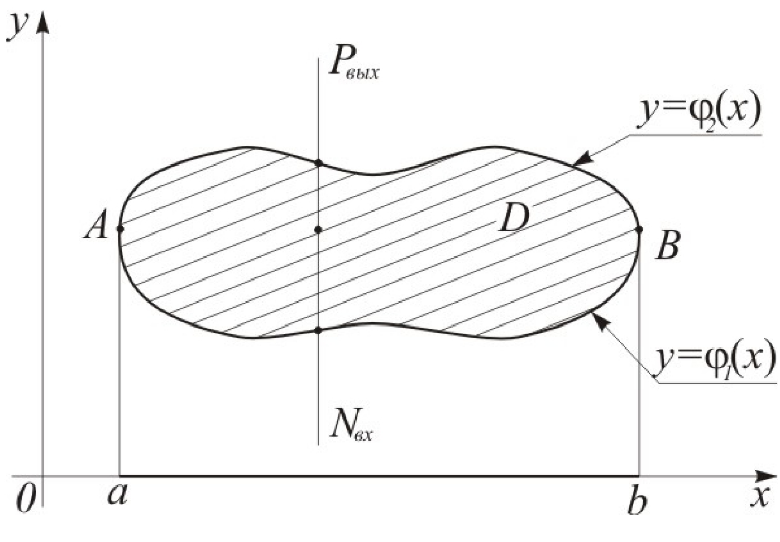

Рис.1

Пусть $np_{Ox} D = [a,b]$, где x - переменная интегрирования внешнего интеграла.

Пределы интегрирования внешнего интеграла всегда постоянны, т.е. $a \le x \le b$.

Через любую внутреннюю точку области D проведем прямую, параллельную оси Oy, где y - переменная интегрирования внутреннего интеграла. Пусть эта прямая пересекает границу области D в двух точках: N - точка входа прямой в область D, P - точка выхода из области D. Пусть дуга ANB задана уравнением $y = \varphi_1(x)$, а дуга APB - уравнением $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - непрерывные функции и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Такая область D называется правильной в направлении оси Oy.

Формула для вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

2) Аналогично вычисляется двойной интеграл проектированием области D на ось Oy (рис.2).

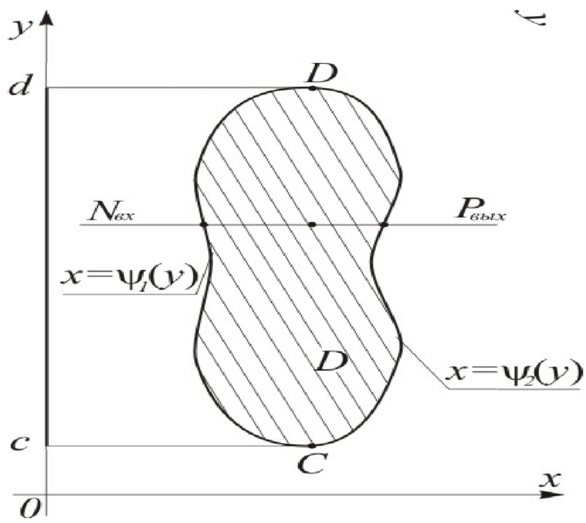

Рис.2

Пусть $np_{Oy} D = [c, d]$, где y – переменная интегрирования внешнего интеграла. Пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны, то есть $c \le x \le d$.

Через любую внутреннюю точку области D проведем прямую, параллельную оси Ox, где x – переменная интегрирования внутреннего интеграла. Пусть эта прямая пересекает границу области D в двух точках: N – точка входа прямой в область D, P – точка выхода прямой из области D. Тогда $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, где $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ - непрерывные функции на отрезке $[c, d]$. Такая область D называется правильной в направлении оси Ox.

Формула для вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx.$$

Двойной интеграл не зависит от порядка интегрирования. Этим обстоятельством пользуются при вычислении двойного интеграла, выбирая тот порядок интегрирования, который приводит к более простым вычислениям.

Если область интегрирования D не является правильной в направлениях осей Ox и Oy, то ее разбивают прямыми, параллельными координатным осям, на конечное число правильных областей, и тогда двойной интеграл по области D равен сумме двойных интегралов по ее частям.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D плоскости xOy и с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz (Рис.3), вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

2. Площадь гладкой однозначной поверхности $z = f(x, y)$, проекцией которой на плоскость xOy является область D (рис.3), равна:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

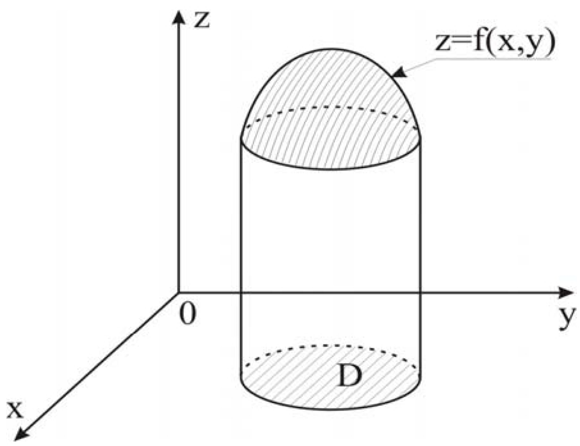

Рис.3

Пусть пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда через двойные интегралы выражаются следующие величины:

3. Площадь плоской области D

$$S = \iint_D dxdy.$$

4. Масса пластинки D

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\,dxdy.$$

5. Статические моменты пластинки D относительно осей координат Ox и Oy

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)\,dxdy,$$

$$M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)\,dxdy.$$

6. Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c)$ пластинки D

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

7. Моменты инерции пластинки D относительно осей координат Ox и Oy и начала координат O

$$I_x = \iint_D y^2\,\gamma(x, y)\,dxdy,$$

$$I_y = \iint_D x^2\,\gamma(x, y)\,dxdy,$$

$$I_o = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\,\gamma(x, y)\,dxdy.$$

Для однородных пластинок поверхностная плотность постоянна $\gamma = const$, и в этом случае для простоты будем считать, что $\gamma = 1$.

1. Двойной интеграл $\iint_D xy\,dxdy$ записать в виде двукратного интеграла, расставить пределы интегрирования двумя способами, проектируя область интегрирования D на оси Ox и Oy, и вычислить интеграл, если область D ограничена прямой $y = x - 2$ и параболой $y^2 = x$.

Решение. Решая совместно уравнения прямой $y = x - 2$ и параболы $y^2 = x$, найдем точки их пересечения $A(1,-1)$ и $B(4,2)$. Построим в плоскости xOy область D (рис.4).

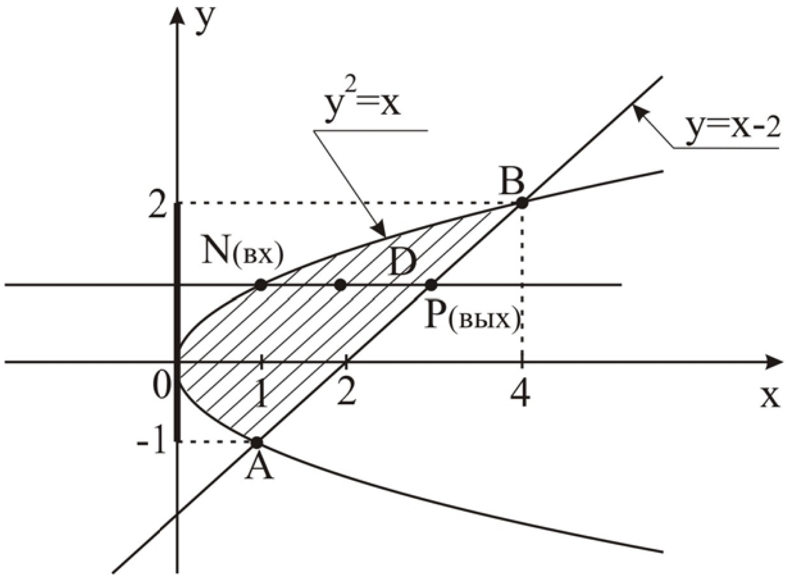

Рис.4

1 способ

Область D является правильной в направлении оси Ox (x – переменная интегрирования внутреннего интеграла). Спроектируем область D на ось Oy (y – переменная интегрирования внешнего интеграла). Из рисунка видно, что $np_{Oy} D = [-1, 2]$.

Отсюда получаем пределы интегрирования внешнего интеграла $-1 \le y \le 2$.

Найдем пределы интегрирования внутреннего интеграла. Возьмем любую внутреннюю точку области D и проведем через нее прямую, параллельную оси Ox. Она пересекает границу области D в двух точках N и P. Дуга ANB задана уравнением $y^2 = x$, линия APB – уравнением $y = x - 2$. Разрешив эти уравнения относительно x $(x = y^2,\ x = y + 2)$, получим пределы интегрирования внутреннего интеграла $y^2 \le x \le y + 2$.

Таким образом

$$\iint\limits_D x\,y\,dxdy = \int\limits_{-1}^{2} ydy \int\limits_{y^2}^{y+2} xdx = \int\limits_{-1}^{2} ydy \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{y+2} = \int\limits_{-1}^{2} y \left[\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right] dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(-\frac{y^5}{2} + \frac{y^3}{2} + 2y^2 + 2y\right) dy = \left(-\frac{y^6}{12} + \frac{y^4}{8} + \frac{2y^3}{3} + y^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{45}{8}.$$

2 способ

Изменим порядок интегрирования. Внешний интеграл возьмем по переменной интегрирования x, а внутренний интеграл – по переменной y. Область D не является правильной в направлении оси Oy. Поэтому область D следует разбить на две области D_1 и D_2 так, чтобы каждый из участков линий, ограничивающих эти области, определялся одним уравнением (рис.5).

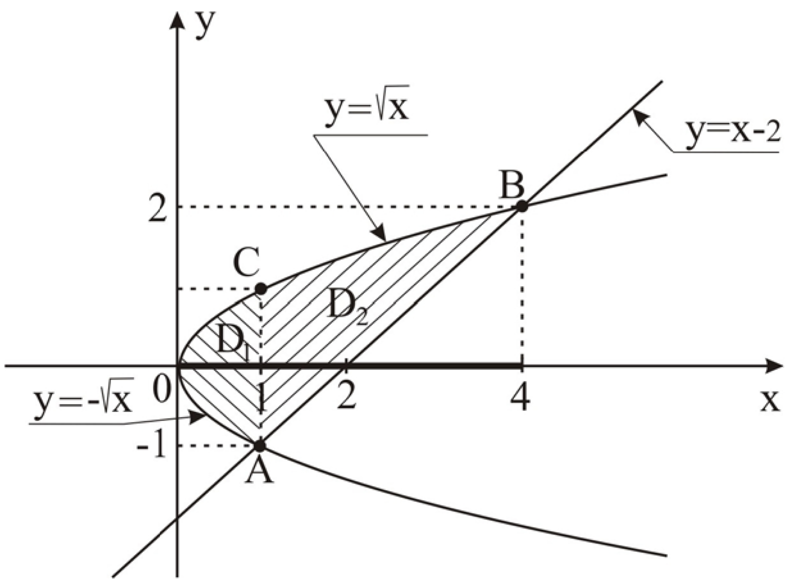

Рис.5

Применяя свойство аддитивности двойного интеграла, получим

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_{D_1} xy\,dxdy + \iint\limits_{D_2} xy\,dxdy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy + \int\limits_1^4 x\,dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x\,dx \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} + \int\limits_1^4 x\,dx \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_{x-2}^{\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 x\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)dx + \int\limits_1^4 x\left[\frac{x}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left.\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_1^4 = \frac{45}{8}.$$

Очевидно, что первый способ вычисления двойного интеграла в данном примере рациональнее второго.

2. Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ записать в виде двукратного интеграла и расставить пределы интегрирования двумя способами, проектируя область интегрирования на оси Ox и Oy, если область D ограничена линиями:

1) $x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 2$;

2) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$;

3) $x^2 + y^2 = 9$;

4) $y = 0, \quad y = x, \quad x + y = 3$;

5) $y = 2x, \quad x = 2y, \quad xy = 2 \quad (y > 0)$.

Ответ:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx$;

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$;

3) $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$;

4) $$\int_0^{\frac{3}{2}} dx \int_0^{x} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{3}{2}}^{3} dx \int_0^{3-x} f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_y^{3-y} f(x,y)\,dx;$$

5) $$\int_0^{1} dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_1^{2} dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy = \int_0^{1} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_1^{2} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x,y)\,dx.$$

3. Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

1) $$\int_0^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx;$$

2) $$\int_0^{1} dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^{3} dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy;$$

3) $$\int_{-3}^{0} dx \int_{-x}^{3} f(x,y)\,dy + \int_0^{3} dx \int_x^{3} f(x,y)\,dy;$$

4) $$\int_1^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Ответ:

1) $$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^{1} dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy;$$

2) $$\int_0^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx;$$

3) $$\int_0^{3} dy \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx;$$

4) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f(x,y)dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 6 - x^2, \quad y = -x$;

2) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = -2, \quad y = x + 2, \quad y = 2, \quad y^2 = x$;

4) $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0$;

5) $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{2x}, \quad x = 9$;

6) $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1$;

7) $y = x^2, \quad y = \frac{3 - x}{2}, \quad y = 0$.

Ответ: 1) $S = \frac{125}{6}$; 2) $S = \sqrt{2} - 1$; 3) $S = \frac{40}{3}$; 4) $S = \frac{15}{2} - 8\ln 2$;

5) $S = 26 - \frac{3}{2}\ln 9$; 6) $S = \frac{(e-1)^2}{2}$; 7) $S = \frac{4}{3}$.

5. Найти массу пластинки D, заданную ограничивающими ее линиями, если $\gamma = \gamma(x,y)$ - поверхностная плотность в любой точке пластинки.

1) D: $x = 1, \quad y = 0, \quad y^2 = 4x \quad (y \ge 0)$; $\gamma(x,y) = 7x^2 + y$;

2) D: $x = 2, \quad y = 0, \quad y^2 = \frac{x}{2} \quad (y \ge 0)$; $\gamma(x,y) = \frac{7}{2}x^2 + 8y$;

3) D: $x = 2, \quad y = x, \quad xy = 1$; $\gamma(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$;

4) D: $x = 1, \quad y = x^2, \quad y = -\sqrt{x}$; $\gamma(x,y) = 12x^2y^2 + 16x^3y^3$;

5) D: $x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x \quad (y \ge 0)$; $\gamma(x,y) = 16x + \frac{9y^2}{2}$.

Ответ: 1) $m = 5$; 2) $m = 12$; 3) $m = \frac{9}{4}$; 4) $m = 1$; 5) $m = 2$.

6. Найти массу прямоугольника со сторонами a и b, если поверхностная плотность в каждой точке прямоугольника пропорциональна квадрату ее расстояния до вершины прямоугольника, находящейся в начале координат.

Ответ: $m = \dfrac{kab(a^2 + b^2)}{3}$.

7. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния до точки пересечения диагоналей и равна единице на углах квадрата.

Ответ: $m = \dfrac{4a^2}{3}$.

8. Найти статический момент относительно оси Oy однородной $(\gamma = 1)$ области, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x = 4$.

Ответ: $M_y = \dfrac{141}{5}$.

9. Найти статический момент относительно оси Ox однородной $(\gamma = 1)$ области, ограниченной линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$.

Ответ: $M_x = \dfrac{36}{5}$.

10. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной двумя параболами $y^2 = x$ и $x^2 = y$.

Ответ: $x_c = \dfrac{9}{20}$; $y_c = \dfrac{9}{20}$.

11. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной прямыми $x + y = 2$, $x - y = 2$, $x = 0$.

Ответ: $x_c = \dfrac{2}{3}$, $y_c = 0$.

12. Найти момент инерции относительно начала координат однородной $(\gamma = 1)$ пластинки, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ $(a > 0, b > 0)$.

Ответ: $I_o = \dfrac{4}{9}$.

13. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородной $(\gamma = 1)$ фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

Ответ: $I_x = \dfrac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

14. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y + z = 2$ и параболическим цилиндром $y = x^2$.

Ответ: $V = \dfrac{32\sqrt{2}}{15}$.

15. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Ответ: $V = \dfrac{8}{3}$.

16. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z = 2$, вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: $\sigma = 4\sqrt{3}$.

17. Вычислить площадь части плоскости $x + 2y + z = 4$, которая заключена в первом октанте.

Ответ: $\sigma = 4\sqrt{6}$.

18. Найти площадь части плоскости $x + y + z = 2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\sigma = \pi\sqrt{3}$.

3. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Формулы перехода от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (ρ, φ) при условии, если полюс совпадает с началом координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox (рис.6), имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

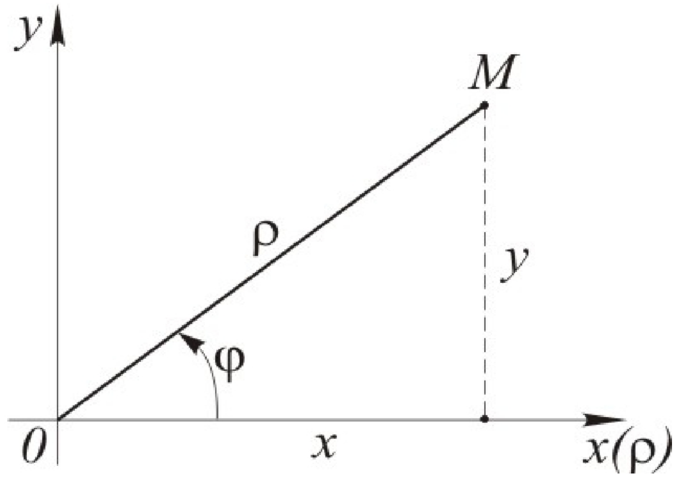

Рис.6

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Элемент площади в полярных координатах равен $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Переход от декартовых координат к полярным координатам в двойном интеграле осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Пусть область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, φ - переменная интегрирования внешнего интеграла.

Через любую внутреннюю точку области интегрирования D проведем полярный луч. Пусть он пересекает границу области D в двух точках: N – точка входа в область D, P – точка выхода из области D (рис.7).

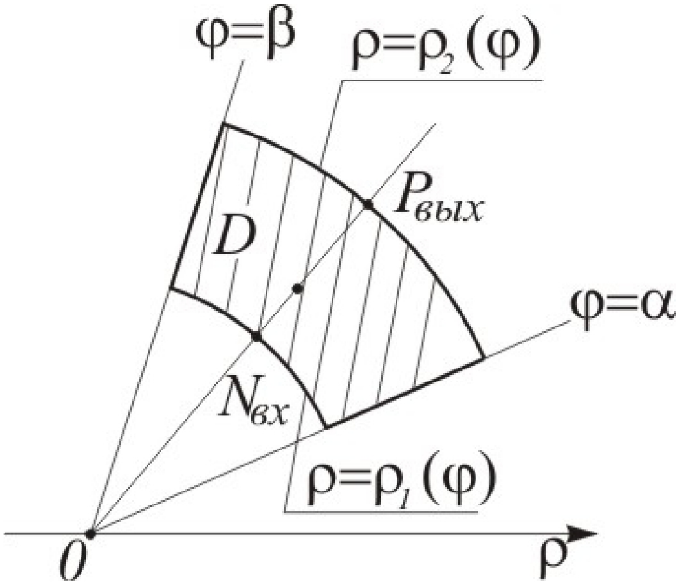

Рис.7

Дуга, которой принадлежит точка N, задана уравнением $\rho = \rho_1(\varphi)$, а дуга, которой принадлежит точка P, задана уравнением $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ - непрерывные функции и $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, где ρ - переменная интегрирования внутреннего интеграла.

Формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах имеет вид:

$$\iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

При решении задач в двойном интеграле рационально переходить от декартовых координат к полярным координатам, если область D представляет собой круг или сектор круга.

19. Найти статический момент относительно оси Ox однородной области D, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$ и осью Ox $\left(y \ge 0,\ \ a > 0\right)$.

Решение. Найдем центр и радиус окружности, выделив полный квадрат в уравнении окружности $x^2+y^2-2ax=0$,

$$\left(x^2-2ax\right)+y^2=0,$$

$$\left(x^2-2ax+a^2\right)-a^2+y^2=0,$$

$$(x-a)^2+y^2=a^2.$$

Следовательно, $C(a,0)$ - центр окружности, $R=a$ - радиус данной окружности.

Построим область D (рис.8).

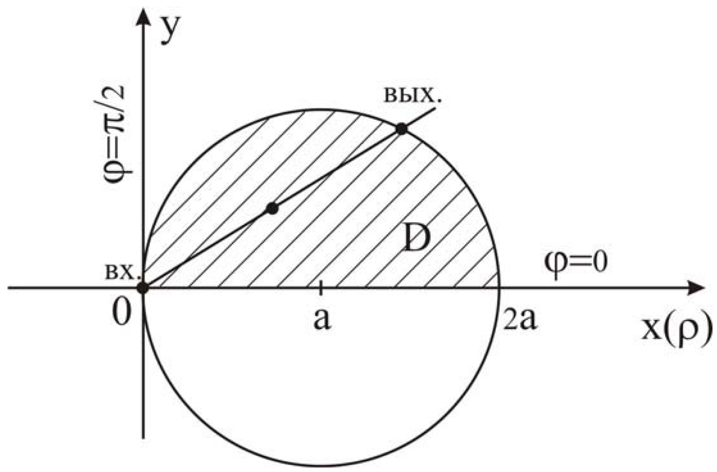

Рис.8

Статический момент области D относительно оси Ox находится по формуле

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)\,dxdy,$$

где $\gamma(x,y)=1$ для однородной области.

Так как область D представляет собой полукруг, то в двойном интеграле удобно перейти от декартовых координат к полярным координатам:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$$

$$dS=\rho\, d\rho d\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ в полярных координатах имеет вид $\rho=2a\cos\varphi$.

Так как область D находится в первой четверти, то $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Возьмем любую внутреннюю точку области D и соединим ее лучом с полюсом. Точка входа луча в область D находится в полюсе O $(\rho=0)$, а точка выхода луча из области D находится на окружности $(\rho=2a\cos\varphi)$. Отсюда $0\le\rho\le2a\cos\varphi$.

$$M_x=\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^2d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2a\cos\varphi}=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d(\cos\varphi)=$$

$$=-\frac{8a^3}{3}\cdot\left.\frac{\cos^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2a^3}{3}\left(\cos^4\frac{\pi}{2}-\cos^4 0\right)=\frac{2a^3}{3}.$$

Ответ: $M_x=\frac{2a^3}{3}$.

20. Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами:

1) $x^2+y^2\le R^2$;

2) $x^2+y^2\le ay$ $(a>0)$;

3) $x^2+y^2\ge4x$, $x^2+y^2\le6x$, $y\le0$, $y\ge-x$.

Ответ:

1) $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\rho$;

2) $\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\rho$;

3) $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) d\rho.$$

21. Найти площадь плоской фигуры, заданной неравенствами:

1) $x^2 + y^2 \geq 4x, \quad x^2 + y^2 \leq 8x, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$;

2) $x^2 + y^2 \geq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 4y, \quad x \geq 0, \quad y \geq x$;

3) $x^2 + y^2 \leq 6x, \quad y \geq -x, \quad y \leq \sqrt{3}x$;

4) $x^2 + y^2 - 2y \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 4y \leq 0, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x \geq 0$.

Ответ: 1) $S = 2\pi + 3\sqrt{3}$; 2) $S = 2 + \frac{\pi}{2}$; 3) $S = \frac{21\pi + 18 + 9\sqrt{3}}{4}$; 4) $S = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

22. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, $\gamma = \gamma\left(x, y\right)$ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1) D: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(x \leq 0, y \geq 0\right)$; $\gamma\left(x, y\right) = \frac{y - 2x}{x^2 + y^2}$;

2) D: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(x \geq 0, y \leq 0\right)$; $\gamma\left(x, y\right) = \frac{3x - y}{x^2 + y^2}$;

3) D: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(x \geq 0, y \geq 0\right)$; $\gamma\left(x, y\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

Ответ: 1) $m = \frac{15}{2}$; 2) $m = 6$; 3) $m = 12$.

23. Найти массу круглой пластинки D : $x^2 + y^2 \leq a^2$, если плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки и равна единице в точках окружности.

Ответ: $m = \frac{\pi a^2}{2}$.

24. Найти массу плоского кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны R и r $\left(R > r\right)$, если плотность материала в каждой точке кольца обратно пропорциональна ее расстоянию от центра окружностей и равна единице на окружности радиуса r.

Ответ: $m = 2\pi r(R - r)$.

25. Найти массу однородной $(\gamma = 1)$ пластинки, ограниченной кривыми: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $\rho = a\sin\varphi$ $(a > 0)$.

Ответ: $m = \dfrac{5\pi a^2}{4}$.

26. Найти статический момент относительно оси Oy однородного полукруга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = y$ и прямой $x = 0$ $(x \ge 0)$.

Ответ: $M_y = \dfrac{1}{12}$.

27. Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$.

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{4R}{3\pi}$.

28. Найти момент инерции относительно начала координат однородного круга $x^2 + y^2 \le 2x$.

Ответ: $I_o = \dfrac{3\pi}{2}$.

29. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$;

2) $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 2a$, $z = 0$.

Ответ: 1) $V = 3\pi$; 2) $V = 2\pi a^3$.

4. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Тройным интегралом от непрерывной функции трех переменных $f(x,y,z)$ по замкнутой ограниченной пространственной области V называется предел трехмерной интегральной суммы

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i\,,$$

где n – число разбиений области V на частичные области с объемами ΔV_i и диаметрами d_i, $C_i(x_i,y_i,z_i)$ - произвольные точки частичных областей, $f(x_i,y_i,z_i)$ - значения функции в точках $C_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3,\ldots,n$.

Тройной интеграл обладает всеми основными свойствами определенного интеграла. Элемент объема в декартовых координатах равен $dV = dx\,dy\,dz$.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к вычислению трехкратного интеграла путем проектирования области V на одну из координатных плоскостей.

Спроектируем область V на координатную плоскость xOy (рис.9). Пусть $np_{xOy}V = D$.

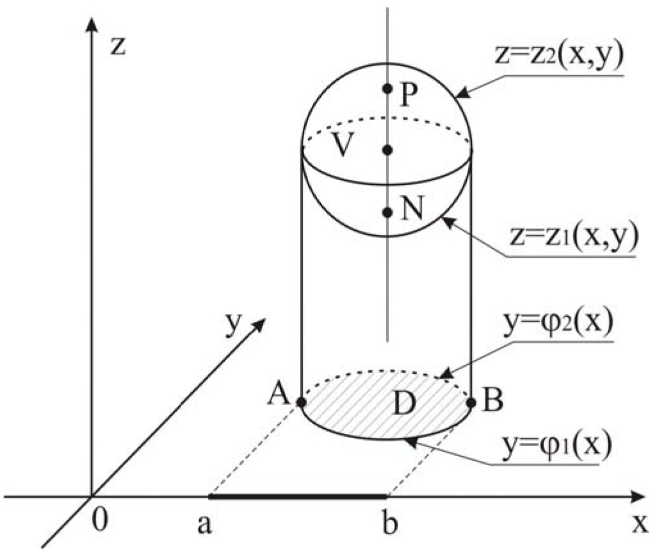

Рис.9

Через любую внутреннюю точку области V проведем прямую, параллельную оси Oz (z – переменная интегрирования внутреннего интеграла). Пусть эта прямая пересекает границу области V в двух точках: N – точка входа прямой в область V, P – точка выхода прямой из области V. Пусть поверхность, на которой лежит точка N, задана уравнением $z = z_1(x, y)$, а поверхность, на которой лежит точка P, задана уравнением $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$ в области V. Тогда $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$.

Тройной интеграл по такой области V вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz .$$

Записывая двойной интеграл по области D через двукратный интеграл, получим

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz .$$

Аналогично вычисляется тройной интеграл проектированием области V на координатные плоскости yOz и xOz.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Объем пространственной области V равен:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2) Масса тела с объемной плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, занимающего область V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dxdydz.$$

3) Статические моменты тела V относительно координатных плоскостей:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz.$$

4) Координаты центра тяжести тела V:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5) Моменты инерции тела V относительно координатных плоскостей, координатных осей, начала координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_o = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\gamma(x, y, z)\,dxdydz.$$

Аналогично записываются формулы для вычисления I_{xz}, I_{yz}, I_y, I_z. Если тело однородное, то в приведенных выше формулах следует положить $\gamma(x, y, z) = \gamma = const$.

30. Найти массу тела V, ограниченного плоскостями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, если плотность в каждой точке $M(x,y,z)$ тела равна абсциссе этой точки.

Решение: Уравнение $x+y+z=2$ - есть уравнение плоскости общего положения, отсекающей на координатных осях отрезки, равные 2; $x=0$, $y=0$, $z=0$ - уравнения координатных плоскостей yOz, xOz, xOy; $x=1$ - уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости yOz и отсекающей на оси Ox отрезок, равный единице. Тело V, массу которого следует найти, является призмой (рис.10).

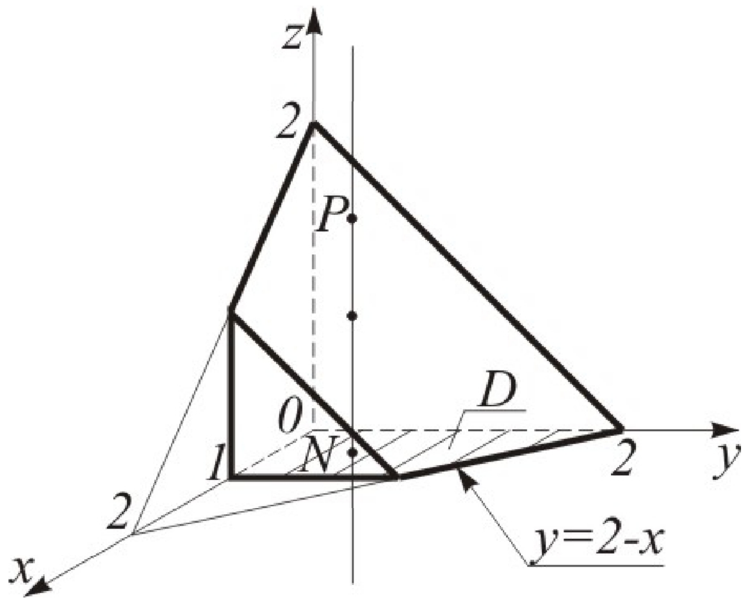

Рис.10

Применяя формулу для вычисления массы тела

$$m=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz$$

и учитывая, что плотность $\gamma(x,y,z)=x$, имеем $m=\iiint\limits_V x\,dxdydz$.

Определим пределы интегрирования по каждой из переменных x, y, z. Спроектируем тело V нам координатную плоскость xOy. Проекцией тела V на плоскость xOy является трапеция D, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $x+y=2$. Отсюда следует, что область D определяется неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2-x$.

Возьмем любую внутреннюю точку области V и проведем через нее прямую, параллельную оси Oz. Она пересекает границу области V в двух точках N и P. Точка входа N принадлежит плоскости xOy, уравнение которой $z=0$, а плоскость, в которой лежит точка выхода P, задается уравнением $z=2-x-y$. Отсюда пределы интегрирования внутреннего интеграла $0 \le z \le 2-x-y$.

Тогда получим

$$m = \iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{2-x} dy \cdot z\Big|_0^{2-x-y} =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{2-x} (2-x-y)\,dy = -\int_0^1 x\,dx \int_0^{2-x} (2-x-y)\,d(2-x-y) =$$

$$= -\int_0^1 x\,dx \cdot \frac{(2-x-y)^2}{2}\Bigg|_0^{2-x} = -\int_0^1 x\left[\frac{(2-x-2+x)^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{24}.$$

31. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

1) $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=1,\quad x+y+z=2$;

2) $x+y+2z=2,\quad y=x^2,\quad y=x,\quad z=0$;

3) $x^2=y,\quad x^2=4-3y,\quad z=0,\quad z=3$;

4) $x+y+z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=1,\quad y=1$;

5) $y=x^2,\quad y+z=1,\quad z=0$.

Ответ: 1) $V=\frac{7}{6}$; 2) $V=\frac{11}{120}$; 3) $V=\frac{16}{3}$; 4) $V=1$; 5) $V=\frac{8}{15}$.

32. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$ и параболическим цилиндром $x^2=y$, если плотность тела в каждой точке равна ее ординате.

Ответ: $m=\frac{8}{35}$.

33. Найти массу призмы, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=b$, $x+z=a$ $(a>0,\ b>0)$, если:

1) плотность $\gamma(x,y,z)=x+z$;
2) плотность тела в каждой точке пропорциональна ее расстоянию до плоскости yOz.

Ответ: 1) $m=\frac{a^3b}{3}$; 2) $m=\frac{ka^3b}{6}$.

34. Найти статический момент относительно плоскости yOz однородного $(\gamma=1)$ тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $2x+y=2$.

Ответ: $M_{yz}=1$.

35. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостями :

1) $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=3$, $2x+y=2$;
2) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=2$.

Ответ: 1) $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},2\right)$; 2) $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

36. Найти момент инерции относительно плоскости xOz однородной $(\gamma=1)$ пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Ответ: $I_{xz}=\frac{1}{60}$.

37. Найти момент инерции относительно оси Oz неоднородного тела, ограниченного поверхностями $y=1$, $z^2=6x$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(z \geq 0)$, если плотность в каждой точке тела пропорциональна ее расстоянию до плоскости xOy.

Ответ: $I_z = 14k$.

6. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Формулы перехода от декартовых координат (x, y, z) к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z) имеют вид (рис.11):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

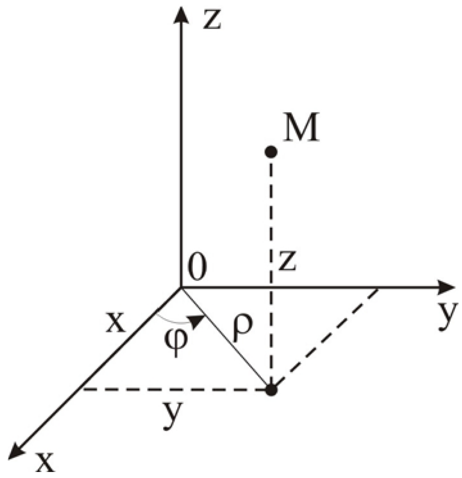

Рис.11

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Элемент объема в цилиндрических координатах равен $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Переход от декартовых координат к цилиндрическим координатам в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi dz .$$

При решении задач в тройном интеграле рационально переходить от декартовых координат к цилиндрическим координатам, когда плоская область $D = np_{xOy}V$ есть круг или сектор круга.

38. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела V, ограниченного плоскостью $z = 2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$.

Решение. Область V (рис.12) ограничена снизу поверхностью параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, а сверху – плоскостью $z = 2$. Параболоид и плоскость пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$

Область V проектируется на плоскость xOy в область D, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

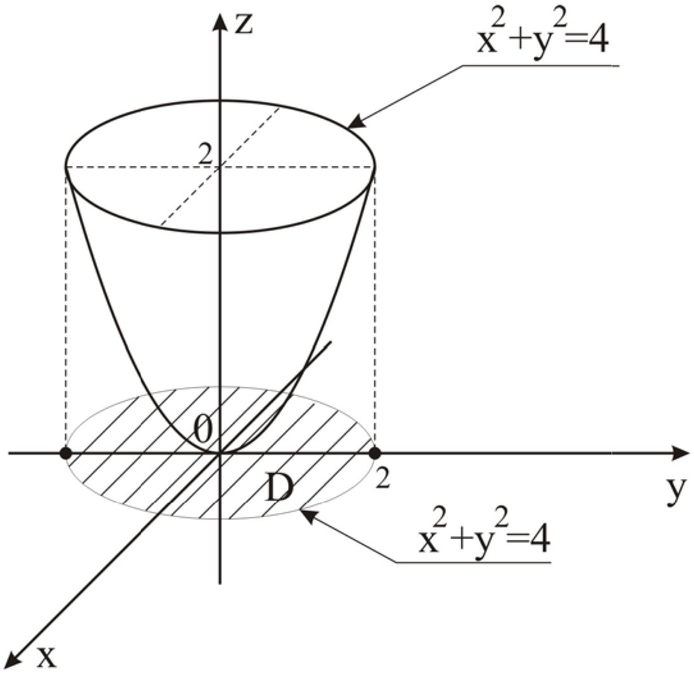

Рис.12

Момент инерции тела V относительно оси Oz находим по формуле:

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz,$$

где $\gamma(x, y, z) = 1$ для однородного тела.

Так как областью D является круг, то в тройном интеграле удобно перейти от декартовых координат к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ в цилиндрических координатах имеет вид $\rho = 2$, а уравнение параболоида $z = \dfrac{\rho^2}{2}$. Тогда область V определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$, $\dfrac{\rho^2}{2} \le z \le 2$.

Итак, $$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iiint\limits_V \rho^3 d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \cdot z \Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \cdot \left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

39. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = z$;

2) $z = 1$, $x^2 + y^2 = 5 - z$;

3) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 6 - z$, $(z > 0)$;

4) $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Ответ: 1) $V = \dfrac{\pi a^4}{2}$; 2) $V = 8\pi$; 3) $V = \dfrac{32\pi}{2}$; 4) $V = \dfrac{32}{9}$.

40. Найти массу тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$, если плотность в каждой точке тела равна аппликате этой точки.

Ответ: $m = \dfrac{\pi}{12}$.

41. Найти массу тела, ограниченного конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$ и плоскостью $z = h$ $\left(h > 0\right)$, если плотность в каждой точке тела равна аппликате этой точки.

Ответ: $m = \frac{\pi h^2 R^2}{4}$.

42. Найти статический момент относительно плоскости yOz однородного тела, ограниченного круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $x + y + z = 2$.

Ответ: $M_{yz} = -\frac{\pi}{4}$.

43. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = z$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$.

Ответ: $x_c = \frac{2}{5}$, $y_c = \frac{2}{5}$, $z_c = \frac{7}{30}$.

44. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$.

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $x_c = 1$.

45. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z = 2$.

Ответ: $I_z = \frac{16\pi}{3}$.

46. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 2$ и плоскостями $x + y + z = 2$, $z = 0$.

Ответ: $I_z = 4\pi$.

47. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $x = h$ $\left(h > 0\right)$.

Ответ: $I_{xz} = I_{yz} = \frac{\pi h^5}{20}$, $I_{xy} = \frac{\pi h^5}{5}$.

48. Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

Ответ: $I_o = \frac{224\pi}{3}$.

7. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Формулы перехода от декартовых координат (x, y, x) к сферическим координатам (r, φ, θ) (рис.13) имеют вид: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

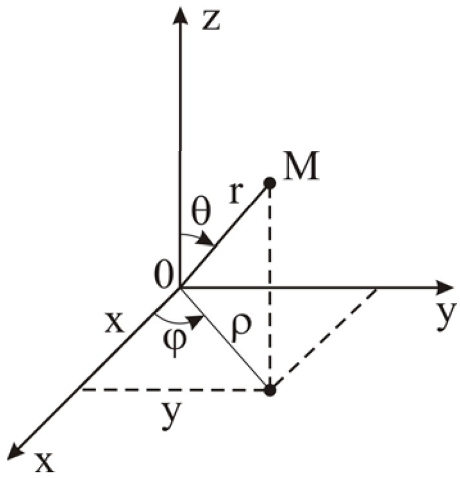

Рис.13

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Элемент объема в сферических координатах равен $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$.

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим координатам осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

При решении задач в тройном интеграле рационально переходить от декартовых координат к сферическим координатам, когда пространственная область V есть шар или сектор шара.

49. Найти центр тяжести шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию до начала координат.

Решение. Область V (рис.14) ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ или $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$.

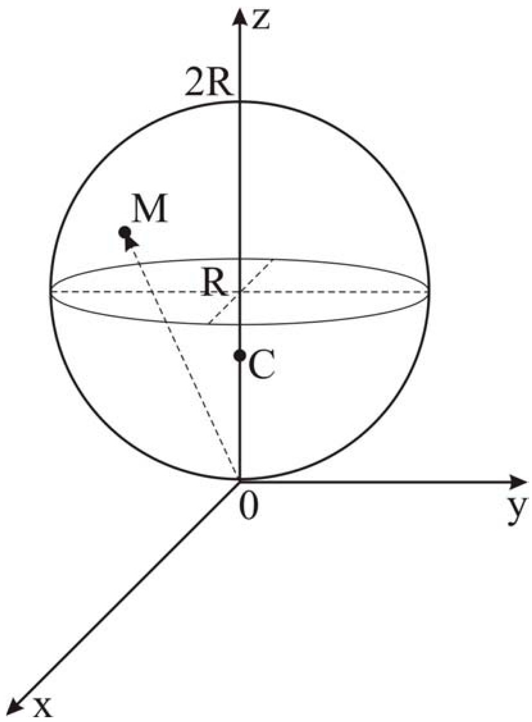

Рис.14

В силу симметрии тела V относительно координатных плоскостей xOz и yOz имеем $x_c = 0$, $y_c = 0$.

Найдем z_c по формуле $z_c = \frac{M_{xy}}{m}$, где масса тела $m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz$, статический момент относительно координатной плоскости xOy тела $M_{xy} = \iiint\limits_V z\,\gamma(x, y, z)dxdydz$.

Возьмем любую точку $M(x, y, z)$ тела V. Тогда вектор $\overline{OM} = (x, y, z)$, а расстояние от начала координат до точки M равно $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Следовательно, плотность тела равна $\gamma(x, y, z) = \frac{k}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Так как областью V является шар, то в тройном интеграле рационально перейти от декартовых координат к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в сферических координатах примет вид $r = 2R\cos\theta$. Тогда область V определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 2R\cos\theta$. Итак,

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = k\iiint\limits_V \frac{r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}{r} = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} r dr =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2R\cos\theta} = 2kR^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -2kR^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d(\cos\theta) =$$

$$= -2kR^2 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2kR^2 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\cos^3 0}{3} \right) = \frac{4k\pi R^2}{3}.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V \frac{k\, z\, dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint\limits_V \frac{k\; r^3 \cos\theta\, \sin\theta\, dr d\varphi d\theta}{r} =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} r^2 dr = \frac{8kR^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, \sin\theta d\theta =$$

$$= -\frac{8kR^3}{3} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16k\pi R^3}{15}.$$

Таким образом, $z_c = \frac{16k\pi R^3}{15} \cdot \frac{3}{4k\pi R^2} = \frac{4R}{5}$.

Ответ: $x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{4R}{5}$.

50. Найти объем тела, заданного неравенствами:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \ge a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le b^2 \quad (0 < a < b), \quad x^2 + y^2 \le z^2$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad x^2 + y^2 \le z^2$;

3) $x^2+y^2+z^2\le R^2, \quad x\le y\le\sqrt{3}x;$

4) $x^2+y^2+z^2-2z\le 0, \quad x^2+y^2\le z^2.$

Ответ: 1) $V=\dfrac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)}{3}$; 2) $V=\dfrac{8\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}$; 3) $V=\dfrac{\pi R^3}{18}$; 4) $V=\pi$.

51. Вычислить объем шарового сектора, вырезанного у шара радиуса R с центром в начале координат круговым конусом, осью симметрии которого служит ось Oz, вершина конуса находится в центре шара, а образующие наклонены к плоскости xOy под углом α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $V=\dfrac{2\pi R^3}{3}\left(1-\sin\alpha\right)$.

52. Найти массу тела, ограниченного сверху сферой $x^2+y^2+z^2=1$, снизу плоскостью $z=0$, если плотность $\gamma\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ответ: $m=\dfrac{\pi^2}{8}$.

53. Найти массу сферического слоя $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, если объемная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра и на внутренней сфере равна единице.

Ответ: $m=8\pi$.

54. Найти статический момент относительно плоскости yOz однородного тела, заданного неравенствами $a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2$ $\left(0<a<b\right)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Ответ: $M_{yz}=\dfrac{\pi\left(b^4-a^4\right)}{16}$.

55. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, заданного неравенствами $x^2+y^2+z^2\le 1$ и $x^2+y^2\le z^2$ $\left(z\ge 0\right)$.

Ответ: $I_z=\dfrac{\pi\left(8-5\sqrt{2}\right)}{30}$.

56. Найти момент инерции шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$ относительно оси Oz, если плотность в каждой точке шара обратно пропорциональна ее расстоянию от центра шара, а на поверхности шара равна γ_o.

Ответ: $I_z = \dfrac{2\pi\gamma_o R^5}{3}$.

57. Вычислить момент инерции однородного шара единичного радиуса относительно центра шара.

Ответ: $I_o = \dfrac{4\pi}{5}$.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1

1. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 2$.

2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 10x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}\,x$.

3. Найти момент инерции относительно оси Oz неоднородного тела, ограниченного параболическим цилиндром $z^2 = 6x$ и плоскостями $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, если объемная плотность в каждой его точке равна ее расстоянию от плоскости xOy.

4. Вычислить объем тела, заданного неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$, $x^2 + y^2 \le 2z$.

5. Найти массу сферического слоя $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, если плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату ее расстояния от начала координат и на внутренней сфере равна 5.

Ответ: 1) $x_c = \frac{6}{5}$; $y_c = 0$; 2) $S = \frac{8\pi}{3}$; 3) $I_z = 14$;

4) $V = \frac{\pi(6\sqrt{3} - 5)}{3}$; 5) $m = 211\pi$.

Вариант 2

1. Найти статический момент относительно оси Oy однородной $(\gamma = 1)$ пластинки, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$.

2. Вычислить момент инерции однородного круга $x^2 + y^2 - 2ax \le 0 \quad (a > 0)$ относительно начала координат $(\gamma = 1)$.

3. Найти массу куба, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, $y = a$, $z = a \ (a > 0)$, если объемная плотность $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

4. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и конусом $x^2 + y^2 \le z^2$.

5. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ и конусом $x^2 + y^2 \le z^2$.

Ответ: 1) $M_y = \frac{2ka^2b}{3}$; 2) $I_o = \frac{3\pi a^4}{2}$; 3) $m = \frac{3a^4}{2}$;

4) $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = 1$; 5) $V = 8\pi$.

Вариант 3

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{3-x}{2}$, $y = 0$.

2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(\rho, \varphi) = \rho$ по области, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ и окружностью $\rho = a$ (имеется в виду область, не содержащая полюса).

3. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

4. Найти координаты центра тяжести однородного тела ($\gamma(x, y, z) = \gamma = const$), находящегося в первом октанте и ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (внешнего по отношению к конусу).

Ответ: 1) $S = \frac{4}{3}$; 2) $I = a^3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{22}{9}\right)$; 3) $V = 12$;

4) $x_c = \frac{4R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\pi}$; $y_c = \frac{4R(\sqrt{2} - 1)}{\pi}$; $z_c = \frac{1}{2}$;

5) $V = \frac{2\sqrt{2}\pi a_3}{3}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берман, Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / *Г.Н.Берман.* - СПб.: Изд-во «Профессия», 2001 – 2005. – 440 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. *А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича*. - М.: Наука, 2001. – 368 с.

3. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. *Г.И. Кручковича*. - М.: Высш. Школа, 2000. – 576 с.

4. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. в 2-х т.: учеб. пособие для втузов / *Н.С. Пискунов.* - М.: Изд-во «Интеграл – Пресс», 2001 – 2004. – 584 с.

Учебное издание

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

к выполнению дипломных проектов

Составитель: ***Поникарова Наталья Юрьевна***

Редактор А.В. Ярославцева

Компьютерная верстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 29.05.2008 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,75
Тираж 100 экз. Заказ Арт. С – 96/2008

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева
443086, Самара, московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.