Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

Куйбышев 1990

Составители: А.Ф.Т а р а с к и н, А.А.Д е г т я р е в

УДК 519.210 751

Марковские процессы: Метод.указания/Сост. А.В.Тараскин, А.А.Дегтярев. Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1990. 27 с.

Методические указания включают краткие теоретические сведения и задачи по цепям Маркова и марковским процессам с непрерывным временем и дискретным пространством состояний и представляют собой дополнение к учебному пособию Тараскина А.Ф. и Дегтярева А.А. "Стохастический анализ в прикладных задачах управления и передачи информации". Рекомендуются студентам специальности "Автоматизированные системы управления" при изучении курса "Вероятностные процессы в автоматизированных системах", могут также использоваться студентами специальности "Прикладная математика" при изучении курса "Случайные процессы".

Рецензенты: Л.Н.Прокофьев, М.В.Швецкий

I. ЦЕПИ МАРКОВА

Последовательность случайных величин X_n, $n = 0,1,2,\dots$, принимающих значения из конечного или счетного множества $E=\{e_1, e_2, \dots\}$ (если специально не оговорено, то считаем $e_K = K$) называется дискретной цепью Маркова, если

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_K=i_K,\ K=\overline{1,n-1}\} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n = i\} = P_{ij}(n) \text{ для всех } i, j, i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in E \text{ и } n>0.$$

Вероятности $P_{ij}(n)$ называют переходными вероятностями цепи Маркова X_n, $n \geq 0$, на n-м шаге. Если переходные вероятности $P_{ij}(n)=P_{ij}$, $i,j \in E$, не зависят от n, то говорят, что цепь Маркова X_n, $n \geq 0$, однородна. Соответствующую матрицу $P=\|P_{ij}\|$, $i,j \in E$, называют матрицей переходных вероятностей за один шаг. Ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1: матрицы, обладающие этими свойствами, называются стохастическими. Распределение $P_i = P\{X_0=i\}$, $i \in E$, называют начальным распределением цепи Маркова X_n, $n \geq 0$. Цепь Маркова X_n, $n \geq 0$, называют конечной или счетной в зависимости от того, конечно или счетно множество состояний E.

Обозначим через $P_{ij}^{(m)}$ вероятность перехода однородной цепи Маркова из состояний i в состояние j за m шагов:

$$P_{ij}^{(m)} = P\{X_{n+m}=j \mid X_n=i,\ n=0,1,2,\dots\}.$$

Эти вероятности удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{r\in E} P_{ir}^{(s)} P_{rj}^{(m-s)}, \quad s\in\{0,1,\dots,m\}.$$

Для безусловной вероятности $P_j^{(t)}$ состояния j в целочисленный "момент времени" t имеем

$$P_j^{(t)} = P\{X_t=j\} = \sum_{r\in E} P_r P_{rj}^{(t)}.$$

Если $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_K$ — целочисленные моменты времени, а $i_0, i_1, \dots, i_K \in E$ — заданные состояния, то из определения однородной цепи Маркова имеем

$$P\{X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_K}=i_K\}=P_{i_0}^{(t_0)}\prod_{r=1}^{K}P_{i_{r-1}i_r}^{(t_r-t_{r-1})}.$$

Эргодическая теорема. Если для конечной однородной цепи Маркова существует m_0 такое, что $P_{ij}^{(m)}>0$ для $m\geq m_0$ и для всех $i,j\in E$, то существуют

$$\lim_{m\to\infty}P_{ij}^{(m)}=\pi_j>0,\quad i,j\in E.$$

Распределение $\pi=\{\pi_j,\ j\in E\}$ не зависит от начального состояния i цепи X_n, $n\geq 0$, и называется <u>предельным</u> или <u>финальным распределением</u> X_n. При этом финальные вероятности π_j являются решением системы линейных уравнений

$$\pi_j=\sum_{r\in E}\pi_r P_{rj},\quad j\in E,$$

удовлетворяющим условиям $\pi_j>0$ и $\sum_{j\in E}\pi_j=1$.

Задачи

<u>1.1.</u> Случайные величины X_n, $n=1,2,\dots$ независимы и $P\{X_n=1\}=p$, $P\{X_n=-1\}=1-p=q$. Положим $Y_0=0$, $Y_{n+1}=Y_n+X_{n+1}$. Является ли последовательность Y_n, $n=0,1,2,\dots$ цепью Маркова? Найти $P\{Y_n=m\}$, $m=0,1,2,\dots$.

<u>1.2.</u> Пусть X_n, $n=1,2$ – независимые случайные величины, $P\{X_n=1\}=1-P\{X_n=-1\}=p$.
Являются ли цепями Маркова последовательности случайных величин:
а) $Y_n=X_nX_{n+1}$; б) $Y_n=X_1X_2\dots X_n$; в) $Y_n=f(X_n,X_{n+1})$,
где $f(-1,-1)=1$, $f(-1,1)=2$, $f(1,-1)=3$, $f(1,1)=4$?
Для цепей Маркова найти вероятности перехода за один шаг.

<u>1.3.</u> Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид

$$P=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix},$$

а начальное распределение определяется вектором (0,7; 0,2; 0,1).

Найти:

а) безусловные вероятности состояний в момент $t=2$;

б) вероятность того, что в моменты $t=0,1,2,3$ состояниями цепи будут, соответственно, состояния 1,3,3,2;

в) финальные вероятности.

<u>1.4.</u> Пусть X_n ($n=0,1,2,\dots$) – цепь Маркова с множеством состояний $E=\{1,2,3\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P=\begin{pmatrix}0 & \alpha & 1-\alpha\\ \alpha & 0 & 1-\alpha\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Определим последовательность Y_n ($n=0,1,2,\dots$), полагая

$$Y_n=\begin{cases}1 \text{ при } X_n<3;\\ 2 \text{ при } X_n=3.\end{cases}$$

Показать, что последовательность $\{Y_n\}$ образует цепь Маркова.

<u>1.5.</u> Случайная величина X принимает лишь значения: $-1,0,1$. Свои значения величина X изменяет только в моменты времени t_1, t_2, ..., t_n, ..., причем значения, которые X принимает в эти моменты времени, образуют однородную марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

В начальный момент времени $X=-1$.

Найти:

а) среднее значение случайной величины X после первых трех переходов ($n=3$) марковской цепи;

б) финальные вероятности;

в) асимптотическое (при $n\to\infty$) среднее значение случайной величины X.

<u>1.6.</u> Частица, совершая случайные блуждания, может находиться лишь в точках с целочисленными абсциссами $i=-N,\dots,-2,-1,0,1,2,\dots,N$ ($N>0$). При этом элементы матрицы переходных вероятностей P задаются равенствами:

$$P_{ij}=\begin{cases}(N-i)/2N & \text{при } j=i+1,\\ (N+i)/2N & \text{при } j=i-1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В начальный момент времени частица находится в состоянии $i = N$. Пусть $N = 2$.

I. Написать вектор начального распределения вероятностей и матрицу перехода за один шаг;

2. Найти:

а) среднее значение абсцисс положения частицы после первых трех переходов ($n = 3$);

б) финальные вероятности;

в) асимптотическое (при $n \to \infty$) среднее значение абсцисс положения частицы.

I.7. Цепь Маркова имеет матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I/2 & I/2 \\ I/2 & 0 & I/2 \\ I/2 & I/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу переходных вероятностей за два шага и финальные вероятности цепи.

I.8. Найти финальные вероятности цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

I.9. Частица "блуждает" по целочисленным точкам отрезка $[0, n]$. Их каждой точки k ($1 < k < n-1$) частица на следующем шаге с вероятностью p оказывается в соседней справа точке $k+1$ и с вероятностью q ($p+q=1$) – в соседней слева точке $k-1$. Оказавшись в точке I, частица на следующем шаге с вероятностью $(1-\delta_0)q$ попадает в точку 0, с вероятностью $\delta_0 q$ остается на месте (в точке I). Аналогично, оказавшись в точке $n-1$, частица на следующем шаге с вероятностью $(1-\delta_n)p$ переходит в точку n и с вероятностью $\delta_n p$ остается на месте. Записать матрицу переходных вероятностей за один шаг. Рассмотреть крайние случаи: $\delta_0 = \delta_n = 0$; $\delta_0 = \delta_n = 1$.

I.I0. На вход трехразрядного двоичного счетчика в моменты t_i (i = I,2,...; $t_0 < t_1 < \ldots$) подаются сигналы X_i, которые представляют собой взаимно независимые дискретные случайные величины, равновероятно принимающие значения "0" и "I". Каждый раз, когда на вход счетчика поступает "I", его показание изменяется: увеличивается на единицу, если такое увеличение не приводит к "переполнению" счетчика; в случае "переполнения" происходит обнуление всех разрядов счетчика. Выяснить, является ли последовательность показаний счетчика, соответствующая последовательности входных сигналов $\{X_i\}$, цепью Маркова. Если да, то записать для нее матрицу переходных вероятностей.

I.II. Испытуемый S реагирует одним из трех возможных способов: A_0, A_1 или A_2. Реакция A_0 соответствует состоянию, в котором может произойти смена реакции. За реакции A_1 и A_2 испытуемый получает поощрение с вероятностями p_1 и p_2, соответственно. Если поощрение реализуется, то в следующем эксперименте S реагирует тем же способом. В противном случае S переходит в состояние A_0 смены реакции. Находясь в состоянии A_0, испытуемый с вероятностью $1-q$ остается в нем до следующего эксперимента либо реагирует способом A_1 или A_2 с одинаковыми вероятностями $q/2$. Рассмотреть марковскую цепь, состояниями которой являются состояния испытуемого, и определить ее матрицу переходных вероятностей.

I.I2. Модель Эренфестов. В двух сосудах I и II находится n молекул газа. Случайным образом выбирается одна из n молекул и перемещается из своего сосуда в другой. Составить матрицу переходных вероятностей за один шаг.

I.I3. Найти финальные вероятности в модели Эренфестов (см. задачу I.I2).

I.I4. Неотрицательные целочисленные случайные величины X_n, n = I,2,... независимы и одинаково распределены. Показать, что последовательность сумм

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

образует цепь Маркова. Записать матрицу переходных вероятностей за один шаг.

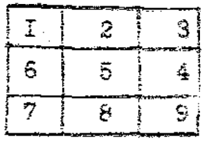
I.I5. Серии успехов. Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли и условимся говорить, что в момент n мы наблюдаем состояние E_0, если n-е испытание привело к неудаче, и состояние E_k (k = I,..., n), если последняя неудача наблюдалась при испытании с номером $n-k$ (предполагается, что нулевое испытание привело к неудаче). Другими словами, индекс k состояния E_k указывает на длину серии успехов, оканчивающейся на n-м месте. Составить матрицу переходных вероятностей за один шаг.

1.16. Найти матрицы переходных вероятностей для марковских цепей, описывающих следующие процессы:

а) рассмотрим серию бросаний монеты с вероятностью выпадения решетки, равной p. Состояние процесса после n переходов (бросаний монеты) определим как разность между числом выпадений решетки и числом выпадений герба;

б) в двух урнах размещены N черных и N белых шаров так, что каждая содержит по N шаров. Состоянием системы является число белых шаров в первой урне. На каждом шаге наугад выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами;

в) белую крысу помещают в лабиринт, изображенный на рисунке. Крыса передвигается по ячейкам случайным образом, т.е. если ячейка имеет k выходов, то крыса выбирает каждый из них с вероятностью $1/k$. В каждый момент времени крыса обязательно переходит в одну из соседних ячеек. Состояние системы – это номер ячейки, в которой находится крыса.



1.17. N шаров размещены в двух урнах A и B. В момент времени t (t = 1,2,....) из общего числа N шаров случайно (все выборы равновероятны) выбирается один шар и помещается с вероятностью p в урну A и с вероятностью q в урну B. Состояние системы при каждом испытании представляется числом шаров в урне A. Определить матрицу переходных вероятностей марковской цепи, описывающей серию таких испытаний.

1.18. Предположим, что в момент t в урне A лежит k шаров. В момент $t+1$ с вероятностью, пропорциональной числу содержащихся в ней шаров, выбирается одна из урн (урна A выбирается с вероятностью k/N, а урна B – с вероятностью $(N-k)/N$). В выбранную урну кладется шар, который предварительно извлекается из урны A или из урны B с вероятностью p и q ($p+q=1$) соответственно. Определить матрицу переходных вероятностей этой марковской цепи.

1.19. Рассмотрим случайное блуждание по одномерной целочисленной решетке с переходными вероятностями $p_{i\,i+1}=p$, $p_{i\,i-1}=q$ ($0<p<1$, $p+q=1$) для всех целых i. Определить $p_{0m}^{(n)}$ и $p_{00}^{(n)}$.

1.20. $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ – цепь Маркова с начальным распределением p_k, $k\in E$. Выразить через соответствующие переходные вероятности условные вероятности:

а) $P\{X_0=i \mid X_n=j\}$;

б) $P\{X_r=i \mid X_0=i,\ X_n=j\}$, где $r<n$.

1.21. N черных и N белых шаров разложены по двум урнам так, что каждая урна содержит N шаров. Число черных шаров в первой урне определяет состояние системы. На каждом шаге случайно выбирается по одному шару из каждой урны и эти шары меняются местами. Найти p_{ij} и финальные вероятности π_k.

1.22. Две конечные цепи Маркова с одним и тем же множеством состояний имеют матрицы переходных вероятностей P_1 и P_2 соответственно. Показать, что матрицы

$$P=P_1P_2 \quad \text{и} \quad P^*=P_2P_1$$

являются стохастическими матрицами.

1.23. Дана матрица $P=\|p_{ij}\|$ переходных вероятностей конечной цепи Маркова, которая является дважды стохастической (т.е. $\sum_i p_{ij}=1$, $i\in E$). Известно, что цепь эргодическая. Найти финальные вероятности.

1.24. Каждой стохастической матрице соответствует цепь Маркова, для которой она является матрицей одношаговых переходных вероятностей. Однако не всякая стохастическая матрица может служить в качестве матрицы двухшаговых переходных вероятностей цепи Маркова. В частности, стохастическая матрица второго порядка является матрицей двухшаговых переходных вероятностей тогда и только тогда, когда сумма ее диагональных элементов больше или равна единице. Докажите это.

1.25. Рассмотрим повторяющиеся независимые испытания, для каждого из которых возможны два исхода: $У$ или $Н$. Найти распределение числа испытаний, требуемых для наступления события $УН$.

1.26. Отрезок AB разделен на m равных интервалов. Частица может находиться только в середине интервалов, перемещаясь скачками на величину интервала по направлению к точке B с вероятностью p, а по направлению к точке A – с вероятностью $q=1-p$. В крайних точках отрезка AB имеются отражающие экраны, которые при достижении частицей точки A или B возвращают ее в исходное положение. Определить финальные вероятности π_k, $k=\overline{1,m}$ нахождения частицы в каждом интервале.

1.27. Два игрока A и B продолжают игру до полного разорения одного из них. Вероятности выигрывания каждой партии для этих игроков равны соответственно p и q ($p+q=1$). В каждой партии выигрыш одного (проигрыш другого) равен одному рублю, а общий капитал этих игроков составляет m рублей. Определить вероятности разорения игроков, если до игры игрок A имел j рублей ($j=1,2,\ldots,m-1$).

2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ

Пусть $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\ldots\}$ – некоторое конечное или счетное множество. Рассмотрим случайный процесс X_t, $t\geq 0$, со значениями в $\mathcal{X}$. Если для любого n и $t_1<t_2<\ldots<t_n$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathcal{X}$

$$P\{X_{t_n}=x_n\,|\,X_{t_1}=x_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}=$$
$$=P\{X_{t_n}=x_n\,|\,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}, \tag{1}$$

то X_t называется <u>марковским процессом с дискретным пространством состояний.</u> Функция

$$p(s,x,t,y)=P\{X_t=y/X_s=x\},\quad 0\leq s\leq t;\ x,y\in\mathcal{X}, \tag{2}$$

называется <u>переходной функцией</u>, или <u>вероятностью перехода марковского процесса.</u> Из определения марковского процесса получаем его конечномерные распределения:

$$P\{X_{t_1}=x_1,\ldots,X_{t_n}=x_n\}=P\{X_{t_1}=x_1\}\prod_{k=1}^{n-1}p(t_k,x_k,t_{k+1},x_{k+1}). \tag{3}$$

Переходная функция обладает следующими свойствами:

1. $0\leq p(s,x,t,y)\leq 1$.

2. $\sum\limits_{y\in\mathcal{X}}p(s,x,t,y)=1$.

3. $p(t,x,t,y)=\begin{cases}1, & y=x;\\ 0, & y\neq x.\end{cases}$

4. Для любых $s<\tau<t$ переходная функция удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чепмена:

$$p(s,x,t,y)=\sum_{z\in\mathcal{X}}p(s,x,\tau,z)\,p(\tau,z,t,y). \tag{4}$$

Если $p(s,x,t,y)=p(0,x,t-s,y)$, то марковский процесс называется <u>однородным.</u> Если состояния процесса занумерованы определенным образом, то удобно пользоваться обозначениями $p(s,x_i,t,x_k)=p_{ik}(s,t)$ в общем случае, и $p(0,x_i,t,x_k)=p_{ik}(t)$ – в однородном случае.

Заметим, что одна и та же вероятность перехода может отвечать различным марковским процессам, если различаются распределения начального значения X_0. Задание "начального распределения" $p_k=P\{X_0=x_k\}$, $x_k\in\mathcal{X}$, наряду с вероятностью перехода, вполне определяет конечномерные распределения марковского процесса.

Предположим, что вероятности перехода удовлетворяют следующим условиям:

I. Каждому состоянию $x_k\in\mathcal{X}$ соответствует такая непрерывная функция $q_k(t)\geq 0$, что при $h\to 0$

$$\frac{1-p_{kk}(t,t+h)}{h}\longrightarrow q_k(t) \tag{5}$$

равномерно по t.

II. Каждой паре состояний $x_i,\ x_k\in\mathcal{X}$, $i\neq k$, соответствуют такие непрерывные функции $q_{ik}(t)$, что при $h\to 0$

$$\frac{p_{ik}(t,t+h)}{h}\longrightarrow q_{ik}(t) \tag{6}$$

равномерно по t и при фиксированном k переход к пределу в (6) равномерен по i.

Функции $q_{ik}(t)$ и $q_k(t)$, называемые <u>инфинитезимальными характеристиками марковского процесса,</u> связаны между собой равенствами

$$q_k(t)=\sum_{i\neq k}q_{ik}(t).$$

При предположениях I и II вероятности перехода удовлетворяют следующим двум системам дифференциальных уравнений Колмогорова:

1) прямые уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial t}=-p_{ik}(s,t)q_k(t)+\sum_j p_{ij}(s,t)q_{jk}(t);$$

2) обратные уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial s}=q_i(s)p_{ik}(s,t)-\sum_j q_{ij}(s)p_{jk}(s,t).$$

В случае однородного марковского процесса его инфинитезимальные характеристики постоянны: $q_{ik}(t)=q_{ik}$, $q_k(t)=q_k$, а прямые и обратные уравнения Колмогорова получают вид

$$p'_{ik}(t)=-p_{ik}(t)q_k+\sum_j p_{ij}(t)q_{jk} \quad \text{(прямые уравнения)}, \qquad (7)$$

и

$$p'_{ik}(t)=-q_i p_{ik}(t)+\sum_j q_{ij}\,p_{jk}(t) \quad \text{(обратные уравнения)}. \qquad (8)$$

Распределение $\{p_k\}$ на $\mathscr{X}$ называется <u>стационарным распределением однородного марковского процесса</u>, если

$$p_k=\sum_i p_i\,p_{ik}(t) \quad \text{для любого } k \text{ и всех } t\gg 0\,. \qquad (9)$$

Предположим, что для процесса X_t, $t\geqslant 0$, существует хотя бы одно состояние $x_j\in\mathscr{X}$, куда возможен переход из любого состояния i за время $h>0$ с соответствующими вероятностями $p_{ij}(h)\geqslant \delta>0$ (подчеркнем, что в этом условии h одно и то же для всех состояний $x_i\in\mathscr{X}$). Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а. Существует единственное стационарное распределение $\{p_k\}$ и

$$\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t)=p_k>0\,,\quad k=1,2,\dots \qquad (10)$$

Если, кроме того, p_k таковы, что $\sum_k p_k q_k<\infty$, то

$$q_k p_k=\sum_i p_i\,q_{ik}\,,\quad k=1,2,\dots. \qquad (11)$$

Распределение вероятностей $\{p_k\}$, удовлетворяющее соотношениям (10), иногда называют <u>финальным распределением марковского процесса.</u> Для определения финального распределения согласно теореме следует найти решение системы алгебраических уравнений (11), удовлетворяющее условиям $p_k>0$ и $\sum_k p_k=1$.

З а д а ч и

<u>2.1.</u> Пусть X_t, $t\geqslant 0$, – однородный марковский процесс с дискретным пространством состояний, с переходными вероятностями $p_{ij}(t)$. Показать, что

$$P\{X_{t_1}=j_1,\dots,X_{t_n}=j_n\,|\,X_{s_1}=i_1,\dots X_{s_m}=i_m,X_s=i\}=$$

$$=P\{X_{t_1}=j_1,\dots X_{t_n}=j_n\,|\,X_s=i\}=p_{ij_1}(t_1-s)\cdots p_{j_{n-1}j_n}(t_n-t_{n-1})$$

для любых состояний в произвольно взятые моменты времени $s_1<\dots<s_m<s<t_1<\dots<t_n$.

<u>2.2.</u> Пусть X_t, $t\geqslant 0$, – однородный марковский процесс с дискретным пространством состояний, с переходными вероятностями $p_{ij}(t)$ и с распределением вероятностей начального состояния $p_i^0=P\{X_0=i\}$ ($\sum_i p_i^0=1$). Обозначим $p_j(t)=P\{X_t=j\}$. Показать, что $p_j(t+s)=\sum_i p_i(s)\,p_{ij}(t)$, $s\geqslant 0$.

<u>2.3.</u> В некоторой стране революции, направленные против "реакции", образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью λ. Доля революций, умеющих защищаться, составляет α. Умеющая защищаться революция устанавливает свою власть навсегда, а не умеющая защищаться сохраняет свою власть в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром μ, после чего наступает период реакции. Какова вероятность того, что в будущий момент времени t в стране будет господствовать реакция, если она господствует в настоящее время?

<u>2.4.</u> Система находится в состоянии "1", если она работоспособна, и в состоянии "0", если она вышла из строя. Предположим, что случайный процесс функционирования этой системы X_t, $t\geqslant 0$, – марковский процесс чистой гибели, для которого $P\{X_{t+h}=0|X_t=1\}=\mu(t)h+o(h)$. Найти вероятность выхода из строя системы до момента времени t, если интенсивность гибели $\mu(t)$ – положительная и непрерывная на $(0,\infty)$ функция.

<u>2.5.</u> П р о ц е с с П о й а . Это неоднородный процесс чистого роста с зависящим от времени параметром $\lambda_n(t)=(1+an)/(1+at)$. Показать, что решение с начальным условием $p_0(0)=1$ имеет вид

$$p_0(t)=(1+at)^{-1/a},$$

$$p_n(t)=t^n(1+at)^{-n-1/a}\,\frac{(1+a)(1+2a)\dots(1+(n-1)a)}{n!}\,.$$

Показать, что математическое ожидание и дисперсия равны соответственно t и $t(1+at)$ (с помощью дифференциальных уравнений).

2.6. Пусть X_t – марковский процесс чистого роста. Предположим, что $p_{k,k+1}(h)=\lambda h+o(h)$, если k нечетно, и $p_{k,k+1}(h)=\mu h+o(h)$, если k четно. Полагая $X_0=0$, найти вероятности $p_1(t)=P\{X_t$ – нечетно$\}$ и $p_2(t)=P\{X_t$ – четно$\}$.

2.7. В условиях предыдущей задачи найти $MX_t=m_t$.

2.8. Рассмотрим процесс чистой гибели X_t, $t\geq 0$, для которого $\mu_n=n\mu$, $n=1,2,\dots$, т.е. $P\{X_{t+h}=j|X_t=k\}=0$ при $j>k$, $t>0$, $k>0$. Предположим, что $X_0=i$. Найти $p_n(t)=P\{X_t=n\}$, $m_t=MX_t$ и $\sigma_t^2=DX_t$.

2.9. Однородный процесс Маркова имеет два состояния: 0 и 1. Время пребывания в состояниях 0 и 1 распределено экспоненциально с параметрами $\lambda>0$ и $\mu>0$ соответственно. Найти вероятность $p_{00}(t)$ нахождения процесса в состоянии 0 в момент t, если в момент 0 он находился в состоянии 0.

2.10. Пусть в предыдущей задаче $\lambda=\mu$, а N_t – число моментов изменения состояний процесса за время $t\geq 0$. Найти распределение вероятностей случайной величины N_t.

2.11. Имеется два трансатлантических кабеля, каждый из которых может передавать одновременно только одно телеграфное сообщение. Время до отказа каждого из них имеет одно и то же экспоненциальное распределение с параметром λ. Время ремонта каждого кабеля имеет одно и то же экспоненциальное распределение с параметром μ. При условии, что в момент 0 оба кабеля находятся в рабочем состоянии, найти вероятность того, что если в момент t одновременно поступят два сообщения, то они найдут оба кабеля исправными.

2.12. Процессом линейного роста с иммиграцией называют процесс рождения и гибели с интенсивностями роста $\lambda_n=n\lambda+a$ и гибели $\mu_n=n\mu$, где $\lambda>0$, $\mu>0$, $a>0$. Составить прямые уравнения Колмогорова для переходных вероятностей такого процесса. Найти математическое ожидание $m_t=MX_t$ этого процесса, если начальное состояние $X_0=i$ задано. Исследовать поведение m_t при $t\to\infty$.

2.13. Рассмотрим процесс X_t, $t\geq 0$, линейного роста без иммиграции ($a=0$), для которого $\lambda=\mu$ и $P\{X_0=1\}=1$. Показать, что вероятности $p_n(t)=P\{X_t=n|X_0=1\}$, $n=0,1,2,\dots$ определяются формулами

$$p_0(t)=\frac{\lambda t}{1+\lambda t};$$

$$p_n(t)=\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1+\lambda t)^{n+1}}.$$

2.14. Найти дисперсию процесса линейного роста с иммиграцией (см. задачу 2.12) и исследовать ее поведение при $t\to\infty$.

2.15. Процесс Юла является примером процесса чистого роста. Для него $P\{X_{t+h}=n+1|X_t=n\}=n\lambda h+o(h)$. Пусть известен начальный объем популяции: $X_0=N$. Найти $p_n(t)=P\{X_t=n+N|X_0=N\}$, $n=0,1,2,\dots$ и показать, что процесс X_t, $t\geq 0$ является регулярным (т.е. $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)=1$).

2.16. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса Юла X_t, $t\geq 0$ (см. задачу 2.15), начальное состояние которого $X_0=N$ фиксировано.

2.17. Пусть X_t, $t\geq 0$ – процесс Юла с параметром λ и начальным состоянием $N=1$ (см. задачу 2.15). Предположим, что первый индивидуум может погибнуть, причем вероятность гибели в интервале времени $(t,\ t+h)$ при условии, что индивидуум не погиб до момента t, равна $\mu h+o(h)$. Найти распределение общего числа потомков всех поколений единственного индивидуума в момент гибели "родоначальника".

2.18. Процесс чистой гибели, для которого $P\{X_{t+h}=n-1|X_t=n\}=n\mu h+o(h)$, в начальный момент находится в состоянии N. Найти $p_n(t)=P\{X_t=n|X_0=N\}$, m_t, DX_t.

2.19. А в т о п а р к. В автопарк, рассчитанный на N мест, прибывает пуассоновский поток машин с интенсивностью λ до тех пор, пока имеются свободные места. Получить дифференциальные уравнения для вероятностей $p_n(t)$ того, что ровно n мест заняты, если время пребывания машины в автопарке имеет показательное распределение с параметром μ.

2.20. Предположим, что некоторый механизм подвержен отказам двух типов. Пусть вероятность отказа первого типа в интервале времени $(t,\ t+h)$ равна $\lambda_1 h+o(h)$, а вероятность отказа второго типа в том же интервале равна $\lambda_2 h+o(h)$. В состоянии отказа производится ремонт механизма, длительность которого имеет показательный закон распределения с параметром μ_1 или μ_2 в зависимости от типа отказа. Найти вероятность того, что механизм работает в момент t, если он работал в нулевой момент времени.

2.21. Система состоит из N идентичных компонент, каждая из которых работает независимо от других случайное время до отказа. Предположим, что время до отказа имеет показательное распределение с параметром λ. Когда какая-либо компонента отказывает, она ремонтируется. Время ремонта случайно и распределено по показательному закону с параметром μ. Говорят, что система находится в состоянии n в момент t, если в этот момент ровно n компонент находится в ремонте. Этот процесс является процессом рождения и гибели. Найти его инфинитезимальные характеристики.

2.22. Предположим, что в предыдущей задаче вначале все N компонент работают. Найти распределение времени до первого момента, когда в системе будет две неработающие компоненты.

2.23. Непрерывный аналог модели Эренфестов. Имеется $2N$ шаров, занумерованных от 1 до $2N$. В момент 0 каждый шар с равной вероятностью может быть помещен в одну из двух урн. В дальнейшем шары независимым образом перемещаются в случайные моменты времени из одной урны в другую в соответствии со следующими правилами. Шар с вероятностью $h/2+o(h)$ попадает из одной урны в другую в течение интервала $(t, t+h)$ и с вероятностью $1-h/2+o(h)$ остается в той же урне, в которой он находился в момент t. Перемещения на непересекающихся интервалах времени независимы. Пусть X_t – число шаров в урне I в момент t. Обозначим

$$p_{jk}(t)=P\{X_t=k/X_0=j\};\quad j,k=0,1,\dots,2N.$$

Доказать формулу

$$g(t,z)=\sum_{k=0}^{2N} p_{jk}(t)z^k=2^{-2N}\left[1-e^{-t}+(1+e^{-t})z\right]^j\left[1+e^{-t}+(1-e^{-t})z\right]^{2N-j}.$$

2.24. Рассмотрим процесс X_t рождения и гибели с линейным ростом с параметрами λ, μ и $a=0$ (см. задачу 2.12). Предположим, что $X_0=1$. Найти распределение числа живущих индивидуумов в момент первой гибели.

2.25. Для процесса X_t рождения и гибели с линейным ростом при $\lambda=\mu$ (см. задачу 2.12) доказать, что $u(t)=P\{X_t=0/X_0=1\}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t)=\frac{1}{2}\int_0^t 2\lambda e^{-2\lambda\tau}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t 2\lambda e^{-2\lambda\tau}[u(t-\tau)]^2 d\tau.$$

2.26. Показать, что $u(t)$ в условиях задачи 2.25 удовлетворяет дифференциальному уравнению Рикатти

$$u'(t)+2\lambda u(t)=\lambda+\lambda u^2(t),\quad u(0)=0.$$

2.27. Найти $u(t)$ в условиях задачи 2.25.

2.28. В условиях задачи 2.25 найти $P\{X_t=0/X_0=1, X_{t_1}=0\}$ при $0<t<t_1$.

2.29. Время жизни T радиоактивного атома распределено по показательному закону с параметром λ. Предположим, что в момент 0 мы начинаем наблюдать N независимых радиоактивных атомов, состояние которых описывается случайными величинами X_t^i, $i=\overline{1,N}$:

$$X_t^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й атом радиоактивен в момент } t; \\ 1, & \text{если } i\text{-й атом не радиоактивен в момент } t. \end{cases}$$

Показать, что при $t \ll 1/\lambda$ и достаточно большом N процесс

$$Y_t=\sum_{i=1}^{N} X_t^i$$

хорошо аппроксимируется пуассоновским процессом с интенсивностью λN.

2.30. Предположим, что в задаче 2.29 нельзя считать $t \ll \lambda^{-1}$. Является ли процесс Y_t:

а) процессом с независимыми приращениями?

б) стационарным?

в) марковским?

2.31. Найти стационарное распределение для процесса рождения и гибели с линейным ростом (см. задачу 2.12) при $\lambda<\mu$.

2.32. Система массового обслуживания (СМО) состоит из одного обслуживающего прибора. На вход поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Время обслуживания одного требования распределено по показательному закону с параметром μ. Если поступившее требование застает прибор занятым, то оно покидает систему (теряется). Найти переходные вероятности системы за время $t>0$ и финальные вероятности системы.

2.33. Телефонный узел имеет m каналов. Моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ. Вызовы принимаются (обслуживаются), если имеется свободный канал. В противном случае они теряются. Продолжительность каждого разговора имеет показательное распределение с параметром μ. Длительность отдельных разговоров – независимые случайные величины. Найти стационарное распределение числа занятых каналов.

2.34. СМО состоит из одного прибора и имеет на входе пуассоновский поток требований интенсивности λ. Время обслуживания требования – показательное с параметром μ. Требование, которое застает прибор занятым, присоединяется с вероятностью p $(0 < p < 1)$ к очереди. Описать эту модель как случайный процесс рождения и гибели и найти финальные вероятности системы.

2.35. СМО состоит из m приборов. На вход поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ. Время обслуживания каждого требования имеет показательное распределение с параметром μ. Поступившее в систему требование начинает обслуживаться сразу, если свободен хотя бы один прибор, и становится в очередь, если все приборы заняты. Состояние системы задается числом находящихся в ней требований. Найти финальные вероятности состояний системы.

2.36. Рассмотрим СМО, отличающуюся от описанной в задаче 2.35 тем, что число мест ожидания в очереди ограничено и равно K. Найти финальные вероятности состояний системы.

2.37. Процесс рождения и гибели с параметрами $\lambda_n = \lambda q^n$, $0 < q < 1$, $\lambda > 0$, $\mu_n = \mu > 0$, $\mu_0 = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ можно интерпретировать как модель СМО с ограничением. Найти стационарное распределение состояний системы.

2.38. Процесс рождения и гибели с параметрами $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$; $\mu_n = \mu$; $n = 1, 2, \ldots$; $\mu_0 = 0$ можно интерпретировать как модель СМО с ограничением. Найти стационарное распределение состояний системы.

ОТВЕТЫ

Раздел I

1.1. $$P\{X_n = m\} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}}, & \text{если } n-m \text{ четно;} \\ 0, & \text{если } n-m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

1.2. а) нет, если $p \neq q$; да, если $p = q = 1/2$.

б) да, $P(X_{t+1} = 1 | X_t = 1) = p$, $P(X_{t+1} = 1 | X_t = -1) = 1 - p$.

в) да, $p_{11} = p_{23} = p_{31} = p_{43} = 1 - p$, $p_{12} = p_{24} = p_{32} = p_{44} = p$.

1.3. а) (0,345; 0,336; 0,279);

б) 0,0336;

в) (16/47, 17/47, 14/47).

1.5. а) $m^x = 1/5$;

б) (1/3, 1/3, 1/3);

в) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^x = 0$.

1.6. 1. (0,0,0,0,1);
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. а) $m^x = 1/4$;

б) (1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16);

в) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^x = 0$.

1.7. $$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3.$$

1.8. $$\pi_1 = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}; \quad \pi_2 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}.$$

1.11. $p_{00} = 1 - c$; $p_{01} = p_{02} = c/2$; $p_{10} = 1 - p_1$; $p_{11} = p_1$;

$p_{20} = 1 - p_2$; $p_{22} = p_2$; $p_{12} = p_{21} = 0$.

1.13. $\pi_k = C_N^k / 2^N$.

1.16. а)
$$P_{jk} = P\left\{\begin{array}{l}\text{разность между числом выпадения решетки и} \\ \text{числом выпадения герба равна } k \text{ после } n+1 \\ \text{бросаний / эта разность равна } j \text{ после } n \\ \text{бросаний}\end{array}\right\} =$$
$$= \begin{cases} p, & \text{если } k = j+1; \\ 1-p, & \text{если } k = j-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

P_{jk} не зависит от k.

б)
$$p_{jk} = P\left\{\begin{array}{l}k \text{ белых шаров в первой урне после } n+1 \\ \text{перекладывания } / \, j \text{ белых шаров в первой} \\ \text{урне после } n \text{ перекладываний}\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (j/N)^2, & \text{если } k=j-1,\ j=1,2,\ldots,N; \\ 2(j/N)(N-j)/N, & \text{если } k=j,\ j=0,1,\ldots,N; \\ (1-j/N)^2, & \text{если } k=j+1,\ j=0,1,\ldots,N-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.17.
$$p_{ik} = \begin{cases} \frac{N-i}{N}p, & \text{если } k=i+1; \\ \frac{i}{N}p + \frac{N-i}{N}q, & \text{если } k=i; \\ \frac{i}{N}q, & \text{если } k=i-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.18.
$$p_{ik} = \begin{cases} iq/N, & \text{если } k=i+1; \\ ip/N+(N-i)q/N, & \text{если } k=i,\ (i=1,2,\ldots,N-1); \\ (N-i)p/N, & \text{если } k=i-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$p_{00} = p_{NN} = 1.$

1.19. $p_{0x}^{(n)} = C_n^{(x+n)/2}\, p^{(x+n)/2}$

$$p_{00}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{нечетно;} \\ C_n^{n/2} p^{n/2} q^{n/2}, & \text{если } n - \text{четно.} \end{cases}$$

1.20. а) $P\{X_0 = i \mid X_n = j\} = [p_i p_{ij}^{(n)}] / [\sum_{k\in E} p_k p_{kj}^{(n)}]$;

б) $P\{X_n = e \mid X_0 = i, X_r = j\} = p_{ie}^{(n)} p_{ej}^{(r-n)} / p_{ij}^{(r)}$.

1.21. $p_{ii} = 2\frac{i(N-i)}{N^2}$; $p_{i,i-1} = \left(\frac{i}{N}\right)^2$;

$p_{i,i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2$; $\pi_k = (C_N^k)^2 / C_{2N}^N$.

1.23. $\pi_k = 1/N$; $k = 1,2,\ldots,N$.

1.27. Вероятности разорения игрока A:

$P_{*j}(A) = \left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m-j}\right] / \left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^m\right]$ при $p \neq q$;

$P_{*j}(A) = 1 - \frac{j}{m}$ при $p = q$ $(j=1,2,\ldots,m-1)$.

Вероятности разорения игрока B:

$P_{*j}(B) = 1 - P_{*j}(A)$

Раздел 2

2.3. $p_{00}(t) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(r_2+\lambda)e^{r_1 t} - (r_1+\lambda)e^{r_2 t}\right]$, где

r_1 и r_2 – корни характеристического уравнения

$r^2 + (\lambda+\mu)r + \alpha\lambda\mu = 0.$

2.4. Указание. Составить прямое уравнение Колмогорова для $p_{10}(0,t)$:

$p_{10}'(0,t) = \mu(t)\, p_{11}(0,t)$;

$p_{11}(0,t) = 1 - p_{10}(0,t)$; $p_{10}(0,0) = 0$.

Ответ: $p_{10}(0,t) = 1 - \exp\{-\int_0^t \mu(s)\,ds\}$.

2.6. Указание. Вывести дифференциальные уравнения

$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$;

$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)$,

для которых выполняются начальные условия

$p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 1$; $p_1'(0) = \mu$; $p_2'(0) = -\mu$.

Ответ: $p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$; $p_1(t) + p_2(t) = 1$.

2.7. Указание. Записать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_{0,2k}'(t) = -\lambda p_{0,2k}(t) + \mu p_{0,2k+1}(t); \\ p_{0,2k+1}'(t) = -\mu p_{0,2k+1}(t) + \lambda p_{0,2k}(t). \end{cases}$$

Умножить первое уравнение на $2k$, второе – на $2k+1$, затем сложить оба уравнения. Решить полученное уравнение

$$m_t' = \lambda p_2(t) + \mu p_1(t); \quad m_0 = 0.$$

Ответ: $$m_t = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu} t + \frac{(\lambda-\mu)\mu}{(\mu+\lambda)^2}\left[\exp\{-(\lambda+\mu)t\}-1\right].$$

2.8. $$P_n(t) = C_i^n e^{-(i-n)\mu t}(1-e^{-\mu t})^n; \quad m_t = i e^{-\mu t};$$

$$\sigma_t^2 = i e^{-\mu t}(1-e^{-\mu t}).$$

2.9. $$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

2.10. $$P\{N_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

2.11. Указание. Процесс имеет три состояния:

0 – оба кабеля неисправны;

1 – только один кабель исправен;

2 – оба кабеля исправны.

Составить прямые уравнения Колмогорова для состояния 2.

Ответ: $$P_{22}(t) = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t}.$$

2.12. $$m_t = \begin{cases} at + i & , \text{ если } \lambda = \mu; \\ \dfrac{a}{\lambda-\mu}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right] - i e^{(\lambda-\mu)t} & , \text{ если } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

2.13. Указание. От дифференциальных уравнений

$$p_0'(t) = \lambda p_1(t);$$

$$p_n'(t) = -2n\lambda p_n(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\lambda p_{n+1}(t), \; n \geq 1$$

перейти к дифференциальному уравнению в частных производных для производящей функции $\Phi(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t)$:

$$\frac{\partial \Phi(t,z)}{\partial t} = \lambda (z-1)^2 \frac{\partial \Phi(t,z)}{\partial z};$$

$$\Phi(0,z) = 1; \quad \Phi(t,1) = 1.$$

2.15. Указание. Составить уравнения:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -N\lambda p_0(t); \\ p_n'(t) = -(n+N)\lambda p_n(t) + (n+N-1) p_{n-1}(t); \end{cases}$$

$$p_0(0) = 1; \quad p_n(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

Ответ: $$p_n(t) = \frac{N(N+1)\dots(N+n-1)}{n!} e^{-\lambda(n+N)t}(e^{\lambda t}-1)^n.$$

2.16. $$m_t = Ne^{\lambda t}; \quad DX_t = Ne^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1).$$

2.17. Искомая вероятность выражается формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{\mu}{\lambda}+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{\mu}{\lambda}+2)}.$$

2.18. $$m_t^x = Ne^{-\mu t}; \quad DX_t = Ne^{-\mu t}(1-e^{-\mu t});$$

$$P_n(t) = C_N^n e^{-N\mu t}(e^{\mu t}-1)^{N-n}.$$

2.19.

$$\begin{cases} p_n'(t) = -(\lambda+n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \text{ при } n < N-1; \\ p_N'(t) = -N\mu p_N(t) + \lambda p_{N-1}(t). \end{cases}$$

2.20. Указание. Составить прямые уравнения Колмогорова для нулевого состояния (механизм находится в состоянии 0, если он работает; в состоянии 1, если произошел отказ 1-го типа; в состоянии 2, если произошел отказ 2-го типа):

$$p_{00}'(t) = -(\lambda_1+\lambda_2)p_{00}(t) + \mu_1 p_{01}(t) + \mu_2 p_{02}(t);$$

$$p_{01}'(t) = -\mu_1 p_{01}(t) + \lambda_1 p_{00}(t);$$

$$p_{02}'(t) = -\mu_2 p_{02}(t) + \lambda_2 p_{00}(t).$$

Начальные условия: $p_{00}(0) = 1; \; p_{01}(0) = p_{02}(0) = 0;$

$$p_{00}'(0) = -(\lambda_1+\lambda_2); \quad p_{01}'(0) = \lambda_1; \quad p_{02}'(0) = \lambda_2;$$

$$p_{00}''(0) = (\lambda_1+\lambda_2)^2 + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2.$$

Система дифференциальных уравнений сводится к следующему дифференциальному уравнению:

$$p_{00}'''(t) + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)p_{00}''(t) + (\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1+\mu_1\mu_2)p_{00}' = 0.$$

Ответ: $p_{00}(t) = c_1 + c_2 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t} + c_3 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}$,

где c_1, c_2, c_3 находятся из начальных условий.

2.21. $\lambda_n = (N-n)\lambda; \; \mu_n = n\mu$, если $0 \leq n \leq N$.

2.22. Преобразование Лапласа искомой функции распределения $F(t)$ равно

$$\varphi(s)=\frac{N(N-1)\lambda^2}{s^2+s[(2N-1)\lambda+\mu]+N(N-1)\lambda^2}.$$

2.23. Указание. Ввести случайные величины

$$X_t^{(i)}=\begin{cases}1, & \text{если } i\text{-й шар находится в первой урне в момент } t;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $X_t=\sum_{i=1}^{2N}X_t^{(i)}$.

Показать, что $P\{X_t^{(i)}=X_0^{(i)}\}=\frac{1+e^{-t}}{2}$; $i=\overline{1,2N}$.

2.24. $p_K=\frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^K$.

Указание. Следует принять во внимание, что "вложенная" цепь Маркова $\{Y_n\}_{n=0,1,\ldots}$; $Y_0=X_0$, $Y_n=X_{\tau_n}$, где $\{\tau_n\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность случайных моментов изменения состояний процесса рождения и гибели X_t с интенсивностями рождения λ_n и гибели μ_n, имеет переходные вероятности за один шаг:

$$p_{K,K+1}=\lambda_K/(\lambda_K+\mu_K);\quad p_{K,K-1}=\mu_K/(\lambda_K+\mu_K),\quad K=1,2,\ldots$$

Тогда искомая вероятность

$$p_K=P\{X_0=1,\ Y_1=2,\ Y_2=3,\ldots,\ Y_K=K+1,\ Y_{K+1}=K\}=$$
$$=P\{Y_{K+1}=K/Y_K=K+1\}\,P\{Y_K=K+1/Y_{K-1}=K\}\times$$
$$\times P\{Y_{K-1}=K/Y_{K-2}=K-1\}\ldots P\{Y_2=3/Y_1=2\}\,P\{Y_1=2/Y_0=1\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^K.$$

2.25. Указание. Время наступления первого события (рождения или гибели) распределено экспоненциально с параметром 2λ.

2.27. $u(t)=\lambda t/(1+\lambda t)$.

2.30. а) да; б) нет; в) да.

2.31. $p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{\frac{a}{\lambda}\left(\frac{a}{\lambda}+1\right)\ldots\left(\frac{a}{\lambda}+n-1\right)}{n!}\,\frac{1}{(1-\lambda/\mu)^{a/\lambda}}$.

2.32. $p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$; $p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$;

$p_{01}+p_{00}=1$; $p_{10}+p_{11}=1$;

$\pi_0=\mu/(\lambda+\mu)$; $\pi_1=\lambda/(\lambda+\mu)$.

2.33. $p_n=[(\lambda/\mu)^n/n!]\left[\sum_{k=0}^{m}(\lambda/\mu)^k/k!\right]$, $n=\overline{0,m}$.

2.34.

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda, & n=0;\\ \lambda p, & n>0,\end{cases}\quad \mu_n=\begin{cases}0, & n=0;\\ \mu, & n>0.\end{cases}$$

2.35.

$$p_n=\begin{cases}p_0(\lambda/\mu)^n/n!, & n=\overline{0,m};\\ p_0(\lambda/\mu)^m/m!\,m^{n-m}, & n\geq m,\ \text{где}\end{cases}$$

$$p_0^{-1}=\sum_{k=0}^{m-1}(\lambda/\mu)^k/k!+(m^m/m!)\sum_{k=m}^{\infty}(\lambda/m\mu)^k.$$

2.36.

$$p_i=\begin{cases}p_0(\lambda/\mu)^i/i!, & i=\overline{1,m};\\ p_0(\lambda/\mu)^i/m!\,m^{i-m}, & i=\overline{m,m+K},\end{cases}$$

где

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{m}(\lambda/\mu)^i/i!+((\lambda/\mu)^m/m!)\sum_{i=1}^{K}(\lambda/m\mu)^i\right]^{-1}.$$

2.37. $p_n=p_0(\lambda/\mu)^n q^{n(n-1)/2}$, $n\geq 0$.

2.38. $p_n=p_0(\lambda/\mu)^n/n!$, $n\geq 0$; $p_0=e^{-\lambda/\mu}$.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Составители: Александр Фролович Т а р а с к и н,
Александр Александрович Д е г т я р е в

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Редактор Е.Г.Ф и л и п п о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Е.Г.Ф и л и п п о в а

Подписано в печать 2[illegible].03.90. Формат 60x84 I/I6.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. I,63. Уч.-изд.л. I,6. Т. I20 экз.
Заказ № 171 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева. 443001 Куйбышев, ул.Молодогвардейская, I5I.

Участок оперативной полиграфии Куйбышевского авиационного института. 443001 Куйбышев, ул. Ульяновская, I8.