ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
(задачи и упражнения)

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний*

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2008

УДК 517 (075)

Составитель **О.М. Карпилова**

Рецензент канд. техн. наук, доц. Г. Н. Г у т м а н

Кратные интегралы (задачи и упражнения): метод. указания / сост. *О.М. Карпилова*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 44 с.

Сборник содержит образцы решения типовых задач по темам: двойные интегралы, тройные интегралы, приложения кратных интегралов. В каждой теме рассматриваются типовые задачи, подробно разбираются методы их решения и предлагаются задачи для самостоятельной работы. В приложении даны варианты индивидуального домашнего задания.

Все задания составлены в соответствии с программой по курсу математики для студентов технических вузов.

Методические указания подготовлены на кафедре общей инженерной подготовки и предназначены для студентов института энергетики и транспорта Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 517 (075)

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Для вычисления двойного интеграла его представляют в виде повторного (двукратного) интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Решение примеров

Пример 1. Перейти от $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному интегралу и расставить пределы интегрирования, если область D ограничена линиями:

а) $x=1,\ \ y=2,\ \ x+y=6$;

б) $y=\dfrac{x^2}{2},\ \ y=8$;

в) $y=2x^2,\ \ y=\sqrt{4x}$;

г) контуром треугольника ABC, где $A(1;2)$, $B(3;6)$, $C(3;0)$;

д) $x^2+y^2=4x$.

Решение:

а) Построим область D:

$x=1$ – прямая, параллельная оси Oy;

$y=2$ – прямая, параллельная оси Ox;

$x+y=6$ – прямая, проходящая через точки (0;6) и (6;0).

Область D – это треугольник ABC (рис.1).

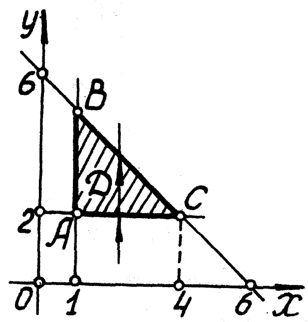


Рис. 1

Чтобы найти координаты точки C, надо решить систему уравнений $\begin{cases} y=2, \\ x+y=6. \end{cases}$

Отсюда $C(4;2)$. Поэтому внутри области D $1\le x\le 4$.

Чтобы выяснить, как изменяется y, проведем прямую, параллельную оси Oy и пересекающую область D. Эта прямая входит в область по линии $y=2$, а выходит по линии $x+y=6$ или $y=6-x$. Поэтому $2\le y\le 6-x$.

Таким образом, область D можно задать системой неравенств

$$D:\begin{cases} 1\le x\le 4, \\ 2\le y\le 6-x. \end{cases}$$

Теперь легко расставить пределы в двукратном интеграле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^4 dx \int\limits_2^{6-x} f(x,y)dy.$$

б) Построим D: $y=\frac{x^2}{2}$ – парабола, $y=8$ – прямая, параллельная оси Ox

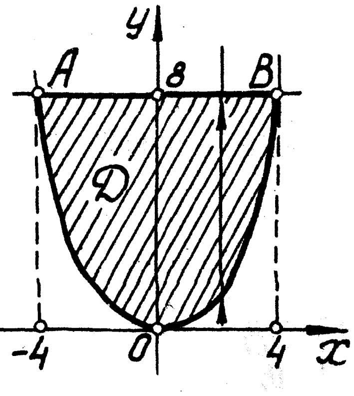


Рис. 2

(рис. 2). Найдем координаты точек A и B. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}, \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow 8=\frac{x^2}{2} \Rightarrow x=\pm 4.$$

Проведем прямую, параллельную оси Oy и пересекающую область D. Эта линия входит в область по параболе $y=\frac{x^2}{2}$ и выходит по прямой $y=8$.

Таким образом, область D задается неравенствами $D:\begin{cases} -4\le x\le 4, \\ \frac{x^2}{2}\le y\le 8. \end{cases}$ Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-4}^{4}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{8}f(x,y)dy.$$

в) Построим область D (рис. 3):

$y=2x^2$ – парабола, симметричная относительно оси Oy, с вершиной в начале координат; $y=\sqrt{4x}$ – положительная ветвь параболы $y^2=4x$, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат.

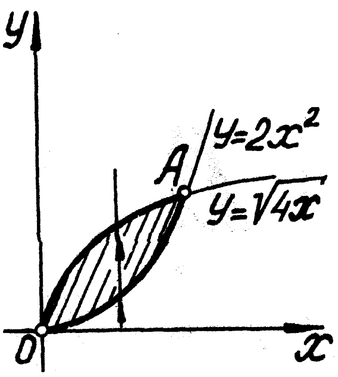


Рис. 3

Найдем точки пересечения этих линий: $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=\sqrt{4x} \end{cases} \Rightarrow 2x^2=\sqrt{4x}.$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $4x^4=4x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0.$

Отсюда $x_1=0,\ x_2=1 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=2.$

Таким образом, линии $y=2x^2$ и $y=\sqrt{4x}$ пересекаются в точках $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

Проведя прямую, параллельную Oy и пересекающую область D, видим, что линия входа – $y=2x^2$, а линия выхода – $y=\sqrt{4x}$.

Таким образом, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2x^2 \le y \le \sqrt{4x}, \end{cases}$ поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy.$$

г) Построим треугольник (рис. 4). Из чертежа ясно, что внутри области D $1 \le x \le 3$. Прямая, параллельная Oy и пересекающая область D, входит в треугольник по стороне AC и выходит по стороне AB.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Воспользовавшись этой формулой, напишем уравнения сторон AB и AC:

AB: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{6-2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4}$, т.е. $y = 2x$;

AC: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{0-2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2}$, т.е. $y = 3 - x$.

Таким образом, $D:\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ 3 - x \le y \le 2x. \end{cases}$ Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{3-x}^{2x} f(x,y)dy.$$

д) Построим область D. Для этого преобразуем уравнение границы:

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0.$$

Выделим полный квадрат относительно переменной x:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Получившееся уравнение задает окружность радиусом 2 с центром в точке (2;0) (рис. 5).

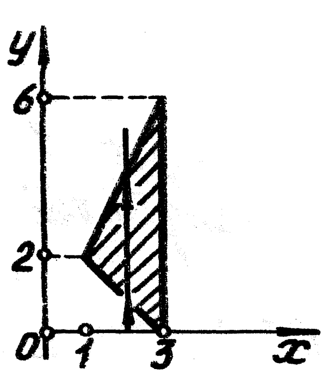


Рис. 4

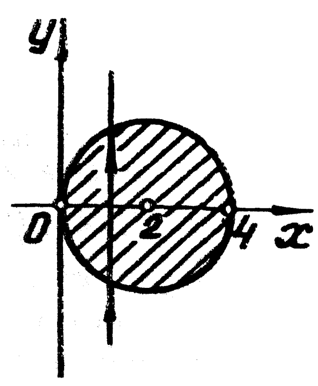


Рис.5

Чтобы расставить пределы интегрирования, надо записать уравнения верхней и нижней половины окружности (линии входа в область и выхода из области). Разрешим исходное уравнение $x^2 + y^2 = 4x$ относительно $y: y = \pm\sqrt{4x - x^2}$.

Очевидно, что верхней половине окружности соответствует уравнение $y=+\sqrt{4x-x^2}$, нижней $y=-\sqrt{4x-x^2}$.

Таким образом, $D:\begin{cases}0\le x\le 4,\\ -\sqrt{4x-x^2}\le y\le \sqrt{4x-x^2},\end{cases}$ поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy.$$

<u>Пример 2.</u> Переменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_2^4 dx\int\limits_{\frac{4}{x}}^{\frac{6-x}{2}} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{2} dx\int\limits_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy.$

<u>Решение</u>:

а) Область интегрирования задается системой неравенств

$$D:\begin{cases}0\le x\le 4,\\ -\sqrt{x}\le y\le \sqrt{x}.\end{cases}$$

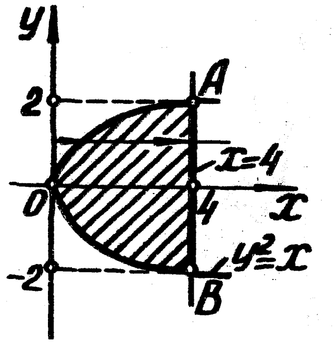


Рис. 6

Построим область D (рис.6):

$y=\sqrt{x}$ – верхняя половина параболы $y^2=x$.

$y=-\sqrt{x}$ – нижняя половина параболы $y^2=x$.

При перемене порядка интегрирования интеграл примет вид $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$

Найдем координаты точек пересечения параболы $y^2=x$ и прямой $x=4$:

$$\begin{cases}y^2=x,\\ x=4\end{cases}\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm 2.$$

Таким образом, $A(4;2)$, $B(4;-2)$.

Проведем прямую параллельно оси Ox, пересекающую область D. Линия входа этой в область – парабола $x=y^2$, линия выхода – прямая $x=4$. Таким образом, область D можно задать и системой неравенств

$$D:\begin{cases}-2\le y\le 2,\\ y^2\le x\le 4.\end{cases}$$

Тогда, $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=\int\limits_{-2}^{2} dy\int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)dx.$

б) В данном случае область интегрирования D задается системой неравенств

$$D:\begin{cases}2\le x\le 4,\\ \dfrac{4}{x}\le y\le \dfrac{6-x}{2}.\end{cases}$$

Построим эту область (рис.7):

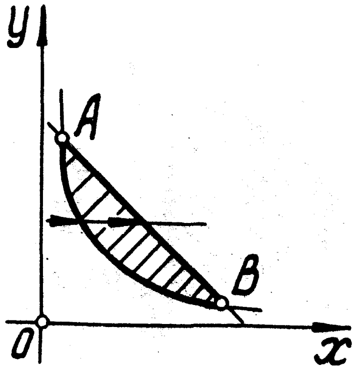


Рис. 7

$y=\dfrac{4}{x}$ – гипербола, $y=\dfrac{6-x}{2}$ – прямая.

Найдем координаты точек *A* и *B*.

В точке *A* $x=2$, следовательно, $y=\dfrac{4}{2}=2$.

В точке *B* $x=4$, следовательно, $y=\dfrac{4}{4}=1$.

Таким образом, *A*(2;2), *B*(4;1).

При перемене порядка интегрирования интеграл примет вид $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$

Так как $1\le y\le 2$, то $c=1; d=2$.

Проведем прямую, параллельную оси *Ox* и пересекающую область *D*. Линия входа – гипербола $y=\dfrac{4}{x}$, откуда $x=\dfrac{4}{y}$. Линия выхода – прямая $y=\dfrac{6-x}{2}$, откуда $x=6-2y$. Область *D* задается неравенствами $D:\begin{cases}1\le y\le 2,\\ \dfrac{4}{y}\le x\le 6-2y.\end{cases}$

Окончательно получим

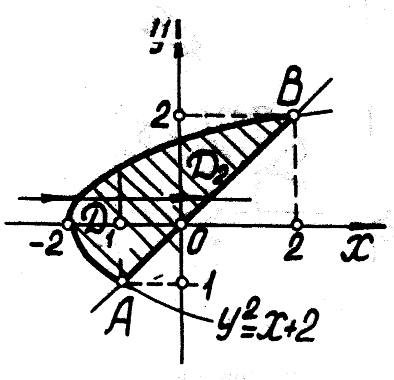
$$\int\limits_2^4 dx\int\limits_{4/x}^{\frac{6-x}{2}} f(x,y)dy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_{4/y}^{6-2y} f(x,y)dx.$$

в) Построим области

$$D_1:\begin{cases}-2\le x\le -1,\\ -\sqrt{x+2}\le y\le \sqrt{x+2}\end{cases}\quad \text{и}\quad D_2:\begin{cases}-1\le x\le 2,\\ x\le y\le \sqrt{x+2}.\end{cases}$$

Граница области D_1 определяется уравнением $y=\pm\sqrt{x+2}$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $y^2=x+2$ – уравнение параболы, вершина которой находится в точке (–2;0), а осью симметрии является ось *Ox*.

Рис.8



Граница области D_2 задается следующими уравнениями: $y=x$ – прямая, проходящая через начало координат, и $y=\sqrt{x+2}$ – верхняя ветвь параболы $y^2=x+2$. Таким образом, область интегрирования $D=D_1\cup D_2$ (рис. 8).

Чтобы расставить пределы интегрирования, найдем координаты точек пересечения линий границы. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x + 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2.$$

Отсюда $y_1 = -1,\ y_2 = 2$. Таким образом, $A(-1; -1)$, $B(2;2)$.

При перемене порядка интегрирования внешний интеграл будем брать по переменной y, внутренний – по x. Поэтому проведем прямую, пересекающую область D и параллельную оси Ox. Она входит в область по линии $y^2 = x + 2$ и выходит по линии $y = x$.

Итак, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{2} dx \int_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2-2}^{y} f(x,y)dx.$$

Здесь перемена порядка интегрирования упрощает выкладки, так как вместо вычисления двух интегралов понадобится вычислить всего один.

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 2;\ y = x;\ x = 2y$.

Решение. Построим область D (рис. 9):

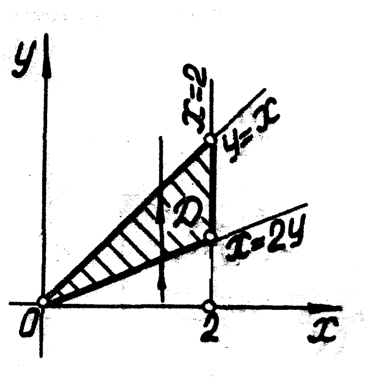


Рис. 9

$x = 2$ – прямая, параллельная оси Oy, $x = 2y$ и $y = x$ – прямые, проходящие через начало координат.

Для вычисления интеграла перейдем от двойного интеграла к повторному. Так как область D можно задать системой неравенств

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ \dfrac{x}{2} \le y \le x, \end{cases}$$ то

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} (x+2y)dy.$$

Вычисляем сначала внутренний интеграл, считая x постоянной величиной (так как интегрирование ведется по переменной y):

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} (x+2y)dy = \int_0^2 dx((xy + y^2)\Big|_{\frac{x}{2}}^{x}) = \int_0^2 dx(x^2 + x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}) = \int_0^2 \frac{5}{4}x^2dx = \frac{5}{4}\int_0^2 x^2dx.$$

Теперь осталось вычислить получившийся внешний интеграл:

$$\frac{5}{4}\int_0^2 x^2dx = \frac{5}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Таким образом, $\iint_D (x+2y)dxdy = \frac{10}{3}$.

Пример 4. Вычислить $\iint_D \cos(x+y)dxdy$, если D ограничена линиями $x=0$, $y=x$, $y=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Построим область D:

$x=0$ – ось Oy, $y=\frac{\pi}{2}$ – прямая, параллельная оси Ox, $y=x$ – прямая, проходящая через начало координат (рис. 10).

Прямые $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=x$ пересекаются в точке $A(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Переходя к двукратному интегралу и вычисляя его, получим

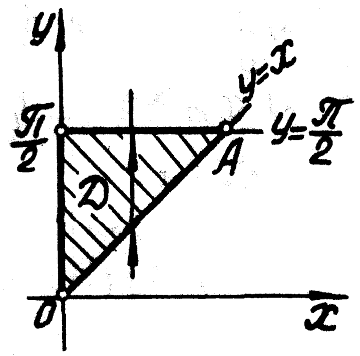


Рис. 10

$$\iint_D \cos(x+y)dxdy = \int_0^{\pi/2} dx \int_x^{\pi/2} \cos(x+y)dy = \int_0^{\pi/2} dx(\sin(x+y)\Big|_x^{\pi/2}) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx(\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin 2x) = \left[\begin{matrix}\text{по формулам} \\ \text{приведения}\end{matrix} \quad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin 2x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos 0 = 1 - 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах, к которым сводится $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$ если область D ограничена линиями:

а) $y=3,\ x=5,\ y=2x+1;$ б) $y=4-x^2,\ y=0;$

в) $y=x^2+1,\ x-y+3=0;$ г) $x^2+y^2=4,\ y=2x-x^2,\ x=0\ (x\ge 0, y\ge 0);$

д) D – треугольник ABC, где $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;4)$.

1.2. Переменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;$ б) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)dy;$

в) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy;$ г) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy.$

1.3. Вычислить двойные интегралы, считая, что область D ограничена указанными линиями:

а) $\iint\limits_D xdxdy;\ y=\dfrac{x+1}{3},\ y=\dfrac{17-x}{3},\ x=1,\ x=3;$

б) $\iint\limits_D x^3dxdy;\ y=x+2,\ y=x^2;$

в) $\iint\limits_D (xy^2+1)dxdy;\ 2y^2=x,\ y=\dfrac{x}{2};$

г) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\ x+y=6,\ x=2,\ y=1.$

Ответы

1.1. а) $\int\limits_1^5 dx\int\limits_3^{2x+1} f(x,y)dy;$ б) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)dy;$ в) $\int\limits_{-1}^2 dx\int\limits_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dy;$

г) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy;$ д) $\int\limits_1^4 dx\int\limits_1^x f(x,y)dy.$

1.2. а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{y} f(x,y)dx;$ б) $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx;$

в) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx;$ г) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx.$

1.3. а) $\dfrac{140}{3};$ б) $24\dfrac{8}{21};$ в) $\dfrac{47}{105};$ г) $2e^6+e^3.$

2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Если на плоскости заданы и декартова, и полярная системы координат, причем полюс совпадает с началом координат, а полярная ось совмещена с осью Ox, то для перехода к полярным координатам используют формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi. \end{cases}$$

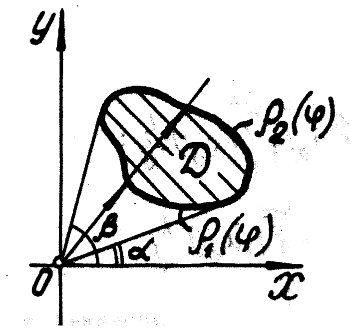


Рис. 11

При этом если область D ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ (рис. 11), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho.$$

Решение примеров

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ где область D ограничена линиями $y = x,\ y = \sqrt{3}x,\ x^2+y^2=1$ (y>0).

Решение. Построим область D (рис. 12): $x^2+y^2=1$ – окружность радиуса 1,

$y = x,\ y = \sqrt{3}x$ – прямые, проходящие через начало координат.

Так как область D представляет собой часть круга, удобно перейди к полярным координатам. При этом полюс совместим с точкой O(0;0), а полярную ось пустим по оси Ox.

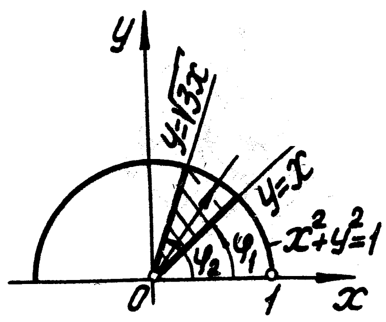


Рис. 12

Тогда

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{bmatrix} = \iint\limits_D (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_D \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Теперь надо описать область D в полярной системе координат. Угол φ внутри области D меняется от φ_1 до φ_2 (см. рис. 12). Прямая $y = kx$ наклонена к оси Ox

под углом, тангенс которого равен *k*. Поэтому $tg\varphi_1 = 1;\ tg\varphi_2 = \sqrt{3}$. Отсюда $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Итак, внутри области *D* $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Луч, исходящий из полюса *O* и пересекающий *D*, выходит из области по окружности $x^2 + y^2 = 1$, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$.

Таким образом, область *D* описывается системой неравенств

$$D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \\ 0 \le \rho \le 1. \end{cases}$$

Теперь легко расставить пределы в повторном интеграле и вычислить его

$$\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{48}.$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где *D* – кольцо, $1 \le x^2 + y^2 \le 9$.

<u>Решение.</u> Так как область *D* ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 13), удобно перейти к полярным координатам:

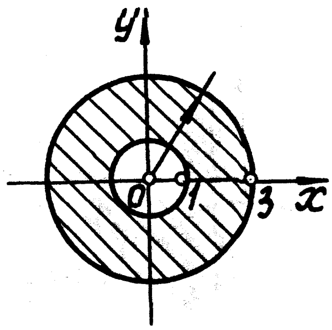


Рис. 13

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда уравнения границ примут вид

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho = 1$;

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 9 \Rightarrow \rho = 3$.

Чтобы расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, заметим, что внутри области *D* угол φ принимает все значения от 0 до 2π.

Проведем из начала координат луч, пересекающий область *D*. Он входит в область по линии $\rho = 1$ и выходит по линии $\rho = 3$. Таким образом, $D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 1 \le \rho \le 3. \end{cases}$ Тогда

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{bmatrix} = \iint_D e^{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho d\varphi = \iint_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \rho e^{\rho^2} d\rho = \left[\rho d\rho = \frac{1}{2}d\rho^2\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 e^{\rho^2} d\rho^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi (e^{\rho^2}\Big|_1^3) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi (e^9 - e) =$$

$$= \frac{e^9-e}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi(e^9-e).$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если D определяется неравенствами

$$D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 4x, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Построим область D. Для этого преобразуем уравнение границы $x^2+y^2=4x$:

$x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$.

Итак, граница – это окружность радиуса 2 с центром в точке (2;0).

Так как $y \ge 0$, то D – верхняя половина круга (рис. 14).

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

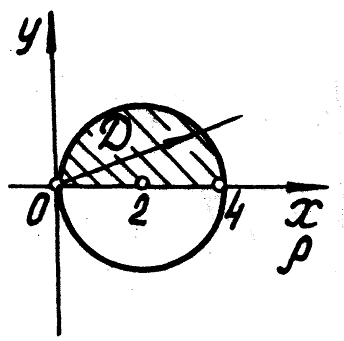


Рис. 14

Уравнение границы $x^2+y^2=4x$ в полярных координатах примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2=4\rho\cos\varphi.$ Полагая $\rho\ne 0,$ получим $\rho=4\cos\varphi.$

Область D целиком расположена в первой четверти, поэтому $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$ Таким образом, в полярных координатах область D задается неравенствами

$$\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le\rho\le 4\cos\varphi. \end{cases}$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{bmatrix} = \iint\limits_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = \iint\limits_D d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} 4\cos\varphi d\varphi = 4\sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить, переходя к полярным координатам:

2.1. $\iint\limits_D (x^2+y^2+3)dxdy,$ где D – верхняя половина круга $x^2+y^2 \le 16.$

2.2. $\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ где область D удовлетворяет неравенствам $\frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2.$

2.3. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}},$ где область D ограничена линиями $x^2+y^2=9,$ $x^2+y^2=16,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x\ \ (x\ge 0, y\ge 0).$

2.4. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x},$ где D ограничена линиями $x^2+y^2=6x,\ y=0\ \ (y\ge 0).$

2.5. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ где область D ограничена кривыми $x^2+y^2=2x,$ $x^2+y^2=4x,\ y=0\ \ (y\ge 0).$

Ответы

2.1. 88π; **2.2**. –2π; **2.3**. $\frac{\pi}{12}$; **2.4**. 3π; **2.5**. 11,25 π.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Двойной интеграл применяется при вычислении:

а) площади плоской фигуры, ограниченной областью D:

$$S = \iint\limits_D dxdy; \tag{1}$$

б) объема цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy; \quad (2)$$

в) площади поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, проекцией которой на плоскость Oxy является область D:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy. \quad (3)$$

Кроме того, двойные интегралы используются в механике для вычисления:

а) массы плоской пластинки, занимающей область D плоскости Oxy и имеющей переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$M = \iint_D \gamma(x, y)dxdy; \quad (4)$$

б) статистических моментов пластинки относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)dxdy; \qquad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)dxdy; \quad (5)$$

в) координат центра тяжести пластинки:

$$x_ц = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\gamma(x, y)dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)dxdy}; \qquad y_ц = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\gamma(x, y)dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)dxdy}. \quad (6)$$

Решение примеров

Пример 1. Найти площадь области, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = 2x$.

Решение. Построим область. Уравнение $y^2 = 4x$ задает параболу, уравнение $y = 2x$ – прямую, проходящую через начало координат (рис. 15). Чтобы найти точки пересечения этих линий, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow 4x(x-1) = 0.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тогда $y_1 = 0$, $y_2 = 2$. Таким образом, прямая пересекает параболу в точках 0(0;0) и A(1;2). По формуле (1)

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x}^{\sqrt{4x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{4x} - 2x)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^{3/2}}{3/2} - x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

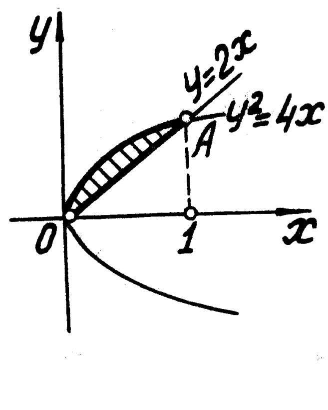


Рис. 15

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 4x$, вне первой окружности.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задает окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Уравнение $x^2 + y^2 = 4x$ задает окружность радиуса 2 с центром в точке (2;0): $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

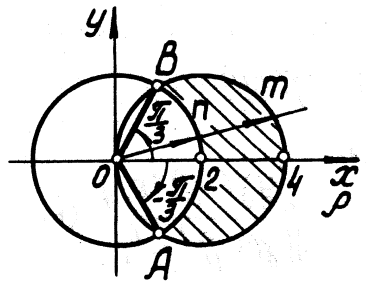


Рис. 16

Требуется найти площадь фигуры *AmBnA* (рис. 16).

Здесь удобно перейти к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда первое уравнение примет вид $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2.$ Второе уравнение:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2 - 4\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos\varphi.$$

Чтобы определить координаты точек *A* и *B*, решим совместно систему уравнений

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow 2 = 4\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Итак, $A(-\frac{\pi}{3}; 2)$, $B(\frac{\pi}{3}; 2)$. Область *AmBn* можно задать неравенствами

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \\ 2 \le \rho \le 4\cos\varphi. \end{cases}$$

По формуле (1)

$$S = \iint_D dxdy = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{bmatrix} = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_2^{4\cos\varphi} \rho d\rho = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_2^{4\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (16\cos^2\varphi - 4)d\varphi = 8\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2\varphi d\varphi - 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi = 8\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi - 2\varphi\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

$$= 4(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3} - 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{2\pi}{3} + 2\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x + 5y + 2z = 10$.

Решение. Построим тело (рис. 17) и его проекцию на плоскость *Oxy*, $z = 0$ (рис. 18).

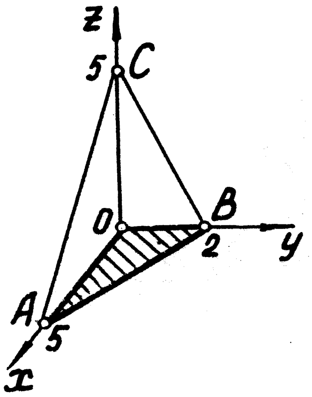


Рис. 17

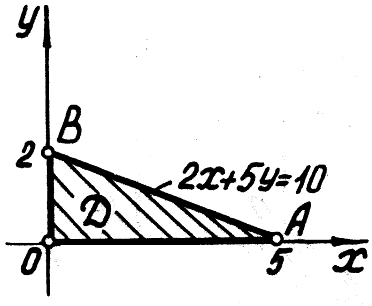


Рис. 18

По формуле (2) $V = \iint\limits_D z(x,y)dxdy$. В примере область D – это треугольник OAB, изображенный на рис. 18, а поверхность z определяется уравнением плоскости $2x + 5y + 2z = 10$, откуда $z = \dfrac{10 - 2x + 5y}{2}$.

Таким образом,

$$V = \iint\limits_D \frac{10 - 2x - 5y}{2} dxdy = \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{\frac{10-2x}{5}} \frac{10 - 2x - 5y}{2} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^5 dx(10y - 2xy - \frac{5y^2}{2}) \Big|_0^{\frac{10-2x}{5}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^5 (2(10 - 2x) - \frac{2x}{5}(10 - 2x) - \frac{5}{2}\cdot\frac{(10 - 2x)^2}{25})dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^5 (20 - 4x - 4x + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{10}(100 - 40x + 4x^2))dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^5 (10 - 4x + \frac{2}{5}x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(10x - 2x^2 + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^3}{3})\Big|_0^5 = \frac{1}{2}(50 - 50 + \frac{2\cdot 125}{5\cdot 3}) = \frac{25}{3}.$$

<u>Пример 4.</u> Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 2$ и поверхностью $z = x^2 + y^2 + 1$.

<u>Решение.</u> Тело изображено на рис. 19. Плоскость $x + y = 2$ проходит параллельно оси Oz; $z = x^2 + y^2 + 1$ – параболоид, вершина которого находится в точке (0;0;1). Проекцией тела на плоскость Oxy является треугольник ABO (рис. 20). AB – линия пересечения плоскости $x + y = 2$ с плоскостью $z = 0$, поэтому уравнение прямой $AB: x + y = 2$, откуда $y = 2 - x$.

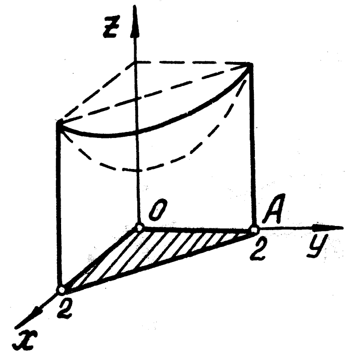


Рис. 19

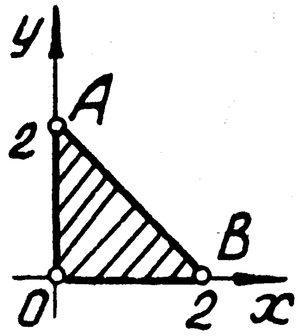


Рис. 20

По формуле (2)

$$V = \iint_D z dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^2 dx (x^2 y + \frac{y^3}{3} + y) \Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 dx (x^2 (2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} + (2-x)) = \int_0^2 (\frac{14}{3} - 5x + 4x^2 - \frac{4}{3} x^3) dx =$$

$$= (\frac{14}{3} x - \frac{5x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{3 \cdot 4}) \Big|_0^2 = \frac{28}{3} - 10 + \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{14}{3}.$$

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$ и $z = 0$.

Решение. Тело изображено на рис. 21. Для удобства расстановки пределов интегрирования построим проекцию тела на плоскость Oxy (рис. 22).

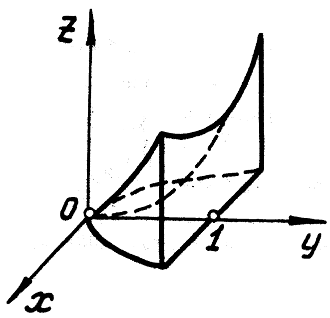


Рис. 21

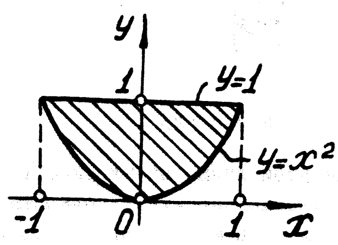


Рис. 22

По формуле (2)

$$V=\iint\limits_D zdxdy=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=\int\limits_{-1}^{1}dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{1}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=$$

$$=\frac{88}{105}.$$

Пример 6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2-z+2=0,\ \ x^2+y^2+2z-7=0.$$

Решение. Данное тело ограничено двумя параболоидами (рис. 23). Линия пересечения параболоидов определяется системой уравнений

$$\begin{cases} z=x^2+y^2+2, \\ 2z=7-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z-2, \\ x^2+y^2=7-2z \end{cases} \Rightarrow z-2=7-2z \Rightarrow 3z=9 \Rightarrow z-3.$$

Из первого уравнения $x^2+y^2=1$.

Итак, линией пересечения является окружность радиуса 1, лежащая в плоскости

$$z=3:\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}.$$

Проекция этой линии на плоскость Oxy – тоже окружность $x^2+y^2=1$, поэтому удобно перейти к полярным координатам.

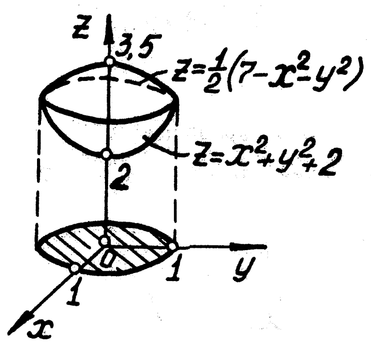


Рис. 23

Объем тела можно подсчитать как разность объемов двух цилиндрических тел:

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D\frac{1}{2}(7-x^2-y^2)dxdy-\iint\limits_D(x^2+y^2+2)dxdy=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{bmatrix}=$$

$$=\iint\limits_D\frac{1}{2}(7-\rho^2)\rho d\rho d\varphi-\iint\limits_D(\rho^2+2)\rho d\rho d\varphi=\iint\limits_D\left(\frac{1}{2}(7-\rho^2)-(\rho^2+2)\right)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint\limits_D(1{,}5\rho-1{,}5\rho^3)d\rho d\varphi=1{,}5\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=1{,}5\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1=1{,}5\cdot\frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}.$$

Пример 7. Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2-z^2=25$ внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

Решение. Цилиндр вырезает на поверхности сферы две части, симметричные относительно плоскости Oxy (рис. 24). В силу симметрии достаточно вычислить площадь поверхности только верхней «шапочки» $(z\geq 0)$ и результат удвоить.

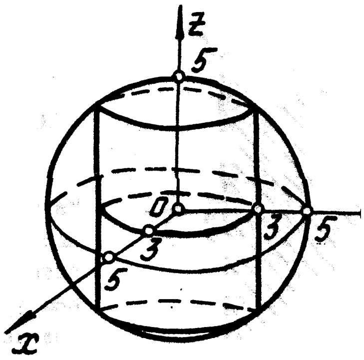


Рис. 24

Для вычисления воспользуемся формулой (3). Так как в нее входят частные производные, вычислим z'_x и z'_y.

У нас $z \geq 0$, поэтому из уравнения сферы $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Тогда

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Таким образом, по формуле (3)

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{25 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Проекция поверхности на плоскость Oxy – круг $x^2 + y^2 \leq 9$, следовательно, удобно перейти к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

В полярной системе координат уравнение окружности $x^2 + y^2 = 9$ примет вид $\rho = 3$. Итак, в полярных координатах

$$\sigma = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - \rho^2}}\rho d\rho d\varphi = 5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} d\rho = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (25 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho^2 =$$

$$= -\frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(25 - \rho^2)^{1/2}}{1/2}\Big|_0^3 = -5\int_0^{2\pi} d\varphi (4 - 5) = 5\varphi\Big|_0^{2\pi} = 10\pi.$$

Так как мы считали площадь только верхней «шапочки», то вся площадь поверхности равна $\sigma_n = 2\sigma = 20\pi$.

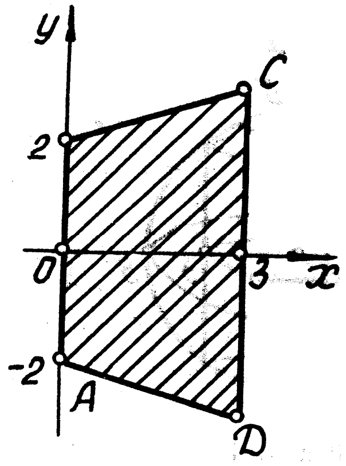
Пример 8. Найти центр тяжести однородной пластинки $ABCD$, если $A(0;-2)$, $B(0;2)$, $C(3;3)$, $D(3;-3)$.

Решение. Для вычисления координат центра тяжести воспользуемся формулами (6). Так как пластинка однородна, то поверхностная плотность $\gamma(x, y)$ постоянна, поэтому формулы примут вид

$$x_ц = \frac{\iint_D x dxdy}{\iint_D dxdy}; \qquad y_ц = \frac{\iint_D y dxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Из рисунка (рис. 25) видно, что пластинка имеет форму трапеции и симметрична относительно оси Ox, поэтому $y_ц = 0$. Запишем уравнения прямых BC и AD, воспользовавшись формулой, определяющей уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}:$$



$$BC: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{3-2} \Rightarrow y = 2 + \frac{x}{3}; \quad AD: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-3+2} \Rightarrow y = -2 - \frac{x}{3}.$$

Рис. 25

Вычислим теперь отдельно числитель и знаменатель дроби, определяющей координату $x_ц$:

$$\iint\limits_D x dx dy = \int_0^3 x dx \int_{-\frac{x}{3}-2}^{\frac{x}{3}+2} dy = 2\int_0^3 x\left(\frac{x}{3} + 2\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{9} + x^2\right)\Bigg|_0^3 = 24.$$

В знаменателе стоит интеграл $\iint\limits_D dxdy$, равный площади области D, т.е. площади трапеции $ABCD$. Поэтому $\iint\limits_D dxdy = \dfrac{|AB| + |CD|}{2} h = 15$; можно вычислить этот интеграл и непосредственно $\iint\limits_D dxdy = \int_0^3 dx \int_{-\frac{x}{3}-2}^{\frac{x}{3}+2} dy = 2\int_0^3 \left(\frac{x}{3} + 2\right)dx = 15.$

Таким образом, $x_ц = \dfrac{24}{15} = 1{,}8$; $y_ц = 0$.

Пример 9. Найти массу верхней половины эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, если плотность в каждой точке равна ординате точки.

Решение. Плотность в каждой точке равна ординате, т.е. $\gamma(x, y) = y$. По формуле (4) $M = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy = \iint\limits_D y dxdy$. Для верхней половины эллипса (рис. 26) $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, поэтому

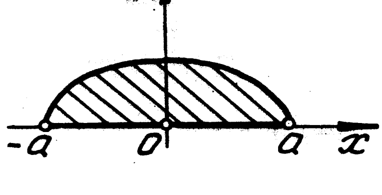


Рис. 26

$$M=\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}ydy=\int_{-a}^{a}dx\frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{b^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(a-\frac{a^3}{3a^2}+a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{2}{3}ab^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $x=y^2+1,\ x=5;$ б) $y=x^2+1,\ x-y+3=0;$ в) $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi};$

г) $x^2+y^2-2ax=0,\ x^2+y^2-2ay=0;$ д) $y=4-x^2,\ y=\frac{x^2}{2}-2.$

3.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $x^2+y^2-z=0,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

б) $y=x^2,\ x=y^2,\ z=12-x^2-y^2;$

в) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=a^2,\ z=0;$

г) $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ z=0.$

3.3. Найти площадь указанной поверхности:
а) части плоскости $2x+3y+z=6$, заключенной в первом октанте;

б) части плоскости $x+y+z=2a$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$;

в) параболоида $z=x^2+y^2+1$ внутри цилиндра $x^2+y^2=2$;

г) параболоида $y^2+z^2=2x$, отсекаемого параболическим цилиндром $y^2=x$ и плоскостью $x=1$.

3.4. Найти центр тяжести трапеции *ABCD*, где *A*(0; –2), *B*(0;2), *C*(3;3), *D*(3;3), если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

3.5. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболой $y^2=20x+100$ и прямой $y=10-x$.

3.6. Найти массу круглой пластинки радиуса *R*, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от центра круга.

Ответы

3.1. а) $\frac{32}{3}$; б) 4,5; в) $2a^2$; г) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; д) 16.

3.2. а) 26; б) $\frac{402}{105}$; в) $\frac{2}{3}\pi a^3$; г) $\frac{\pi}{48}$.

3.3. а) $3\sqrt{14}$; б) $\pi a^2\sqrt{3}$; в) $\dfrac{13\pi}{3}$; г) $\dfrac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$.

3.4. $x_ц = 2\dfrac{1}{16},\ y_ц = 0$. **3.5**. $x_ц = 12,\ y_ц = -10$. **3.6**. $\dfrac{2}{3}k\pi R^3$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Для вычисления тройного интеграла его представляют в виде трехкратного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Решение примеров

Пример 1. Перейти от $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ к трехкратному и расставить пределы интегрирования, если область V ограничена:

а) плоскостью $3x+2y+4z=12$ и координатными плоскостями;

б) конусом $x^2+y^2+z^2=0$ и плоскостью $z=h$;

в) шаром $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение. а) Построим область V и проекцию этой области на плоскость Oxy (V_{xy}) (рис. 27, 28).

Прямая AB – это линия пересечения плоскости $3x+2y+4z=12$ с плоскостью $z=0$, поэтому ее уравнение $3x+2y=12$. Таким образом, V_{xy} – это Δ OAB.

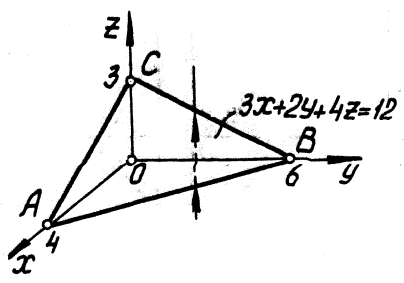


Рис. 27

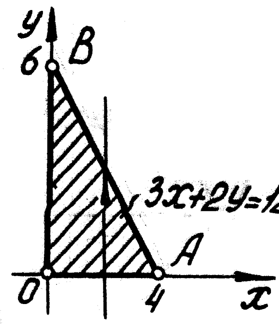


Рис. 28

Из рис. 28 легко увидеть, что $0 \le x \le 4$. Проведя прямую, параллельную оси Oy и пересекающую треугольник OAB (рис. 28), замечаем, что она входит в V_{xy} по линии $y=0$, а выходит по линии $3x+2y=12$, т.е. $0 \le y \le \dfrac{12-3x}{2}$.

Чтобы выяснить пределы изменения z, проведем прямую, параллельную оси Oz и пересекающую область V (рис. 27). Она входит в область по поверхности $z=0$ и выходит по поверхности $3x+2y+4z=12$, т.е. $0 \le z \le \dfrac{12-3x-2y}{4}$.

Таким образом, область V можно описать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 6-\dfrac{3}{2}x, \\ 0 \le z \le \dfrac{12-3x-2y}{4}, \end{cases}$$

поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{6-\frac{3x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{12-3x-2y}{4}} f(x,y,z)dz.$$

б) Для расстановки пределов в трехкратном интеграле построим область V и ее проекцию на плоскость Oxy – область V_{xy} (рис. 29).

Уравнение линии, ограничивающей область V_{xy}, получают, решая систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=h \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=h^2.$

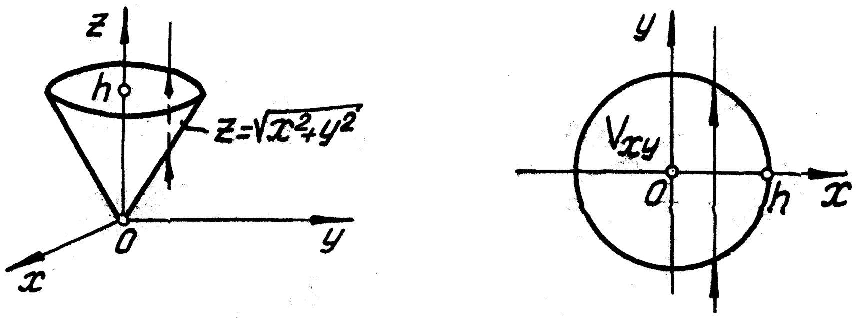


Рис. 29

То есть V_{xy} – круг радиусом h с центром в начале координат. Проводя прямые, параллельные Oy и Oz, пересекающие V_{xy} и V, получаем, что V описывается системой неравенств

$$-h \le x \le h,$$
$$-\sqrt{h^2-x^2} \le y \le \sqrt{h^2-x^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le h.$$

Поэтому $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-h}^{h} dx \int\limits_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} f(x,y,z)dz.$

Можно выбрать в трехкратном интеграле другой порядок интегрирования, тогда, естественно, изменятся и пределы интегрирования.

Например, представим исходный интеграл в виде

$$\int_c^d dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(y,x,z)dx.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования, спроектируем V на плоскость Oyz и проведем прямые, параллельные Oy и Ox и пересекающие соответственно V_{xy} и V (рис.30).

В этом случае V задается неравенствами $V:\begin{cases} 0 \le z \le h, \\ -z \le y \le z, \\ -\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2} \end{cases}$

поэтому

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^h dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx.$$

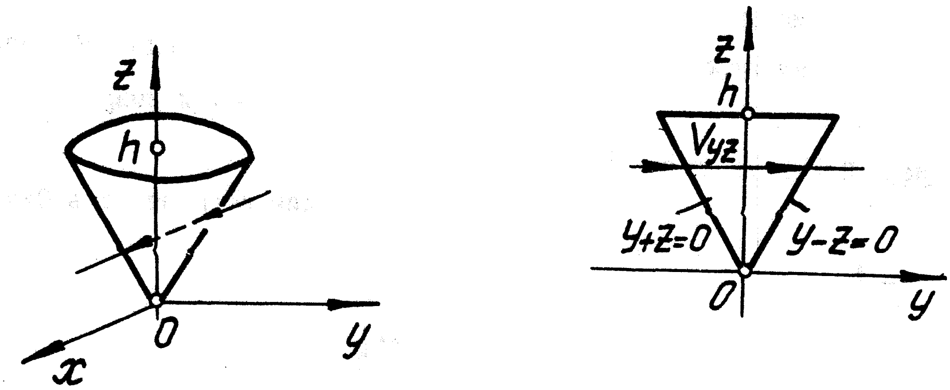


Рис. 30

в) Построим область V и ее проекцию на плоскость Oxy (рис.31).

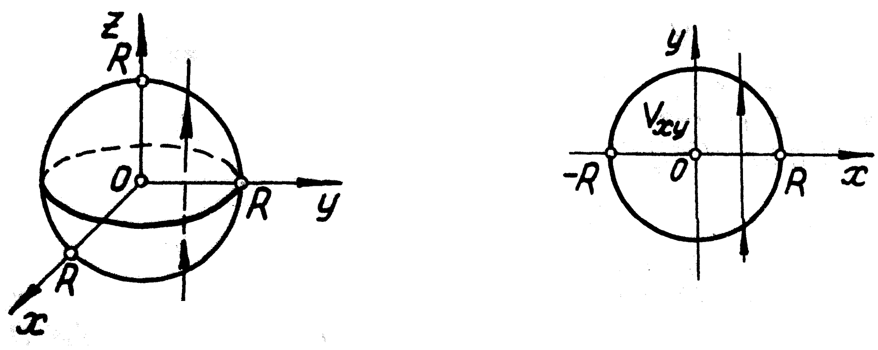


Рис. 31

Из чертежа видно, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz = \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} dz \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)dy.$$

Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz,$ если тело V ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x+y=4$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Построим тело V и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 32).

Из чертежа видно, что V описывается неравенствами

$$V: \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 4-x, \\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

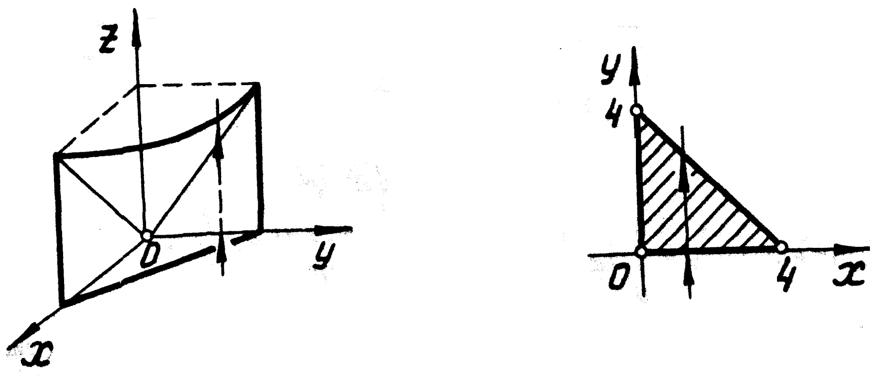


Рис. 32

Таким образом,

$$\iiint\limits_V \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{z}{x^2+y^2}dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} \frac{dy}{x^2+y^2}\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx\left(y\Big|_0^{4-x}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (4-x)dx = \frac{1}{2}\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(16-8) = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Перейти от $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ к трехкратному интегралу и расставить пределы интегрирования, если тело V ограничено:

а) эллипсоидом $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1;$

б) параболоидом $z=4-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0;$

в) координатными плоскостями и плоскостью $x+2y+3z-6=0.$

4.2. Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{ydxdydz}{1-x^2-y^2}$, если тело V ограничено плоскостями $x=0,$ $y=0,$ $z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0).$

4.3. Вычислить $\iiint\limits_V ydxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=0,$ $y=0,$ $z=0,$ $x+y+z=2.$

4.4. Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{z}{x^2+y^2}dxdydz,$ если тело V ограничено плоскостями $z=0,$ $x=0,$ $y=x,$ $y=2,$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}.$

Ответы

4.1. а) $\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}dy\int\limits_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}}^{5\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}}f(x,y,z)dz$;   б) $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int\limits_{0}^{4-x^2-y^2}f(x,y,z)dz$;

в) $\int\limits_{0}^{6}dx\int\limits_{0}^{\frac{6-x}{2}}dy\int\limits_{0}^{\frac{6-x-2y}{3}}f(x,y,z)dz$.

4.2. $\dfrac{1}{6}$.   **4.3**. $\dfrac{2}{3}$.   **4.4**. 1.

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Формулы перехода к цилиндрическим координатам (φ, ρ, z) (рис. 33):

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;\quad z=z;\quad dxdydz=\rho d\rho\varphi dz.$$

Формулы перехода к сферическим координатам (φ, θ, r) (рис. 34):

$$x=r\cos\varphi\sin\theta;\quad y=r\sin\varphi\sin\theta;\quad z=r\cos\theta;\quad dxdydz=r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Здесь $0\le\varphi\le 2\pi;$ $0\le\theta\le\pi;$ $0\le r\le +\infty.$

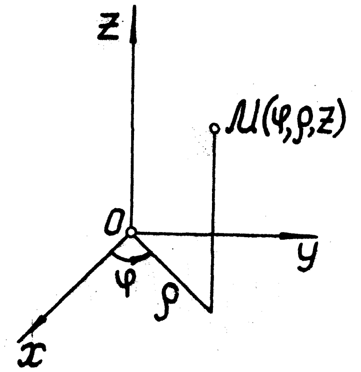


Рис. 33

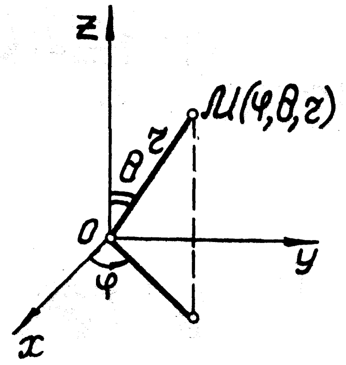


Рис. 34

Решение примеров

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, если V ограничено конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 2$.

Решение. Тело V изображено на рис. 35. Линия пересечения конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскости $z = 2$ имеет уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$. Таким образом, проекция тела V на плоскость Oxy – круг (рис.36).

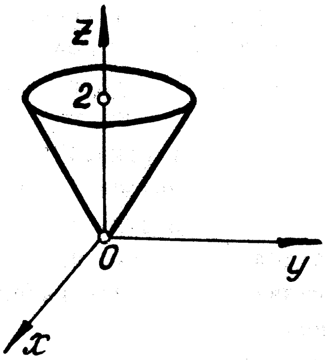


Рис. 35

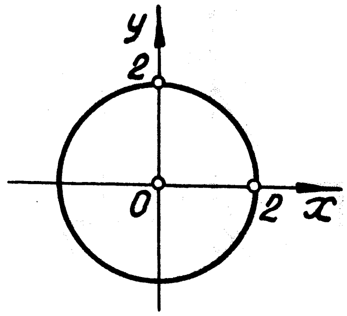


Рис. 36

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z;\ dxdydz = \rho d\rho\varphi dz.$$

В этих координатах уравнение окружности, изображенной на рис. 36, $\rho = 2$, уравнение конуса $z = \rho$, а тело V задается неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \rho \le 2$; $\rho \le z \le 2$.

Итак,

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dv=\rho d\rho d\varphi dz \end{bmatrix} = \iiint\limits_V z\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_\rho^2 z dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \frac{z^2}{2}\Big|_\rho^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho(4-\rho^2)d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho-\rho^3)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi (2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi (8-4) = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ если тело V ограничено поверхностями $z=0,\ z=2,\ y^2=3x-x^2.$

Решение. Построим область V; $z=0,\ z=2$ – плоскости.

Чтобы построить поверхность $y^2=3x-x^2$, преобразуем уравнение:

$x^2-3x+y^2=0 \Rightarrow x^2-3x+2{,}25-2{,}25+y^2=0 \Rightarrow (x-1{,}5)^2+y^2=2{,}25.$

Это уравнение определяет круговой цилиндр, в основании которого лежит круг радиуса 1,5 с центром в точке (1,5;0;0). Таким образом, область интегрирования V – это цилиндр (рис. 37). Поэтому удобно воспользоваться цилиндрическими координатами. В этих координатах уравнение цилиндрической поверхности, ограничивающей область интегрирования, примет вид

$\rho^2\sin^2\varphi = 3\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi.$

То есть $\rho^2=3\rho\cos\varphi,$ откуда $\rho=3\cos\varphi.$

Исходя из этого, область V можно описать системой неравенств

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2};$$
$$0\le\rho\le 3\cos\varphi;$$
$$0\le z\le 2.$$

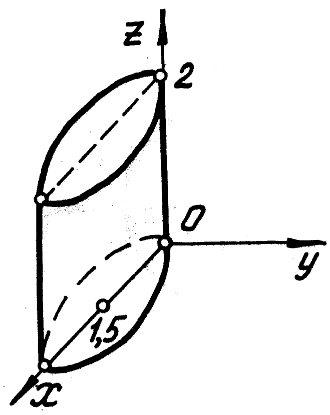


Рис. 37

Итак,

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz \end{bmatrix}=\iiint\limits_V z\sqrt{\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz=\iiint\limits_V z\rho^2 d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^2 zdz=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^2 d\rho\frac{z^2}{2}\Big|_0^2=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^2 d\rho=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{3\cos\varphi}=$$

$$=18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi=18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\sin\varphi=18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=18\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=18\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=24.$$

Пример 3. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где тело V – верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Решение. Так как здесь область интегрирования является частью шара, удобно перейти к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi\sin\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\theta \\ dxdydz=r^2\sin\theta d\varphi d\theta dz \end{bmatrix}=$$

$$=\iiint\limits_V (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+z^2\cos^2\varphi)^2 r^2\sin\theta d\varphi d\theta dz=$$

$$=\iiint\limits_V r^4 r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R r^6 dr=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\frac{r^7}{7}\Big|_0^R=$$

$$=\frac{R^7}{7}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=\frac{R^7}{7}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{R^7}{7}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi R^7}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)^3\,dxdydz$, если V ограничено поверхностями $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1$.

5.2. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где V ограничено поверхностями $z=0$, $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

5.3. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, если V ограничено поверхностями $x^2+y^2=2z,\ z=2$.

5.4. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если V – шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Ответы

5.1. $\frac{3\pi}{2}$. **5.2**. $\frac{16\pi}{5}$. **5.3**. $\frac{16\pi}{3}$. **5.4**. πR^4.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Тройной интеграл применяется при вычислении:

а) объема тела Ω:

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz; \tag{7}$$

б) массы тела, занимающего область Ω, с переменной объемной плотностью $\gamma(x,y,z)$:

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)dxdydz; \tag{8}$$

в) координат центра тяжести тела Ω:

$$x_ц=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)xdxdydz,$$

$$y_ц=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)ydxdydz, \tag{9}$$

$$z_ц=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)zdxdydz,$$

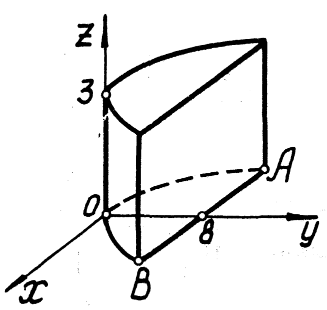
где M – масса тела.

Если тело однородно, то в формулах (9) можно положить $\gamma=1;\ M=V$.

Решение примеров

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного цилиндром $y=2x^2$ и плоскостями $z=0,\ z=3,\ y=8$.

Решение. Тело и его проекция на плоскость Oxy изображены на рис. 38.



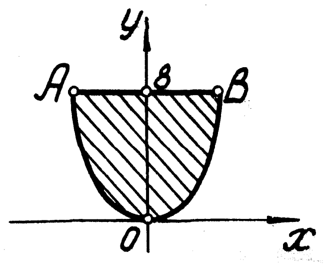


Рис. 38

Чтобы найти координаты точек A и B, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 8, \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow A(-2;8), B(2;8).$$

Таким образом, область Ω описывается системой неравенств

$$-2 \le x \le 2; \quad 2x^2 \le y \le 8; \quad 0 \le z \le 3.$$

По формуле (7)

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dy \int\limits_{0}^{3} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dyz\Big|_{0}^{3} = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dy = 3\int\limits_{-2}^{2} dxy\Big|_{2x^2}^{8} =$$

$$= 3\int\limits_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = 3(8x - \frac{2x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = 3(16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3}) = 3 \cdot \frac{64}{3} = 64.$$

<u>Пример 2.</u> Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $y = 2x$, $x + y + z = 3$, если плотность в каждой точке $\gamma = \dfrac{1}{3 - x - y}$.

<u>Решение.</u> Построим тело Ω и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 39).

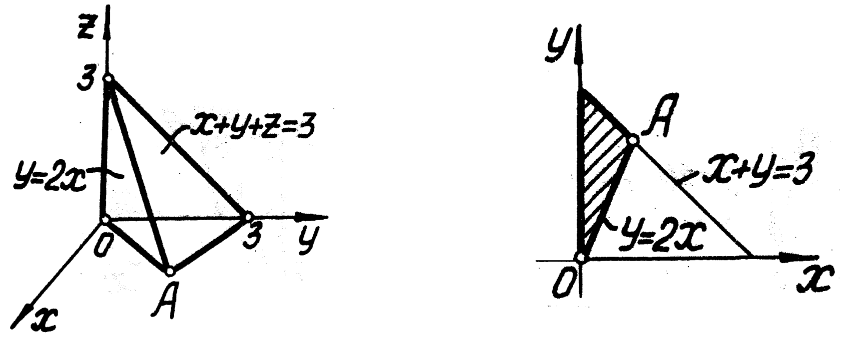


Рис. 39

Плоскость $x + y + z = 3$ пересекается с плоскостью $z = 0$ по прямой $x + y = 3$. Решив систему $\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + 2x = 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$

получим координаты точки $A(1;2)$. Таким образом, тело Ω описывается системой неравенств $0 \le x \le 1$; $2x \le y \le 3 - x$; $0 \le z \le 3 - x - y$.

По формуле (8) масса тела

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{3 - x - y} dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3-x} dy \int\limits_{0}^{3-x-y} \frac{1}{3 - x - y} dz = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3-x} dy \left(\frac{z}{3 - x - y} \right)\Big|_{0}^{3-x-y} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3-x} dy = \int\limits_{0}^{1} dx (y\Big|_{2x}^{3-x}) = \int\limits_{0}^{1} dx(3 - x - 2x) = \int\limits_{0}^{1} (3 - 3x)dx = \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right)\Big|_{0}^{1} = 1{,}5.$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $y + z = 3$, $3y + 2z = 9$ и параболическим цилиндром $x = \sqrt{3y}$, если плотность в каждой точке пропорциональна абсциссе и на единице расстояния от плоскости Oyz равна 8.

Решение. Плотность пропорциональна абсциссе; следовательно, $\gamma = kx$. На единице расстояния от плоскости Oyz плотность равна 8; следовательно, при $x=1$, $\gamma = 8$. Тогда $8 = k\cdot 1 \Rightarrow k = 8$. Таким образом, $\gamma(x,y,z) = 8x$.

Построим тело Ω и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 40).

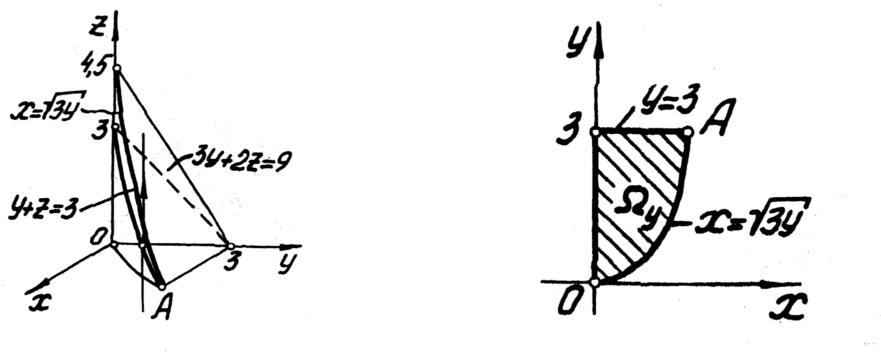


Рис. 40

Чтобы найти координаты точки A, решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3, \\ \sqrt{3y} = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{9} \Rightarrow x = 3, y = 3 \Rightarrow A(3;\,3).$$

Таким образом, область Ω можно задать системой неравенств

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ \dfrac{x^2}{3} \le y \le 3, \\ 3 - y \le z \le \dfrac{9-3y}{2}. \end{cases}$$

По формуле (8) масса тела равна

$$M = \iiint\limits_{\Omega} 8x\,dx\,dy\,dz = 8\int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{3}}^{3} dy \int\limits_{3-y}^{\frac{9-3y}{2}} dz = 8\int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{3}}^{3} dy\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y - 3 + y\right) =$$

$$= 8\int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{3}}^{3} (1{,}5 - 0{,}5y)\,dy = 8\int\limits_0^3 x\,dx\left(1{,}5y - 0{,}5\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{3}}^{3} = 8\int\limits_0^3 x\,dx\left(4{,}5y - \frac{9}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{36}\right) =$$

$$= 8\int\limits_0^3 \left(\frac{9}{4}x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{36}\right)dx = 8\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{36\cdot 6}\right)\Bigg|_0^3 = 27.$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного нижней половиной сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2 - z$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от оси Oz.

Решение. Построим тело. Вершина параболоида $x^2+y^2=2-z$ находится в точке (0; 0; 2). Уравнение $x^2+y^2+z^2-2z=0$ можно преобразовать к виду $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, т.е. оно задает сферу радиуса 1 с центром в точке (0; 0; 1). Итак, тело имеет вид, представленный на рис. 41.

Проекцией этого тела на плоскость Oxy является окружность. Ее уравнение можно получить, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2-z, \\ x^2+y^2+z^2-2z=0 \end{cases} \Rightarrow 2-z+z^2-2z=0 \Rightarrow z^2-3z+2=0 \Rightarrow z_1=1, z_2=2.$$

В плоскости $z=1$ уравнение линии пересечения имеет вид $x^2+y^2=1$. Уравнение проекции тела Ω на плоскость $z=0$ имеет тот же вид $x^2+y^2=1$.

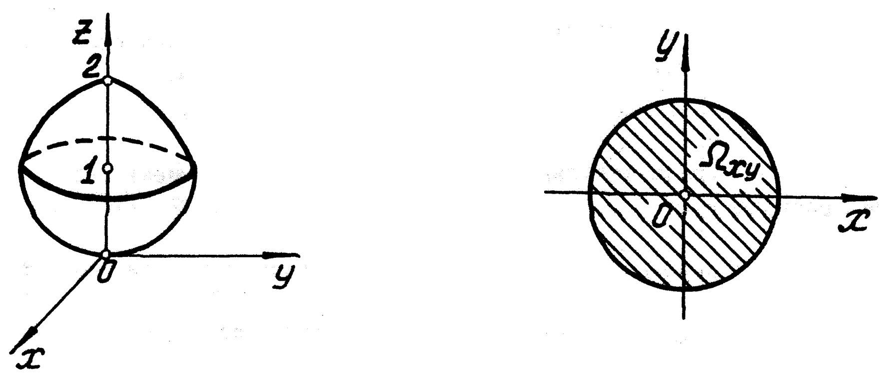


Рис. 41

Поскольку Ω_{xy} – окружность, удобно при вычислении перейти к цилиндрическим координатам $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$. В этих координатах уравнение границы Ω_{xy} имеет вид $\rho=1$; а угол φ удовлетворяет условию $0\le\varphi\le 2\pi$.

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах $\rho^2=2-z$, откуда $z=2-\rho^2$.

Уравнение сферы: $\rho^2+z^2-2z=0 \Rightarrow z=1\pm\sqrt{1-\rho^2}$. Для нижней половины $z=1-\sqrt{1-\rho^2}$.

Переменная плотность по условию задачи пропорциональна квадрату расстояния от оси Oz, т.е. $\gamma(x,y,z)=k(x^2+y^2)$. В цилиндрических координатах $\gamma=k\rho^2$. Так как тело симметрично относительно оси Oz, то, очевидно, что центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $x_ц=0$; $y_ц=0$. Для вычисления $z_ц$ воспользуемся формулой (9):

$$z_ц=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)zdxdydz\,.$$

Вычислим сначала массу тела M [формула (8)]:

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)dxdydz=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz \end{bmatrix}=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\varphi dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho(2-\rho^2-1+\sqrt{1-\rho^2})=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho^3-\rho^5+\rho^3\sqrt{1-\rho^2})d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{5}+\frac{\sqrt{(1-\rho^2)^5}}{5}-\frac{\sqrt{(1-\rho^2)^3}}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=k\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{13}{30}\pi k.$$

Теперь вычислим

$$\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)zdxdydz=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz \end{bmatrix}=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^2 z\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 zd\rho d\varphi dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}zdz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\frac{z^2}{2}\Bigg|_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3((2-\rho^2)^2-(1-\sqrt{1-\rho^2})^2)d\rho=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3(4-4\rho^2+\rho^4-1+$$

$$+2\sqrt{1-\rho^2}-1+\rho^2)d\rho=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi(2\rho^3-3\rho^5+\rho^7+2\rho^3\sqrt{1-\rho^2})d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2\rho^4}{4}-\frac{3\rho^6}{6}+\frac{\rho^8}{8}+\frac{2\sqrt{(1-\rho^2)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{(1-\rho^2)^3}}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{k}{2}\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{6}+\frac{1}{8}-\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{47}{120}k\pi.$$

По формуле (9) $z_ц=\dfrac{\frac{47}{120}k\pi}{\frac{13}{30}k\pi}=\dfrac{47}{52}.$

Итак, центр тяжести рассматриваемого тела имеет координаты (0; 0; $\frac{47}{52}$).

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Найти объем тела, ограниченного:

а) плоскостями $2x+3y+4z=12,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$

б) параболоидом $2z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2;$

в) поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6.2. Найти массу тела, ограниченного:

а) сферами $x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2+z^2=2Rz,$ если плотность $\gamma(x,y,z)=kz^2;$

б) поверхностями $z=xy,\ \ y=x,\ \ x=1,\ \ z=0,$ если плотность $\gamma(x,y,z)=kxy^2z^3;$

в) конусом $y=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $y=b,$ если плотность пропорциональна ординате точки и на единице расстояния от плоскости Oxz равна γ.

6.3. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=a,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$

Ответы

6.1. а) 12; б) $4\pi;$ в) $\dfrac{\pi}{6}.$

6.2. а) $\dfrac{59}{480}k\pi R^5;$ б) $\dfrac{k}{364};$ в) $\dfrac{\gamma\pi b^4}{4}.$

6.3. $C\left(\dfrac{1}{2};1;2\right).$

ПРИЛОЖЕНИЕ.
ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$.

2) Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 1$, заключенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в любой точке равна аппликате этой точки.

Вариант 2

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линией $y = 0$ и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

2) Найти площадь поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченную плоскостями $x = 2$, $y = 2$ $(x \geq 0, y \geq 0)$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y + 1$, $y^2 = x$, $x = 1$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.

4) Найти массу тела, ограниченного частью шара радиуса 2, находящейся в первом октанте, если плотность в любой точке равна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

Вариант 3

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x$, $y = x$.

2) Найти площадь поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 9$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + z^2 = 9$.

4) Найти массу тела, ограниченного сферическим слоем между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.

Вариант 4

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$ $(y > 0)$.

2) Найти площадь поверхности $4z = xy$, расположенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 16$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $4z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 4$.

4) Найти массу тела, ограниченного прямым круговым цилиндром радиуса 1, высотой 2, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от точки до оси симметрии цилиндра.

Вариант 5

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной окружностью с центром в начале координат радиусом 5 и двумя лучами, расположенными симметрично относительно оси Ox и образующими между собой угол $\frac{\pi}{3}$.

2) Найти площадь поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенную внутри цилиндра $z^2 = 10x$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x + y = 5$.

4) Найти массу тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$, если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

Вариант 6

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной осью Ox и верхней частью эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2) Найти площадь поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченную плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 18$, $x^2 + y^2 = 36$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = \sqrt{6}$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

Вариант 7

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 7(1 + \cos\varphi)$.

2) Найти площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанную цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$. (*Указание.* Перейти к полярным координатам.)

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 4$, $x + z = 2$, $y^2 = 2x$, $y = 0$ $(y > 0)$, если плотность равна ординате точки.

Вариант 8

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$, $x = 8$.

2) Найти площадь поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $8z = 64 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$, если плотность в каждой точке равна xyz.

Вариант 9

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $x = 9$, $y = 0$ $(y > 0)$.

2) Найти площадь поверхности тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 243$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 18z$ $(z \ge 0)$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $x^2 + y^2 = 9$ (вне цилиндра).

4) Найти массу тела, ограниченного сферическим слоем между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, если плотность обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Вариант 10

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линией $y = \sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и точку $A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ $(y \ge 0)$.

2) Найти площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 + x = 0$; $x^2 + y^2 - x = 0$ (внутри цилиндров).

4) Найти массу тела, ограниченного шаром радиусом R, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра шара и на единице расстояния равна γ.

Вариант 11

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16x$, $x = 2$.

2) Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ $(z \ge 0)$ между плоскостями $z = 4x$, $z = 2x$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2 = 2y$ и плоскостями $y + z = 1$, $2y + z = 2$, если плотность равна ординате точки.

Вариант 12

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

2) Найти площадь поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенную внутри цилиндра $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = x$.

4) Найти массу тела, ограниченного октантом шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

Вариант 13

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

2) Найти площадь поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2x$, заключенную между цилиндром $y^2 = x$ и плоскостью $x = 1$.

3) $\dfrac{z}{c} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z = 1$, если плотность равна сумме квадратов координат точки.

Вариант 14

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 - x^4$, $x \ge 0$.

2) Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$, заключенную между плоскостью Oxy и поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 \le 16$, $0 \le z \le 1$, если плотность пропорциональна квадрату расстояния от точки до оси цилиндра.

Вариант 15

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 1$ $(x \ge 0)$, $y = x \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$, $y = -x \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

2) Найти площадь поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 10x$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

4) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2\sqrt{5}$, $x + z = \sqrt{5}$, $y^2 = x\sqrt{5}$, $y = 0$ $(y > 0)$, если плотность равна ординате точки.

Вариант 16

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 6x$, $y = x$.

2) Найти площадь поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$ внутри цилиндров $x^2 + y^2 + 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 4$, если плотность равна аппликате точки.

Вариант 17

1) Найти центр тяжести равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 2, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от вершины прямого угла.

2) Найти площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанную цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. (*Указание*. Перейти к полярным координатам.)

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x$, $x^2 + y^2 = 49$, $z = 0$.

4) Найти массу шара радиуса 1, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра шара и на единице расстояния равна γ.

Вариант 18

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 8x$, $x = 1$.

2) Найти площадь поверхности параболоида $8y = x^2 + z^2$, заключенную в первом октанте. Параболоид ограничен плоскостью $y = 16$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + y^2 = 16$.

4) Найти массу части шара радиуса $\sqrt{8}$, находящейся в первом октанте, если плотность в каждой точке равна расстоянию от плоскости Oxy.

Вариант 19

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 1$, $y = 0$ $(y \ge 0)$.

2) Найти площадь поверхности тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 4z$ $(z \ge 0)$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

4) Найти массу тела, ограниченного прямым круговым цилиндром радиусом 3, высотой 1, если плотность равна квадрату расстояния точки от центра основания цилиндра.

Вариант 20

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ $(y > 0)$.

2) Найти площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

4) Найти массу шара радиуса 2, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ.

Вариант 21

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$ $(x \geq 0)$, $y = \pm x \cdot tg\dfrac{\pi}{6}$.

2) Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$, (внутри цилиндра).

4) Найти массу тела, ограниченного общей частью двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leq R$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, если плотность пропорциональна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

Вариант 22

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 1 + \cos\varphi$.

2) Найти площадь поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченную плоскостями $x = 4$, $y = 4$ $(x \geq 0, y \geq 0)$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $4z = 16 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, (вне цилиндра).

4) Найти массу части шара радиуса $\sqrt{2}$, находящейся в первом октанте, если плотность в каждой точке равна расстоянию до плоскости Oxy.

Вариант 23

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $y = x$.

2) Найти площадь поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 6x$, заключенную между цилиндром $y^2 = 3x$ и плоскостью $x = 3$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 4$.

4) Найти массу тела, ограниченного сферическим слоем между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, если плотность обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

Вариант 24

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.

2) Найти площадь поверхности $2z = xy$, расположенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 2$.

4) Найти массу тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 4z$ и плоскостью $z = \frac{1}{2}$, если плотность равна сумме квадратов координат точки.

Вариант 25

1) Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 5x$, $x = 5$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.

2) Найти площадь поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4x$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x + y = 2$.

4) Найти массу тела, ограниченного общей частью двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10z$, если плотность пропорциональна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
(задачи и упражнения)

Методические указания

Составитель ***Карпилова Ольга Михайловна***

Редактор Ю. Н. Л и т в и н о в а
Доверстка Ю. Н. Л и т в и н о в а

Подписано в печать 10.10.2008. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,75
Тираж 200 экз. Заказ . Арт. С-109/2008

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34