

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени академика С.П. КОРОЛЁВА  
(национальный исследовательский университет)»

Ю.В. Скворцов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

**ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ**

САМАРА 2013

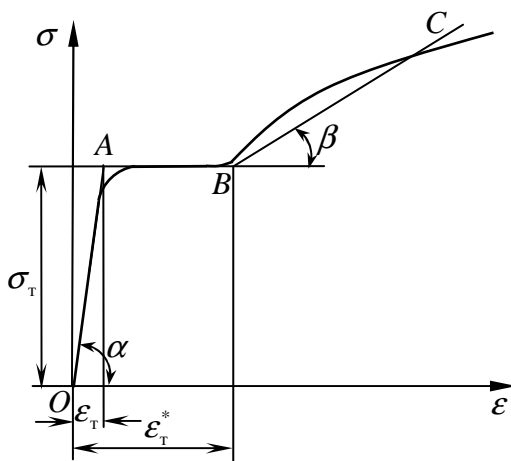
## СОДЕРЖАНИЕ

1	СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.....	4
2	РАСЧЁТ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ.....	7
3	РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ.....	16
4	ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ.....	25
5	УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ИЗ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА СИЛОЙ НА КОНЦЕ.....	31
6	ПРЕДЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ ДЛЯ БАЛКИ С СЕЧЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ОДНУ ОСЬ СИММЕТРИИ.....	38
7	ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ БАЛОК МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ.....	42
8	ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ.....	49
9	ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ РАСТЯНУТОГО И ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ.....	54
10	УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ.....	57
11	УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ИЗ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА.....	62
12	УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ.....	68
13	СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ НАЧАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ.....	72
14	РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО БРУСА ПО ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ.....	76
15	УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ.....	85

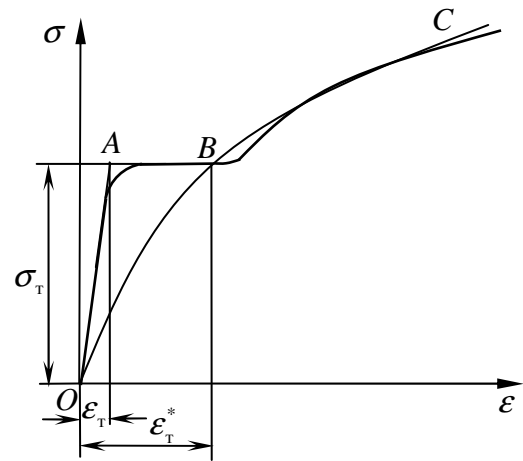
16	ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ К РАСЧЁТУ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ И КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ.....	94
17	ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ СТЕРЖНЯ.....	110
18	ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАСТИЛЬЯНО И ПРИНЦИПА МИНИМУМА ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЕФОРМАЦИИ.....	118
19	ПОЛЗУЧЕСТЬ БАЛКИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ.....	123
20	ПОЛЗУЧЕСТЬ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ.....	127

# 1 СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В расчётах за пределами упругости желательно использовать экспериментально полученные диаграммы растяжения. Для упрощения расчётов эти диаграммы обычно схематизируются, т.е. заменяются линиями (прямыми или кривыми), имеющими достаточно простое математическое выражение и в то же время хорошо совпадающими с экспериментально полученными диаграммами. Так, например, диаграмма растяжения с площадкой текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из трёх прямых  $OA$ ,  $AB$  и  $BC$  (рисунок 1.1), или ломаной, состоящей из двух прямых  $OA$  и  $AB$  и участка параболы  $BC$  (рисунок 1.2). Первая схематизированная диаграмма называется диаграммой растяжения с площадкой текучести и линейным упрочнением, а вторая – диаграммой растяжения с площадкой текучести и степенным упрочнением.



**Рисунок 1.1 – Схематизация диаграммой с площадкой текучести и линейным упрочнением**



**Рисунок 1.2 – Схематизация диаграммой с площадкой текучести и степенным упрочнением**

Отметим, что при схематизации диаграмм различие между пределами пропорциональности и текучести стирается.

Приведём зависимости напряжений от деформаций на различных участках схематизированных диаграмм. Для диаграммы с площадкой текучести и линейным упрочнением:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} \rightarrow \sigma = E\varepsilon;$$

$$\text{при } \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T^* \rightarrow \sigma = \sigma_T; \quad (1.1)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_T^* \rightarrow \sigma = \sigma_T + E_T (\varepsilon - \varepsilon_T^*) = \sigma_T \left[ 1 - (1 - \lambda) \frac{\varepsilon_T^*}{\varepsilon_T} \right] + E_T \varepsilon.$$

В этих уравнения  $\varepsilon_T$  – деформация, соответствующая пределу текучести материала;  $\varepsilon_T^*$  – деформация, соответствующая началу упрочнения;  $E_T = \operatorname{tg} \beta$  – модуль упрочнения материала;  $\lambda$  – параметр упрочнения:

$$\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}. \quad (1.2)$$

Величина модуля упрочнения зависит от того, как провести прямую *BC*. Для получения более адекватных результатов в теории пластичности обычно стараются как можно точнее схематизировать тот участок экспериментально полученной диаграммы, который используется в расчётах. При схематизации с линейным упрочнением обычно величина модуля упрочнения оказывается в 10...50 раз меньше модуля упругости.

Для диаграммы с площадкой текучести и степенным упрочнением:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} \rightarrow \sigma = E\varepsilon;$$

$$\text{при } \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T^* \rightarrow \sigma = \sigma_T; \quad (1.3)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_T^* \rightarrow \sigma = \sigma_T \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T^*} \right)^m,$$

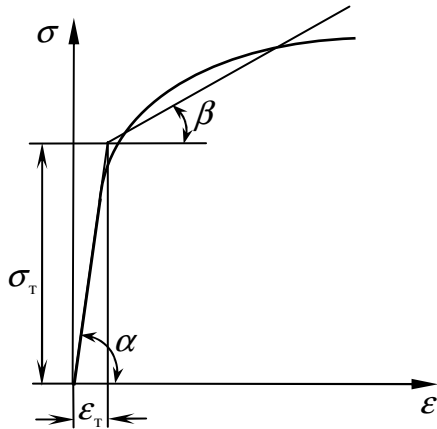
где показатель степени  $m$  изменяется от 0 до 1.

Диаграмма растяжения без площадки текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из двух прямых (рисунок 1.3), или ломаной, состоящей из прямой и участка параболы (рисунок 1.4). Первая схематизированная диаграмма называется диаграммой растяжения с линейным упрочнением, а вторая – диаграммой растяжения со степенным упрочнением.

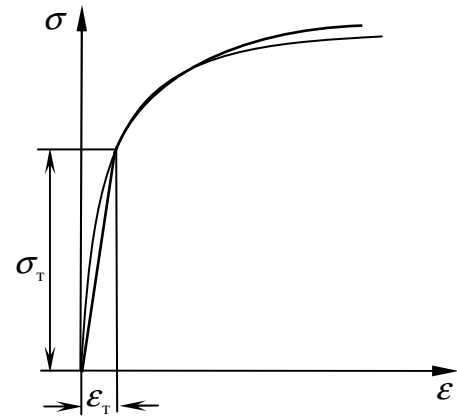
Зависимости напряжений от деформаций для этих схематизированных диаграмм могут быть легко получены из уравнений (1.1) и (1.3) с учётом того, что в рассматриваемом случае  $\varepsilon_T^* = \varepsilon_T$ .

Частным случаем диаграммы с линейным упрочнением является диаграмма идеального упругопластического тела (рисунок 1.5), для которого модуль упрочнения  $E_T$  равен нулю. Она часто называется диаграммой без

упрочнения Л. Прандтля. Эта диаграмма может быть использована, например, для материалов, имеющих ярко выраженную площадку текучести при условии, что деформации детали не превосходят  $\varepsilon_T^*$ .

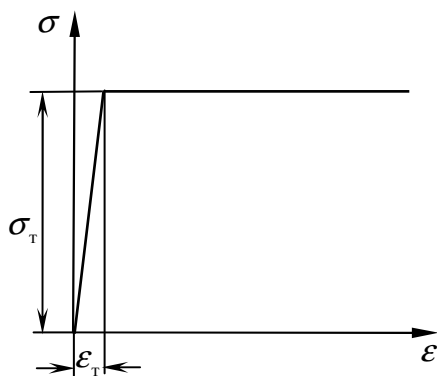


**Рисунок 1.3 – Схематизация диаграммой с линейным упрочнением**

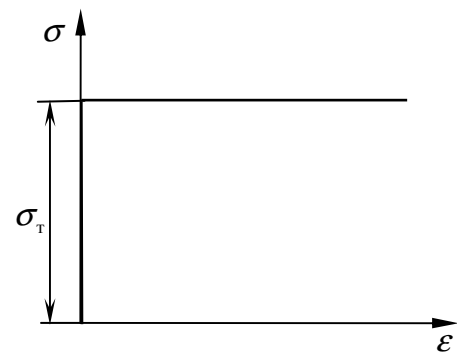


**Рисунок 1.4 – Схематизация диаграммой со степенным упрочнением**

При больших деформациях величиной упругой деформации можно пренебречь, т.е. принять модуль упругости  $E$  равным бесконечности. Тогда при отсутствии упрочнения получаем диаграмму жесткопластического тела (рисунок 1.6).



**Рисунок 1.5 – Диаграмма идеального упругопластического тела**



**Рисунок 1.6 – Диаграмма жёсткопластического тела**

## 2 РАСЧЁТ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ

*Пример 1:* Абсолютно жёсткая балка, крепящаяся на шарнире и ферменной подвеске, нагружена силой  $P$  (рисунок 2.1). Определить предельную нагрузку.

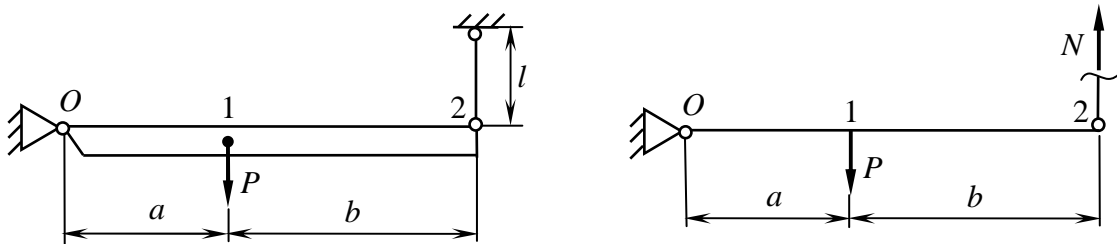


Рисунок 2.1 – Жёсткая балка с одним ферменным элементом

Ферменным элементом называется прямолинейный стержень, работающий только на растяжение или сжатие.

Поскольку материал без упрочнения, для него можно воспользоваться диаграммой растяжения Прандтля (см. рисунок 1.5).

Из условия равновесия  $\Sigma M_O = 0$  находим

$$N(a+b) = Pa \quad \text{или} \quad N = P \frac{a}{a+b}.$$

Напряжение в ферменном элементе определяется как  $\sigma = N/F$ . В предельном состоянии напряжение в этом элементе составляет  $\sigma_T$ . Следовательно, величина предельного усилия в стержне равна  $N_T = \sigma_T F$ .

Найдём предельную нагрузку для рассматриваемой системы:

$$P_T = N_T \frac{a+b}{a} = N_T \left( 1 + \frac{b}{a} \right).$$

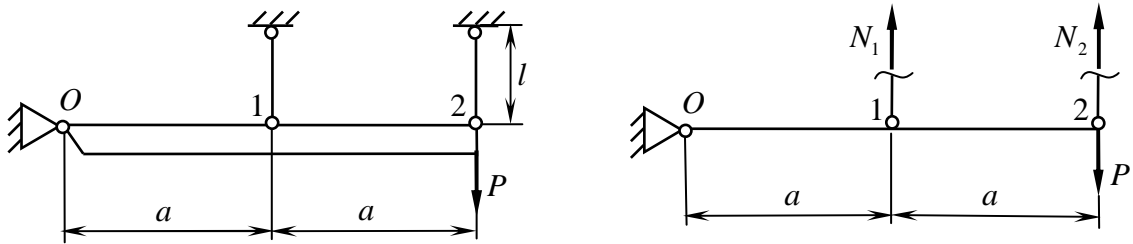
Рассмотрим частные случаи. При  $b = 0$ :  $P_T = N_T$ , при  $b = a$ :  $P_T = 2N_T$ .

*Пример 2:* К жёсткой балке добавим ещё один ферменный элемент, как показано на рисунке 2.2.

Запишем уравнение равновесия ( $\Sigma M_O = 0$ ):

$$N_1 a + N_2 \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{или} \quad N_2 = P - \frac{N_1}{2}.$$

Рассматриваемая система является один раз статически неопределимой. Найдём сначала «упругое» решение. Для этого воспользуемся началом наименьшей работы Кастильяно: в упругой системе устанавливается такое распределение внутренних усилий, при котором потенциальная энергия деформации имеет минимальное значение.



**Рисунок 2.2 – Жёсткая балка с двумя ферменными элементами**

Балку будем считать недеформируемой. Тогда потенциальную энергию деформации рассматриваемой системы можно найти как

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} N_1 \delta_1 + \frac{1}{2} N_2 \delta_2 = \frac{1}{2} N_1 \frac{N_1 l}{EF} + \frac{1}{2} N_2 \frac{N_2 l}{EF} = \frac{l}{2EF} (N_1^2 + N_2^2),$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – удлинения стержней (ферменных элементов).

Тогда с учётом уравнения равновесия получим

$$U = \frac{l}{2EF} \left( N_1^2 + \left( P - \frac{N_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{l}{2EF} \left( \frac{5}{4} N_1^2 - P N_1 + P^2 \right).$$

Из условия минимума потенциальной энергии деформации

$$\frac{dU}{dN_1} = 0$$

находим

$$\frac{5}{2} N_1 - P = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{2}{5} P; \quad N_2 = P - \frac{1}{5} P = \frac{4}{5} P = 2N_1.$$



Это решение упругой задачи. Рассмотрим теперь предельные нагрузки. Пусть при  $P = P_1$  напряжение во втором (наиболее нагруженном) стержне достигает предела текучести, т.е.  $N_2 = N_T = \sigma_T F$ .

Тогда

$$N_T = \frac{4}{5} P_1 \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{5}{4} N_T.$$

При этом

$$N_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} N_T = \frac{N_T}{2} < N_T.$$

Пусть далее  $P > P_1$ . Поскольку с увеличением нагрузки усилие  $N_2 = N_T$  будет оставаться неизменным, из уравнения равновесия находим

$$N_1 a + N_T \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{и} \quad N_1 = 2(P - N_T).$$

Отметим, что внешняя нагрузка может расти до тех пор, пока усилие  $N_1$  не станет равным  $N_T$ . Эту предельную нагрузку обозначим через  $P_T$ . Используя предыдущее равенство, получим

$$N_T = 2(P_T - N_T) \quad \text{или} \quad P_T = \frac{3}{2} N_T.$$

Дальнейший рост внешней нагрузки невозможен, поскольку усилия в стержнях, равные  $N_T$ , уже не смогут её уравновесить.

Определим перемещения точек 1 и 2. При  $P < P_1$  система работает упруго и, следовательно,

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF} = \frac{2}{5} \frac{Pl}{EF}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{EF} = \frac{4}{5} \frac{Pl}{EF} = 2\delta_1.$$

При  $P = P_1 = \frac{5}{4} N_T$

$$\delta_1 = \frac{2}{5} \frac{P_1 l}{EF} = \frac{1}{2} \frac{N_T l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

При  $P_1 < P < P_T$ , поскольку первый стержень продолжает работать упруго,

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF} = \frac{2(P - N_T)l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

И, наконец, при  $P = P_T = \frac{3}{2} N_T$

$$\delta_1 = \frac{2\left(\frac{3}{2} N_T - N_T\right) l}{EF} = \frac{N_T l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

На рисунке 2.3 представлен график зависимости  $\delta_2$  от  $P$ , где обозначено  $\delta_0 = \frac{N_T l}{EF}$ . На рисунке 2.4 показано изменение усилий в стержнях с ростом внешней нагрузки.

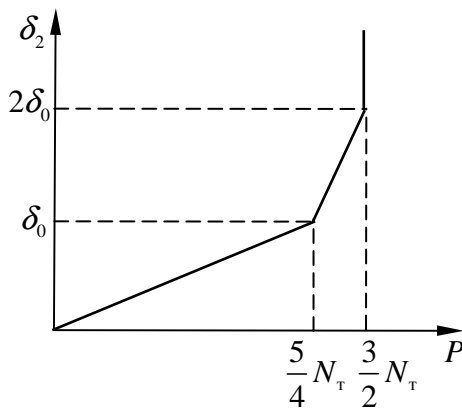


Рисунок 2.3 – Изменение перемещения

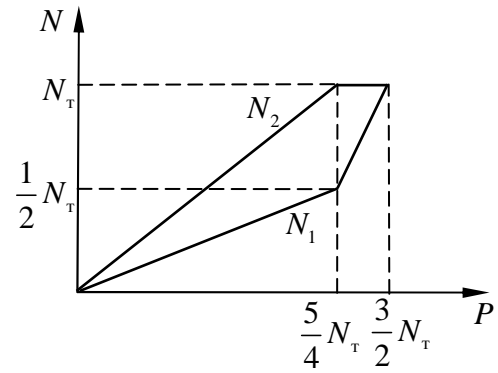


Рисунок 2.4 – Изменение усилий

*Пример 3:* Рассмотрим жёсткую балку с тремя ферменными элементами (рисунок 2.5).

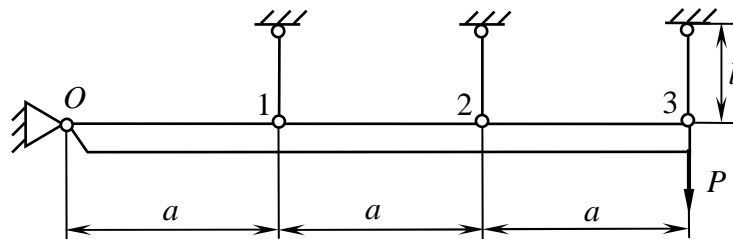


Рисунок 2.5 – Жёсткая балка с тремя ферменными элементами

Данная система является дважды статически неопределимой. Очевидно, что здесь третий, более нагруженный, ферменный элемент ранее других достигнет усилия текучести  $N_T$ , затем второй и, наконец, первый стержень.

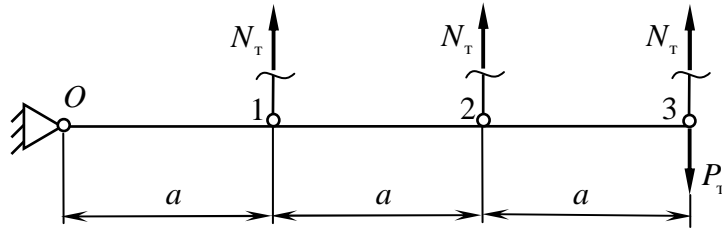
Таким образом, в предельном состоянии  $N_1 = N_2 = N_3 = N_T$  (рисунок 2.6).

Запишем уравнение равновесия ( $\Sigma M_O = 0$ ):

$$N_T a + N_T \cdot 2a + N_T \cdot 3a = P_T \cdot 3a,$$

откуда

$$P_T = 2N_T.$$



**Рисунок 2.6 – Предельное состояние системы**

Из рассмотренных примеров можно наметить следующий способ определения предельной нагрузки для стержневой системы с ферменными элементами из материала без упрочнения.

Пусть задана некоторая стержневая система с ферменными элементами. Будем полагать, что материал элементов системы не обладает упрочнением.

Пусть система является статически неопределимой. В начале нагружения она работает как упругая. Это продолжается до тех пор, пока в одном, наиболее нагруженном, элементе напряжение не достигнет предела текучести  $\sigma_T$ . После этого при дальнейшем росте нагрузки в этом элементе будет неизменное усилие, равное

$$N_T = \sigma_T F,$$

где  $F$  – площадь сечения стержня.

Очевидно, что при этом степень статической неопределимости системы будет уменьшаться на единицу. Если нагрузка на систему продолжает расти, то усилия в остальных элементах будут также возрастать. При достижении состояния текучести каким-либо следующим элементом, а затем и последующими элементами степень статической неопределимости каждый раз уменьшается на единицу. Таким образом, с дальнейшим ростом нагрузки система может стать статически определимой, а затем превратиться в механизм. Последнее будет означать, что произошло исчерпание несущей способности рассматриваемой системы. Такое состояние системы называется

предельным. При этом внешняя нагрузка ещё находится в равновесии с внутренними усилиями. Дальнейшее увеличение нагрузки уже невозможно. В состоянии предельного равновесия перемещения системы становятся неопределёнными.

Если же в системе окажутся сжатые элементы, то они могут потерять устойчивость. Обычно принимается, что потерявший устойчивость стержень сопротивляется внешним воздействиям с постоянной силой, равной критической силе  $N_{кр}$ .

*Пример 4:* На плоскую ферму, изготовленную из стальных стержней трубчатого сечения 40х34, действует сила  $P$  (рисунок 2.7). Площадь поперечного сечения стержней  $F = 3,4872 \text{ см}^2$ ; его момент инерции  $I = 6,006 \text{ см}^4$ . Характерный размер  $a = 70 \text{ см}$ . Свойства материала:  $E = 2,05 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_T = 800 \text{ МПа}$ . Найти предельную нагрузку.

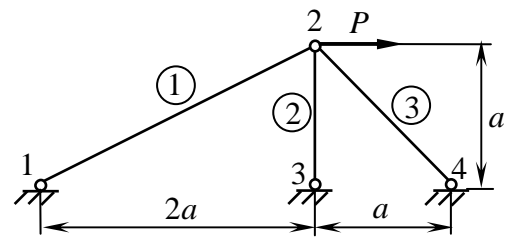


Рисунок 2.7 – Плоская ферма

Будем также полагать, что материал не обладает упрочнением. Определим длины стержней:

$$l_1 = a\sqrt{5} = 156,524 \text{ см}; \quad l_2 = a = 70 \text{ см}; \quad l_3 = a\sqrt{2} = 98,995 \text{ см}.$$

Найдём силу текучести:

$$N_T = \sigma_T F = 800 \cdot 348,72 = 279 \text{ кН}.$$

Приведём рассчитанные по формуле

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

критические усилия для стержней фермы:

$$N_{1кр} = 50 \text{ кН}; \quad N_{2кр} = 250 \text{ кН}; \quad N_{3кр} = 125 \text{ кН}.$$

«Упругое» решения для данной один раз статически неопределимой стержневой системы было получено в курсе строительной механики с использованием матричного метода перемещений. Оно имеет вид

$$N_1 = 0,61463P; \quad N_2 = 0,17538P; \quad N_3 = -0,63676P.$$

В наиболее тяжёлых условиях здесь работает стержень 3. Он теряет устойчивость при силе  $P = P_1$ , которую можно найти из следующего равенства:

$$|-0,63676P_1| = N_{3кр} = 125 \text{ кН},$$

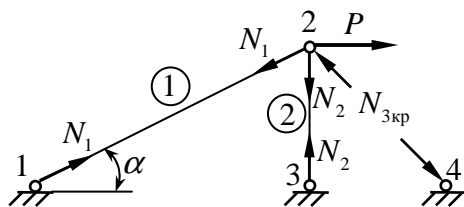
откуда

$$P_1 = \frac{125}{0,63676} = 196,31 \text{ кН}.$$

При этом

$$N_1 = 0,61463 \cdot 196,31 = 120,7 \text{ кН}; \quad N_2 = 0,17538 \cdot 196,31 = 34,4 \text{ кН}.$$

Дальнейшее увеличение силы  $P$  вызовет деформацию стержня 3 при постоянном сжимающем усилии (рисунок 2.8).



**Рисунок 2.8 – После потери устойчивости стержня 3**

Таким образом, при  $P > P_1$  в узле 2 останутся два неизвестных усилия. Количество уравнений равновесия для их определения также равно двум, т.е. задача становится статически определимой. Учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

составим уравнения равновесия узла 2:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + N_{3кр} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= P \\ N_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + N_2 &= N_{3кр} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$N_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( P - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3кр} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( P - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 125 \right) = 1,1180P - 98,82;$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3кр} - \frac{N_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 125 - \frac{1,1180P - 98,82}{\sqrt{5}} = 132,58 - 0,49998P.$$

Анализ данных выражений показывает, что стержень 1 раньше исчерпает несущую способность, нежели стержень 2.

Примем, что при  $P = P_2$  напряжение в стержне 1 достигает предела текучести, т.е.  $N_1 = N_T$ . Определим  $P_2$ :

$$N_T = 1,1180P_2 - 98,82,$$

откуда

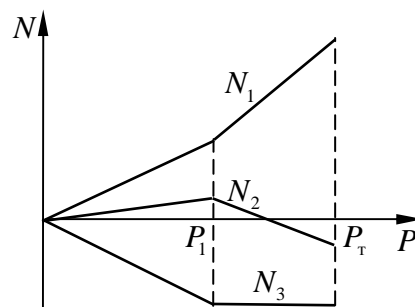
$$P_2 = \frac{N_T + 98,82}{1,1180} = \frac{279 + 98,82}{1,1180} = 337,9 \text{ кН.}$$

При этом

$$N_2 = 132,58 - 0,49998P_2 = 132,58 - 0,49998 \cdot 337,9 = -36,38 \text{ кН.}$$

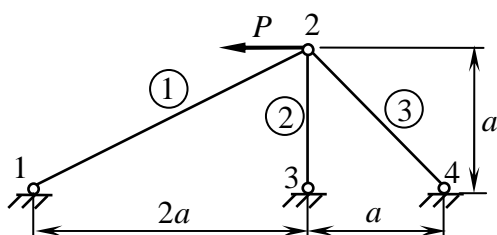
Дальнейшее увеличение нагрузки невозможно. Таким образом, предельной силой для данной фермы будет  $P_T = P_2 = 337,9 \text{ кН}$ .

Зависимости усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки представлены на рисунке 2.9.



**Рисунок 2.9 – Изменение усилий в стержнях фермы**

Рассмотрим теперь другой случай нагружения фермы, когда сила  $P$  направлена в противоположную сторону (рисунок 2.10).



**Рисунок 2.10 – Второй случай нагружения плоской фермы**

При этом «упругое» решение, очевидно, имеет вид

$$N_1 = -0,61463P; \quad N_2 = -0,17538P; \\ N_3 = 0,63676P.$$

Стержень 1 сжат и имеет наименьшую критическую нагрузку. Следовательно, он раньше других потеряет несущую способность.

Пусть  $P = P_1$  стержень 1 теряет устойчивость. Тогда

$$|-0,61463P_1| = N_{\text{кр}} = 50 \text{ кН,}$$

откуда

$$P_1 = \frac{50}{0,61463} = 81,35 \text{ кН.}$$

И, следовательно,

$$N_2 = -0,17538 \cdot 81,35 = -14,27 \text{ кН;} \quad N_3 = 0,63676 \cdot 81,35 = 51,80 \text{ кН.}$$

При  $P > P_1$  стержень 1 работает с постоянным усилием, равным  $N_{\text{кр}}$ , и система становится статически определимой (рисунок 2.11).

Составим уравнения равновесия узла 2:

$$\left. \begin{aligned} N_{1\text{кр}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= P \\ N_2 + N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= N_{1\text{кр}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\}$$

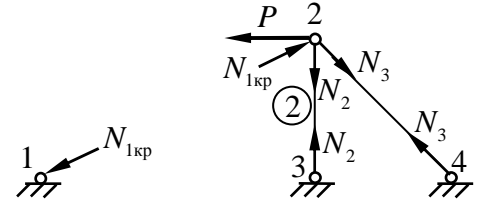


Рисунок 2.11 – После потери устойчивости стержня 1

Решая данную систему уравнений, находим

$$N_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( P - \frac{2}{\sqrt{5}} N_{1\text{кр}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( P - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 50 \right) = 1,4142P - 63,25;$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} N_{1\text{кр}} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 50 - \frac{\sqrt{2}}{2} (1,4142P - 63,25) = 67,08 - P.$$

Можно заметить, что при  $P > P_1$  стержень 2 будет сжат, а стержень 3 – растянут. Анализ данных выражений показывает, что стержень 3 раньше исчерпает несущую способность, нежели стержень 2.

Примем, что при  $P = P_2$  напряжение в стержне 3 достигает предела текучести, т.е.  $N_3 = N_T$ . Определим  $P_2$ :

$$N_T = 1,4142P_2 - 63,25,$$

откуда

$$P_2 = \frac{N_T + 63,25}{1,4142} = \frac{279 + 63,25}{1,4142} = 242,0 \text{ кН.}$$

При этом

$$N_2 = 67,08 - P_2 = 67,08 - 242 = -174,9 \text{ кН,}$$

что по модулю меньше  $N_{2\text{кр}} = 250 \text{ кН}$ , т.е. при такой нагрузке стержень 2 ещё не теряет устойчивости.

Поскольку дальнейшее увеличение нагрузки невозможно, предельной силой в этом случае нагружения будет  $P_T = P_2 = 242,0 \text{ кН}$ . Она существенно отличается от предыдущего значения, когда нагрузка была направлена вправо. Зависимости усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки представлены на рисунке 2.12.

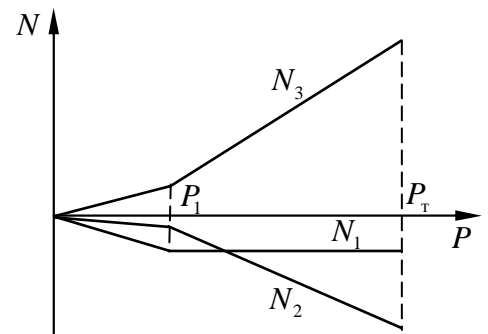


Рисунок 2.12 – Изменение усилий в стержнях фермы

### 3 РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Будем считать, что материал обладает линейным упрочнением, т.е. его диаграмма растяжения имеет вид, показанный на рисунке 3.1. Будем также полагать, что напряжения в системе не могут превышать значения  $\sigma_{\max}$ .

Приведём зависимости  $\sigma - \varepsilon$  на различных участках диаграммы.

При  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T$

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.1)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  – модуль упругости.

При  $\varepsilon \geq \varepsilon_T$

$$\sigma = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon, \quad (3.2)$$

где  $E_T = \operatorname{tg} \beta$  – модуль упрочнения;  $\lambda = 1 - E_T/E$  – параметр упрочнения.

Обычно  $E_T/E \approx 0,05 \dots 0,15$ .

*Пример 1:* Абсолютно жёсткая балка, крепящаяся на шарнире и двух ферменных подвесках, нагружена силой  $P$  (рисунок 3.2). Определить усилия в стержнях в зависимости от приложенной силы.

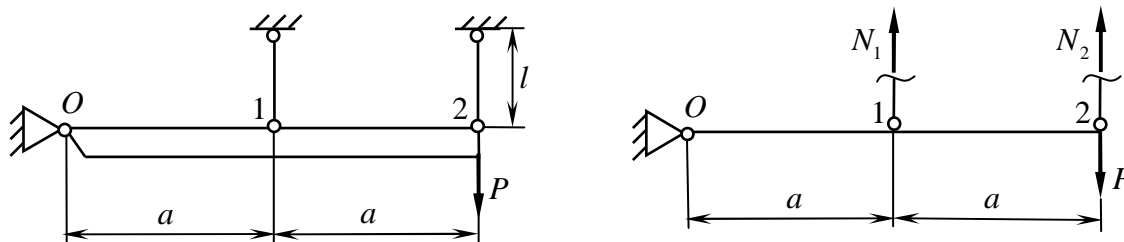


Рисунок 3.2 – Жёсткая балка с двумя ферменными элементами

Рассматриваемая система является один раз статически неопределимой. Запишем уравнение равновесия ( $\sum M_O = 0$ ):

$$N_1 a + N_2 \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{или} \quad N_1 + 2N_2 = 2P. \quad (3.3)$$



Для раскрытия статической неопределённости воспользуемся условием

$$\delta_2 = 2\delta_1, \quad (3.4)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – удлинения ферменных элементов (стержней).

Это условие вытекает из того, что балка является абсолютно жёсткой.

Найдём сначала «упругое» решение. В этом случае

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{EF},$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержней.

Откуда

$$N_1 = \frac{EF}{l} \delta_1; \quad N_2 = \frac{EF}{l} \delta_2$$

и в силу условия (3.4)

$$N_2 = 2N_1.$$

Тогда из уравнения равновесия (3.3) получим

$$N_1 = \frac{2}{5}P; \quad N_2 = \frac{4}{5}P. \quad (3.5)$$

Найдём напряжения и деформации в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{2}{5} \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{4}{5} \frac{P}{F}.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{2}{5} \frac{P}{EF}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{4}{5} \frac{P}{EF}.$$

Таким образом, при упругой работе системы

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 < \varepsilon_T; \quad N_2 > N_1.$$

Отсюда следует, что напряжение во втором стержне раньше достигнет предела текучести.

Пусть  $P = P_1$  усилие  $N_2 = N_T = \sigma_T F$ . Тогда

$$N_T = \frac{4}{5}P_1 \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{5}{4}N_T. \quad (3.6)$$

При этом усилие в стержне 1 будет равно

$$N_1 = \frac{2}{5}P_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4}N_T = \frac{1}{2}N_T,$$

т.е. данный стержень будет находиться в упругом состоянии.

При дальнейшем росте нагрузки стержень 2 работает за пределами упругости, а первый продолжает быть упругим до тех пор, пока усилие  $N_1$  не достигнет значения  $N_T$ . Пусть это произойдёт при силе  $P = P_2$ .

При  $P_1 < P < P_2$  согласно (3.1) и (3.2) имеем

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_2 = \lambda\sigma_T + E_T \cdot 2\varepsilon_1.$$

Здесь учтено, что в соответствии с условием (3.4)  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ .

Деформацию  $\varepsilon_1$  определим из уравнения равновесия. Разделив левую и правую части равенства (3.3) на  $F$ , получим

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 = 2\frac{P}{F}.$$

С учётом предыдущих выражений имеем

$$E\varepsilon_1 + 2(\lambda\sigma_T + 2E_T\varepsilon_1) = 2\frac{P}{F};$$

$$\varepsilon_1(E + 4E_T) = 2\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_T;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_T}{E + 4E_T}. \quad (3.7)$$

При  $P = P_2$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_T = \frac{2\frac{P_2}{F} - 2\lambda\sigma_T}{E + 4E_T},$$

откуда

$$2\frac{P_2}{F} - 2\lambda\sigma_T = \varepsilon_T(E + 4E_T);$$

$$2\frac{P_2}{F} = E\varepsilon_T \left(1 + 4\frac{E_T}{E}\right) + 2\lambda\sigma_T.$$

Учитывая, что

$$\sigma_T = E\varepsilon_T \quad \text{и} \quad \frac{E_T}{E} = 1 - \lambda,$$

имеем

$$2\frac{P_2}{F} = \sigma_T[1 + 4(1 - \lambda) + 2\lambda];$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \sigma_T F (5 - 2\lambda) = \frac{5 - 2\lambda}{2} N_T. \quad (3.8)$$

Определим усилия в стержнях, когда  $P_1 < P < P_2$ . Согласно (3.7)

$$N_1 = EF \varepsilon_1 = \frac{2P - 2\lambda \sigma_T F}{1 + 4 \frac{E_T}{E}} = \frac{2P - 2\lambda \sigma_T F}{1 + 4(1 - \lambda)}$$

или

$$N_1 = \frac{2P - 2\lambda N_T}{5 - 4\lambda}. \quad (3.9)$$

Для усилия в стержне 2 имеем

$$N_2 = \sigma_2 F;$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_2 = \lambda \sigma_T + E_T \cdot 2\varepsilon_1 = \lambda \sigma_T + 2E_T \frac{2 \frac{P}{F} - 2\lambda \sigma_T}{E + 4E_T} = \\ &= \lambda \sigma_T + 4 \frac{E_T}{E} \cdot \frac{\frac{P}{F} - \lambda \sigma_T}{1 + 4 \frac{E_T}{E}} = \lambda \sigma_T + 4(1 - \lambda) \cdot \frac{\frac{P}{F} - \lambda \sigma_T}{5 - 4\lambda}. \end{aligned}$$

Тогда

$$N_2 = \lambda \sigma_T F + \frac{4(1 - \lambda)(P - \lambda \sigma_T F)}{5 - 4\lambda}$$

или

$$N_2 = \frac{4P(1 - \lambda) + \lambda N_T}{5 - 4\lambda}. \quad (3.10)$$

Подстановка (3.9) и (3.10) в уравнение равновесия (3.3) приводит к удовлетворению последнего.

Далее определим усилие  $N_2$  при  $P = P_2$ . Используя (3.10) и (3.8), запишем

$$N_2 = \frac{4P_2(1 - \lambda) + \lambda N_T}{5 - 4\lambda} = \frac{N_T}{5 - 4\lambda} [2(5 - 2\lambda)(1 - \lambda) + \lambda] = N_T \frac{10 - 13\lambda + 4\lambda^2}{5 - 4\lambda}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь поведение системы в случае, когда  $P > P_2$ . При этом оба стержня работают за пределами упругости. Здесь, очевидно, также выполняются уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Для данного случая имеем

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_2 = \lambda\sigma_T + E_T \cdot 2\varepsilon_1.$$

Подставим эти выражения в уравнение равновесия (3.3), делённое на  $F$ . Получим

$$\lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_1 + 2\lambda\sigma_T + 4E_T\varepsilon_1 = 2\frac{P}{F},$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{5E_T} \left( \frac{2P}{F} - 3\lambda\sigma_T \right)$$

и согласно условию совместности деформаций  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ .

Используя этот результат, найдём напряжения и усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_1 = \lambda\sigma_T + \frac{1}{5} \left( \frac{2P}{F} - 3\lambda\sigma_T \right) = \frac{2P}{5F} + \frac{2}{5}\lambda\sigma_T; \\ N_1 &= \sigma_1 F = \frac{2}{5}P + \frac{2}{5}\lambda N_T; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \lambda\sigma_T + 2E_T\varepsilon_1 = \lambda\sigma_T + \frac{2}{5} \left( \frac{2P}{F} - 3\lambda\sigma_T \right) = \frac{4P}{5F} - \frac{1}{5}\lambda\sigma_T; \\ N_2 &= \sigma_2 F = \frac{4}{5}P - \frac{1}{5}\lambda N_T. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Можно проверить, что выражения (3.12) и (3.13) также удовлетворяют уравнению равновесия.

Примем  $\sigma_{\max} = k\sigma_T$ , где  $k > 1$ . Поскольку  $N_2 > N_1$ , будем определять максимальную нагрузку  $P_{\max}$  из условия

$$N_{2\max} = \frac{4}{5}P_{\max} - \frac{1}{5}\lambda N_T,$$

где

$$N_{2\max} = \sigma_{2\max} F = k\sigma_T F = kN_T. \quad (3.14)$$

Таким образом, имеем

$$P_{\max} = \frac{5}{4}N_T \left( k + \frac{1}{5}\lambda \right). \quad (3.15)$$

Усилие в стержне 1 при максимальной нагрузке будет равно

$$N_1 = N_{1\max} = \frac{2}{5}P_{\max} + \frac{2}{5}\lambda N_T. \quad (3.16)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть  $E_{\tau}/E = 0,1$ , тогда с учётом (3.8)

$$\lambda = 1 - \frac{E_{\tau}}{E} = 1 - 0,1 = 0,9;$$

$$P_2 = \frac{5 - 2\lambda}{2} N_{\tau} = \frac{5 - 2 \cdot 0,9}{2} N_{\tau} = \frac{8}{5} N_{\tau}.$$

При  $P_1 < P < P_2$  согласно (3.9) и (3.10)

$$N_1 = \frac{2P - 2\lambda N_{\tau}}{5 - 4\lambda} = \frac{2P - 2 \cdot 0,9 N_{\tau}}{5 - 4 \cdot 0,9} = \frac{10}{7} P - \frac{9}{7} N_{\tau};$$

$$N_2 = \frac{4P(1 - \lambda) + \lambda N_{\tau}}{5 - 4\lambda} = \frac{4P(1 - 0,9) + 0,9 N_{\tau}}{5 - 4 \cdot 0,9} = \frac{2}{7} P + \frac{9}{14} N_{\tau}.$$

Используя данные выражения, найдём усилия в характерных точках.

При  $P = P_1 = \frac{5}{4} N_{\tau}$

$$N_1(P_1) = \frac{10}{7} \cdot \frac{5}{4} N_{\tau} - \frac{9}{7} N_{\tau} = \frac{N_{\tau}}{2};$$

$$N_2(P_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{4} N_{\tau} + \frac{9}{14} N_{\tau} = N_{\tau}.$$

При  $P = P_2 = \frac{8}{5} N_{\tau}$

$$N_1(P_2) = \frac{10}{7} \cdot \frac{8}{5} N_{\tau} - \frac{9}{7} N_{\tau} = N_{\tau};$$

$$N_2(P_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{5} N_{\tau} + \frac{9}{14} N_{\tau} = 1,1 N_{\tau}.$$

Примем  $k = 1, 2$ . Тогда согласно (3.14)...(3.16)

$$P_{\max} = \frac{5}{4} N_{\tau} \left( k + \frac{1}{5} \lambda \right) = \frac{5}{4} N_{\tau} \left( 1,2 + \frac{1}{5} \cdot 0,9 \right) = 1,725 N_{\tau};$$

$$N_{2\max} = k N_{\tau} = 1,2 N_{\tau};$$

$$N_{1\max} = \frac{2}{5} \cdot 1,725 N_{\tau} + \frac{2}{5} \cdot 0,9 N_{\tau} = 1,05 N_{\tau}.$$

Зависимости усилий в стержнях от внешней нагрузки показаны на рисунке 3.3.

**Пример 2:** Стержневая система из предыдущего примера нагружена силой  $P_{\max}$ . Определить остаточные усилия и деформации в стержнях после снятия этой нагрузки.

Согласно теореме о разгрузке, доказанной А.А. Ильюшиным, остаточные усилия  $N'_1, N'_2$  и остаточные удлинения  $\delta'_1, \delta'_2$  стержней определяются соотношениями

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1 - N_1^0; & N'_2 &= N_2 - N_2^0; \\ \delta'_1 &= \delta_1 - \delta_1^0; & \delta'_2 &= \delta_2 - \delta_2^0, \end{aligned}$$

где  $N_1, N_2, \delta_1, \delta_2$  – усилия и удлинения стержней 1 и 2, найденные с учётом их работы за пределами упругости;  $N_1^0, N_2^0, \delta_1^0, \delta_2^0$  – усилия и удлинения, полученные в предположении, что вся приложенная к системе нагрузка воспринимается ею упруго.

При  $P = P_{\max} = 1,725N_T$  из предыдущего примера имеем

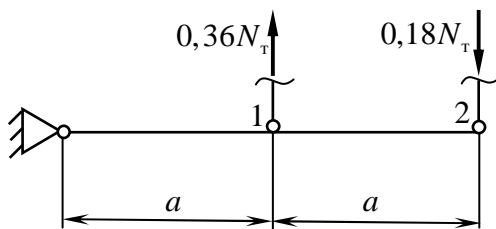
$$N_1 = 1,05N_T; \quad N_2 = 1,2N_T.$$

При упругом восприятии заданной нагрузки согласно (3.5)

$$N_1 = \frac{2}{5}P_{\max} = \frac{2}{5} \cdot 1,725N_T = 0,69N_T; \quad N_2 = \frac{4}{5}P_{\max} = 1,38N_T.$$

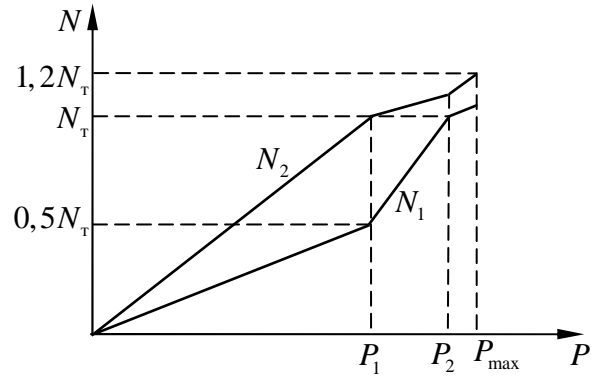
Теперь можно найти остаточные усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1 - N_1^0 = 1,05N_T - 0,69N_T = 0,36N_T; \\ N'_2 &= N_2 - N_2^0 = 1,2N_T - 1,38N_T = -0,18N_T. \end{aligned}$$



**Рисунок 3.4 – Остаточные усилия в стержнях системы**

Для стержня 1 имеем



**Рисунок 3.3 – Изменение усилий в стержнях системы**

Под действием остаточных усилий система в целом находится в равновесии (рисунок 3.4).

Обратимся далее к определению удлинений стержней. Нагрузка  $P_{\max}$  вызывает деформацию в обоих стержнях за пределами упругости.

$$\sigma_1 = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_1,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \lambda \sigma_T}{E_T} = \frac{N_1 - \lambda N_T}{E_T F} = \frac{N_1 - \lambda N_T}{EF(1-\lambda)} = \frac{1,05N_T - 0,9N_T}{EF(1-0,9)} = 1,5 \frac{N_T}{EF}.$$

Определяем удлинения стержней:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 l = 1,5 \frac{N_T l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1 = 3 \frac{N_T l}{EF}.$$

Найдём теперь удлинения стержней в предположении упругого восприятия нагрузки  $P_{\max}$ :

$$\delta_1^0 = \frac{N_1^0 l}{EF} = 0,69 \frac{N_T l}{EF}; \quad \delta_2^0 = \frac{N_2^0 l}{EF} = 1,38 \frac{N_T l}{EF}.$$

Тогда остаточные удлинения будут равны

$$\delta_1' = \delta_1 - \delta_1^0 = (1,5 - 0,69) \frac{N_T l}{EF} = 0,81 \frac{N_T l}{EF};$$

$$\delta_2' = \delta_2 - \delta_2^0 = (3 - 1,38) \frac{N_T l}{EF} = 1,62 \frac{N_T l}{EF}.$$

Отметим, что остаточные напряжения и деформации не связаны законом Гука.

*Пример 3:* Плоская статически определимая ферма нагружена силой  $P$  (рисунок 3.5). Определить остаточные напряжения и деформации после снятия этой нагрузки.

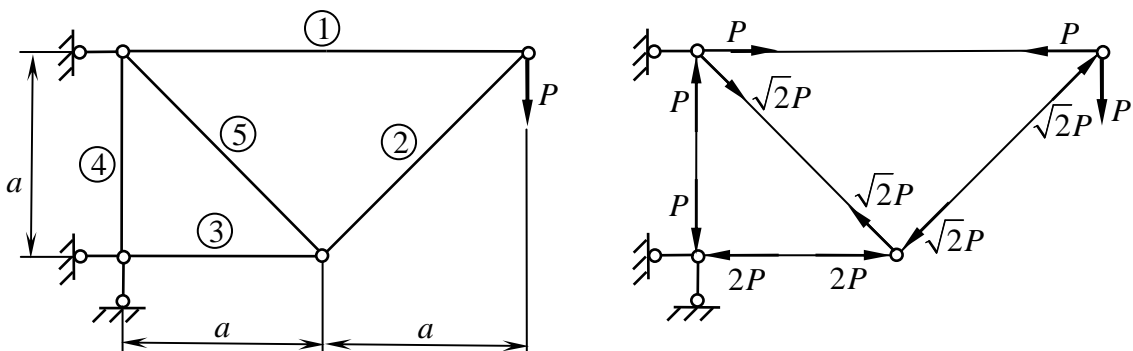


Рисунок 3.5 – Плоская статически определимая ферма

Поскольку рассматриваемая ферма является статически определимой, усилия в стержнях легко находятся из уравнений равновесия узлов (см. рисунок 3.5):

$$N_1 = P; \quad N_2 = -\sqrt{2}P; \quad N_3 = -2P; \quad N_4 = -P; \quad N_5 = \sqrt{2}P.$$

Тогда для напряжений получим

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 = -\sqrt{2} \frac{P}{F}; \quad \sigma_3 = -2 \frac{P}{F}; \quad \sigma_4 = -\frac{P}{F}; \quad \sigma_5 = \sqrt{2} \frac{P}{F}.$$

Будем считать, что материал стержней фермы обладает линейным упругим.

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_1 < \sigma_T; \quad |\sigma_4| < \sigma_T; \\ |\sigma_2| > \sigma_T; \quad |\sigma_3| > \sigma_T; \quad \sigma_5 > \sigma_T, \end{aligned}$$

т.е. стержни 1 и 4 работают упруго, а стержни 2, 3 и 5 – за пределами упругости. Полагаем также, что сжатые стержни не теряют устойчивости.

Если снять нагрузку, то во всех стержнях усилия будут нулевыми, так как система статически определима. При этом стержни 1 и 4 восстановят свою длину, а в стержнях 2, 3 и 5 будут пластические (остаточные) деформации.

Рассмотрим стержень 5. Его полную деформацию, которая определяется по диаграмме растяжения (рисунок 3.6), можно представить в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon^{(5)} = \varepsilon_e^{(5)} + \varepsilon_p^{(5)},$$

где

$$\varepsilon_e^{(5)} = \frac{\sigma^{(5)}}{E}.$$

Тогда

$$\varepsilon_p^{(5)} = \varepsilon^{(5)} - \varepsilon_e^{(5)} = \varepsilon^{(5)} - \frac{\sigma^{(5)}}{E}.$$

Остаточное удлинение стержня 5 находится как

$$\delta^{(5)} = \varepsilon_p^{(5)} l^{(5)},$$

где  $l^{(5)}$  – длина стержня 5.

Аналогично можно рассмотреть стержни 2 и 3.

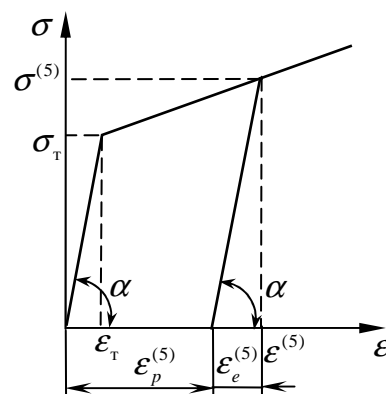


Рисунок 3.6 – Диаграмма для стержня 5



## 4 ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим изгиб балки прямоугольного поперечного сечения под действием одного лишь изгибающего момента  $M$  (рисунок 4.1).

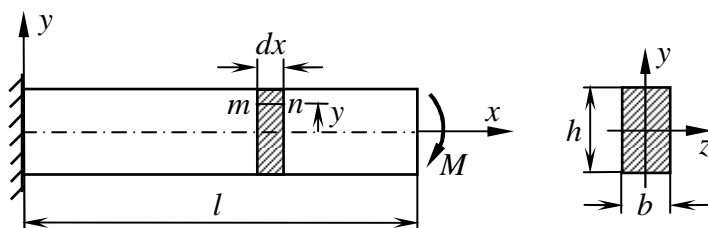


Рисунок 4.1 – Чистый изгиб балки

Будем считать, что и за пределами упругости справедлива кинематическая гипотеза плоских сечений, применяемая в сопротивлении материалов для расчёта балок.

Рассмотрим элемент балки длиной  $dx$  до деформации и после (рисунок 4.2). Согласно принятой гипотезе после деформации оба его сечения остаются плоскими, и справедлива формула

$$\varepsilon = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{y}{\rho}, \quad (4.1)$$

где  $1/\rho$  – кривизна изогнутой оси балки.

Примем, что материал балки не обладает упрочнением, и для него можно воспользоваться диаграммой растяжения Прандтля (рисунок 1.5). При этом распределения деформаций и напряжений по сечению в зависимости от момента будут иметь вид, как показано на рисунке 4.3.

Рассмотрим упругое поведение балки, когда  $M < M_T^*$ . В этом случае максимальные напряжения меньше предела текучести материала, и справедлив закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon$$

или с учётом (4.1)

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (4.2)$$

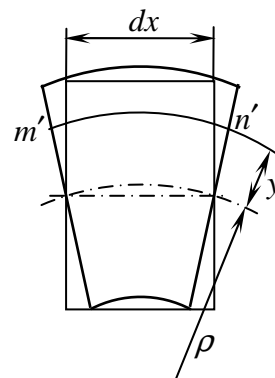


Рисунок 4.2 – Деформация элемента

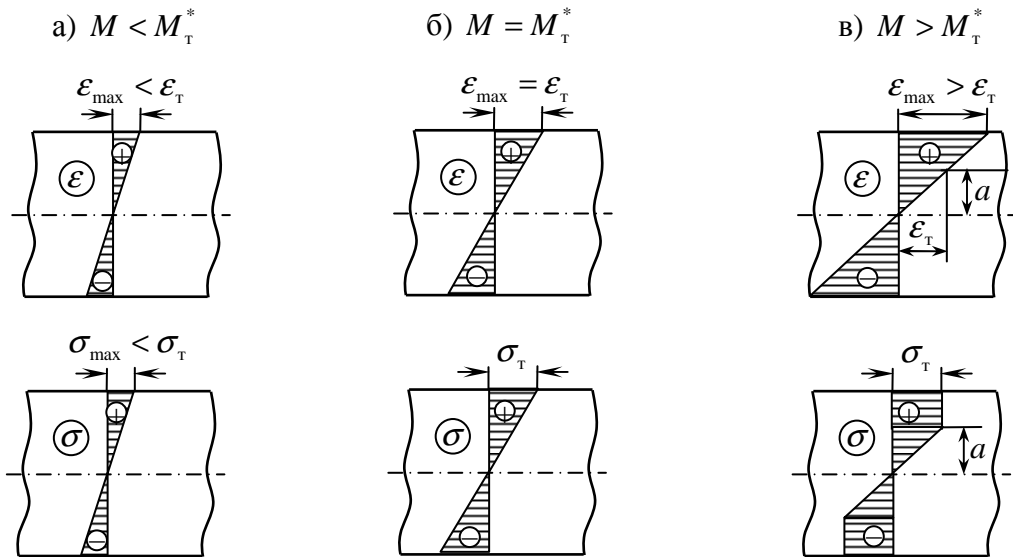


Рисунок 4.3 – Распределение деформаций и напряжений по сечению

Подсчитаем изгибающий момент:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{\rho} y^2 b dy = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{h^3}{12} b = \frac{E}{\rho} I,$$

где  $I = bh^3/12$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси  $z$ .

Тогда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{M}{I} y. \quad (4.3)$$

При этом максимальное напряжения будет равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} y_{\max} = \frac{M}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2}.$$

При  $M = M_T^*$  имеем  $\sigma_{\max} = \sigma_T$ :

$$\sigma_T = \frac{6M_T^*}{bh^2} \quad \text{или} \quad M_T^* = \sigma_T \frac{bh^2}{6}. \quad (4.4)$$

Определим напряжения при  $M > M_T^*$ . Для этого снова подсчитаем изгибающий момент, учитывая иной характер распределения напряжений (см. рисунок 4.3,в):

$$M = \sigma_T \frac{b(2a)^2}{6} + 2\sigma_T b \left( \frac{h}{2} - a \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + a \right) = \sigma_T \frac{2ba^2}{3} + \sigma_T b \left( \frac{h^2}{4} - a^2 \right) =$$

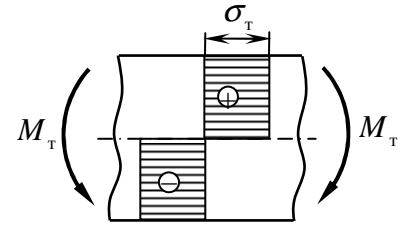
$$= -\sigma_{\tau} \frac{ba^2}{3} + \sigma_{\tau} b \frac{h^2}{4}$$

или

$$M = \sigma_{\tau} \frac{bh^2}{4} \left( 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \right). \quad (4.5)$$

Здесь  $2a$  – размер упругого ядра балки. В предельном состоянии эпюра напряжений имеет вид, показанный на рисунке 4.4. Полагая в (4.5)  $a=0$ , найдём предельный изгибающий момент для балки, который обозначим через  $M_{\tau}$ :

$$M_{\tau} = \sigma_{\tau} \frac{bh^2}{4}. \quad (4.6)$$



**Рисунок 4.4 – Предельный момент**

Отметим, что предельный момент не зависит от нагрузки. Это свойство сечения и материала.

С учётом (4.6) выражение (4.5) примет вид

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \right). \quad (4.7)$$

При  $M_{\tau}^* < M < M_{\tau}$  имеем

$$\frac{M}{M_{\tau}} = 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \quad \text{или} \quad \frac{4a^2}{3h^2} = 1 - \frac{M}{M_{\tau}},$$

откуда

$$a = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M_{\tau}} \right)}. \quad (4.8)$$

Итак, мы имеем два характерных момента  $M_{\tau}^*$  и  $M_{\tau}$ . При действии первого момента напряжения достигают  $\sigma_{\tau}$  только в крайних волокнах, а при действии второго момента во всех волокнах напряжения равны  $\sigma_{\tau}$ . Сравним эти значения. Согласно (4.4) и (4.6)

$$\frac{M_{\tau}}{M_{\tau}^*} = \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{2}. \quad (4.9)$$

Если известно значение  $M$ , то по формуле (4.8) может быть определён размер упругого ядра сечения балки.

Пусть  $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}$ . Используя (4.7), найдём момент

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{h^2} \right) = M_{\tau} \left( 1 - \frac{1}{27} \right) = \frac{26}{27} M_{\tau}.$$

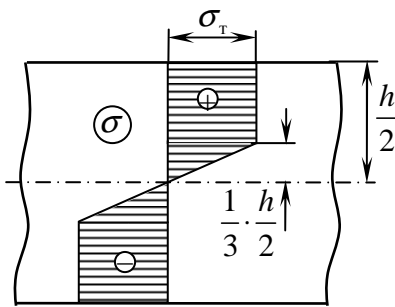


Рисунок 4.5 – Эпюра напряжений

Соответствующая эпюра напряжений представлена на рисунке 4.5.

После снятия этого момента в балке будут остаточные напряжения  $\sigma'$ . Определим их по теореме о разгрузке:

$$\sigma' = \sigma - \sigma^0, \quad (4.10)$$

где  $\sigma^0$  – напряжения в сечении балки, возникающие в предположении, что момент  $M$  вос-

принимается упруго:

$$\sigma^0 = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_{\max}^0 = \frac{M}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6}{bh^2} \cdot \frac{26}{27} M_{\tau} = \frac{6}{bh^2} \cdot \frac{26}{27} \cdot \frac{bh^2}{4} \sigma_{\tau} = \frac{13}{9} \sigma_{\tau}.$$

На рисунке 4.6 показана эпюра напряжений  $\sigma^0$ , а на рисунке 4.7 изображено распределение остаточных напряжений, рассчитанных по формуле (4.10). Напряжения  $\sigma'$  являются самоуравновешенными.

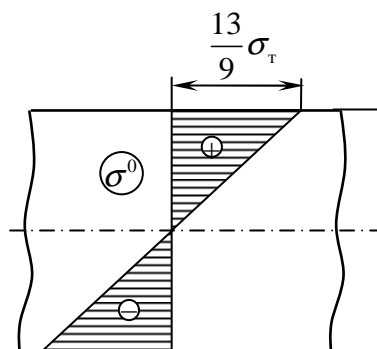


Рисунок 4.6 – Линейное решение

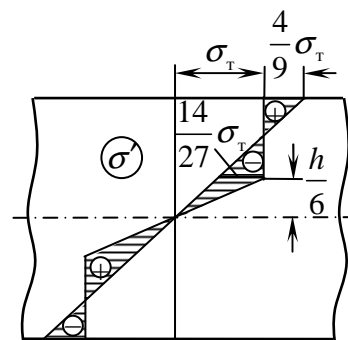


Рисунок 4.7 – Эпюра остаточных напряжений

Определим перемещения  $v$  точек оси балки (рисунок 4.8). Поскольку при  $y = a$  деформация  $\varepsilon = \varepsilon_{\tau} = \sigma_{\tau}/E$ , то согласно формуле (4.1)

$$\frac{\sigma_{\tau}}{E} = \frac{a}{\rho} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_{\tau}}{Ea}.$$

При малых углах поворота кривизна балки выражается как

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2},$$

откуда

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\sigma_{\tau}}{Ea}. \quad (4.11)$$

Первое интегрирование данного уравнения даёт

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_{\tau}}{Ea}x + C_1.$$

В заделке при  $x = 0$  угол поворота  $\frac{dv}{dx} = 0$  и, следовательно,  $C_1 = 0$ . Интегрируя далее, получим

$$v = \frac{\sigma_{\tau}}{Ea} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Поскольку при  $x = 0$  перемещение  $v = 0$ , то и  $C_2 = 0$ . Тогда

$$v = \frac{\sigma_{\tau}}{2Ea}x^2, \quad (4.12)$$

где  $a$  находится по формуле (4.8).

При этом максимальный прогиб равен

$$v(l) = f = \frac{\sigma_{\tau}}{2Ea}l^2. \quad (4.13)$$

В линейной упругой постановке имеем

$$\frac{d^2v^0}{dx^2} = \frac{M}{EI}; \quad \frac{dv^0}{dx} = \frac{M}{EI}x; \quad v^0 = \frac{M}{2EI}x^2.$$

Также определяем максимальный прогиб при упругом восприятии момента:

$$v^0(l) = f^0 = \frac{M}{2EI}l^2. \quad (4.14)$$

И, наконец, находим остаточный прогиб

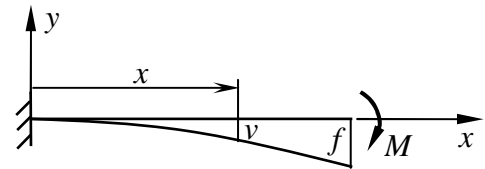


Рисунок 4.8 – Деформация балки

$$f' = f - f^0 = \frac{\sigma_T}{2Ea} l^2 - \frac{M}{2EI} l^2. \quad (4.15)$$

Пример:

$$M = \frac{26}{27} M_T; \quad h = 10 \text{ см}; \quad b = 5 \text{ см}; \quad l = 60 \text{ см}; \quad E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда согласно (4.4) и (4.6)

$$M_T^* = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{6} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^2}{4} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{4} = 33,75 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

откуда

$$M = \frac{26}{27} M_T = \frac{26}{27} \cdot 33,75 = 32,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поскольку

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2},$$

то по формуле (4.13)

$$f = \frac{\sigma_T}{2Ea} l^2 = \frac{270 \cdot 600^2 \cdot 6}{2 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 40,5 \text{ мм}.$$

Находим момент инерции поперечного сечения балки

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 4,1667 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Согласно (4.14)

$$f^0 = \frac{M}{2EI} l^2 = \frac{32,5 \cdot 10^6 \cdot 600^2}{2 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 4,1667 \cdot 10^6} = 19,5 \text{ мм}.$$

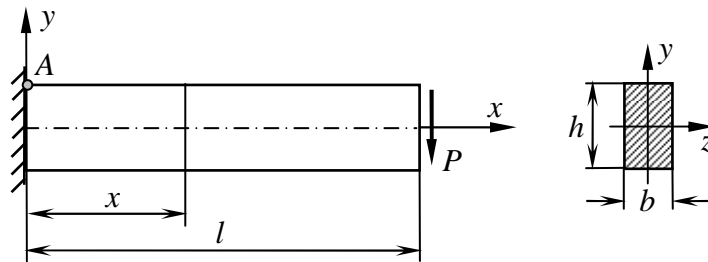
И, наконец, по формуле (4.15) определяем остаточный прогиб:

$$f' = f - f^0 = 40,5 - 19,5 = 21 \text{ мм}.$$

Полученное здесь решение можно обобщить и на случай более общего нагружения балки.

## 5 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ИЗ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА СИЛОЙ НА КОНЦЕ

Рассмотрим консольную балку (рисунок 5.1). Будем считать, что материал балки также не обладает упрочнением.



**Рисунок 5.1 – Консольная балка**

Решим сначала задачу в предположении, что сила воспринимается упруго. Имеем

$$\sigma = \frac{M}{I} y; \quad M = P(l - x); \quad I = \frac{bh^3}{12};$$

$$\sigma = \frac{12P(l - x)}{bh^3} y. \quad (5.1)$$

Максимальные напряжения, очевидно, будут в заделке ( $x = 0$ ) при  $y = \pm h/2$ . Так, например, для точки A получим

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(0, \frac{h}{2}\right) = \frac{12Pl}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6Pl}{bh^2}.$$

По мере роста нагрузки напряжение в данной точке в первую очередь достигнет предела текучести. Пусть при  $P = P_T^*$  максимальное напряжение  $\sigma_{\max} = \sigma_T$ . Определим эту силу, воспользовавшись предыдущим выражением,

$$\sigma_T = \frac{6P_T^* l}{bh^2} \quad \text{или} \quad P_T^* = \frac{bh^2}{6l} \sigma_T. \quad (5.2)$$

Введём обозначение

$$M_T^* = \frac{bh^2}{6} \sigma_T,$$

тогда

$$P_T^* = \frac{M_T^*}{l}.$$

При дальнейшем росте внешней нагрузки напряжение  $\sigma_T$  будет проникать вглубь сечения (рисунок 5.2), а также идти вправо вдоль оси  $x$ . Пусть при  $P = P_T$  напряжение на нейтральной оси в сечении у заделки достигает предела текучести, т.е. всё сечение начинает работать за пределами упругости. Принято говорить, что в данном сечении возникает пластический шарнир. Это предельное состояние для балки, поскольку она превращается в механизм, и дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.

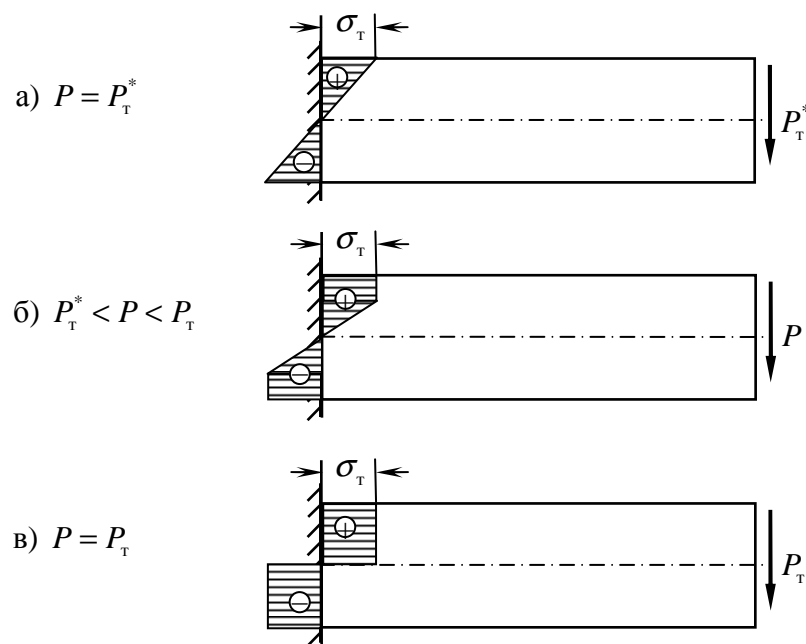


Рисунок 5.2 – Изменение напряжений в сечении у заделки

Определим предельную силу. Имеем

$$P_T = \frac{M_T}{l},$$

где в соответствии с рисунком 5.2, в предельный момент равен

$$M_T = \frac{bh^2}{4} \sigma_T.$$

Тогда

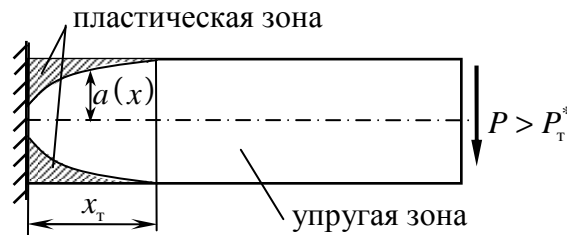
$$P_T = \frac{bh^2}{4l} \sigma_T. \quad (5.3)$$



Используя (5.2) и (5.3), сопоставим силы  $P_T^*$  и  $P_T$ :

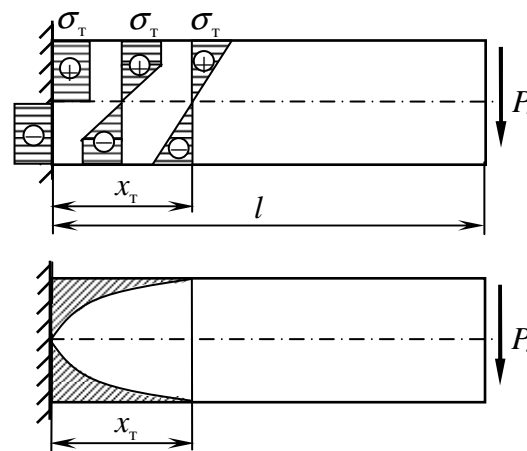
$$\frac{P_T}{P_T^*} = \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad P_T = \frac{3}{2} P_T^*. \quad (5.4)$$

При  $P > P_T^*$  в балке можно выделить две области: упругую и пластическую (рисунок 5.3).



**Рисунок 5.3 – Конфигурация пластической области**

При  $P = P_T$  в заделке имеет место предельное состояние. При удалении от неё распределение напряжений будет иным (рисунок 5.4).



**Рисунок 5.4 – Изменение напряжений по длине балки**

Найдём размер упругопластического участка  $x_T$  из условия, что в крайних волокнах соответствующего сечения ( $x = x_T$ ) напряжения достигают предела текучести. Используя (5.1), запишем

$$\sigma\left(x_T, \frac{h}{2}\right) = \frac{12P_T(l - x_T)}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_T,$$

откуда

$$l - x_{\tau} = \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\tau}}{P_{\tau}} = \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\tau}}{\frac{bh^2}{4l} \sigma_{\tau}} = \frac{2}{3} l;$$

$$x_{\tau} = \frac{1}{3} l.$$

При  $P < P_{\tau}$  это размер будет меньше. Действительно,

$$\sigma\left(x_{\tau}, \frac{h}{2}\right) = \frac{6P(l - x_{\tau})}{bh^2} = \sigma_{\tau};$$

$$l - x_{\tau} = \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\tau}}{P} = \frac{M_{\tau}^*}{P};$$

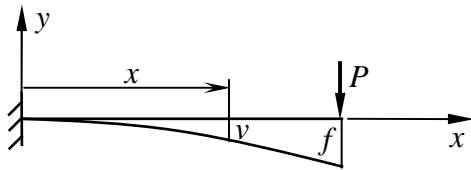
$$x_{\tau} = l - \frac{M_{\tau}^*}{P} = l - \frac{2}{3} \frac{M_{\tau}}{P} = l - \frac{2}{3} \frac{P_{\tau}}{P} l = l \left(1 - \frac{2}{3} \frac{P_{\tau}}{P}\right). \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что при  $P < P_{\tau}$  размер  $x_{\tau} < l/3$ .

Найдём границы между упругой и пластической областями. Согласно (4.8) имеем

$$a(x) = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_{\tau}}\right)} = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left[1 - \frac{P(l-x)}{P_{\tau} l}\right]} = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left[1 - \frac{P}{P_{\tau}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]} \quad (0 \leq x \leq x_{\tau}). \quad (5.6)$$

Из этой формулы следует, что границы упругой и пластической областей являются квадратными параболлами.



Перейдём к определению перемещений балки (рисунок 5.5).

На упругопластическом участке ( $0 \leq x \leq x_{\tau}$ ) согласно (4.11) имеем

**Рисунок 5.5 – Деформация балки**

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\sigma_{\tau}}{Ea}$$

или

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{2\sigma_{\tau}}{Eh \sqrt{3 \left[1 - \frac{P(l-x)}{M_{\tau}}\right]}} = \kappa_1. \quad (5.7)$$

Для упругого участка ( $x_{\tau} \leq x \leq l$ )

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P(l-x)}{EI} = \kappa_2. \quad (5.8)$$

Таким образом,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \kappa = \begin{cases} \kappa_1, & 0 \leq x \leq x_T \\ \kappa_2, & x_T \leq x \leq l \end{cases}$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^x \kappa dx = \vartheta = \begin{cases} \vartheta_1, & 0 \leq x \leq x_T \\ \vartheta_2, & x_T \leq x \leq l \end{cases}$$

где

$$\vartheta_1 = \int_0^x \kappa_1 dx; \quad \vartheta_2 = \vartheta_1(x_T) + \int_{x_T}^x \kappa_2 dx. \quad (5.9)$$

Интегрируя далее, получим выражение для прогиба:

$$v = \int_0^x \vartheta dx = \begin{cases} v_1, & 0 \leq x \leq x_T \\ v_2, & x_T \leq x \leq l \end{cases}$$

где

$$v_1 = \int_0^x \vartheta_1 dx;$$

$$v_2 = v_1(x_T) + \int_{x_T}^x \vartheta_2 dx.$$

(5.10)

Примерный вид графиков этих функций показан на рисунке 5.6.

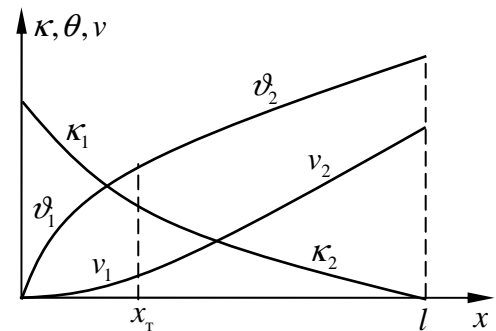


Рисунок 5.6 – Графики функций

Пример:

$$h = 10 \text{ см}; \quad b = 5 \text{ см}; \quad l = 80 \text{ см}; \quad E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = 7,2 \cdot 10^4 \cdot \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 3 \cdot 10^{11} \text{ мм}^4;$$

$$M_T^* = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{6} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_T = \frac{3}{2} M_T^* = \frac{3}{2} \cdot 22,5 = 33,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P_{\tau}^* = \frac{M_{\tau}^*}{l} = \frac{22,5 \cdot 10^6}{800} = 28125 \text{ Н};$$

$$P_{\tau} = \frac{3}{2} P_{\tau}^* = \frac{3}{2} \cdot 28125 = 42188 \text{ Н}.$$

Для определённости примем, что размер пластического ядра в сечении у заделки составляет  $h/3$ , т.е.

$$a(0) = \frac{h}{6}.$$

При этом согласно (4.7) и (5.5)

$$\begin{aligned} P &= \frac{M(0)}{l} = \frac{M_{\tau}}{l} \left( 1 - \frac{4(a(0))^2}{3h^2} \right) = \frac{M_{\tau}}{l} \left( 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{h^2}{36h^2} \right) = \\ &= \frac{26 M_{\tau}}{27 l} = \frac{26}{27} \cdot \frac{33,75 \cdot 10^6}{800} = 40625 \text{ Н}; \\ x_{\tau} &= l \left( 1 - \frac{2 P_{\tau}}{3 P} \right) = 800 \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{42188}{40625} \right) = 246,2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

По формулам (5.7) и (5.8) вычисляем значения кривизны оси балки. Интегрирование выражений (5.9) и (5.10) выполняем численно по методу трапеций. Результаты расчётов представлены в таблицах 5.1 и 5.2.

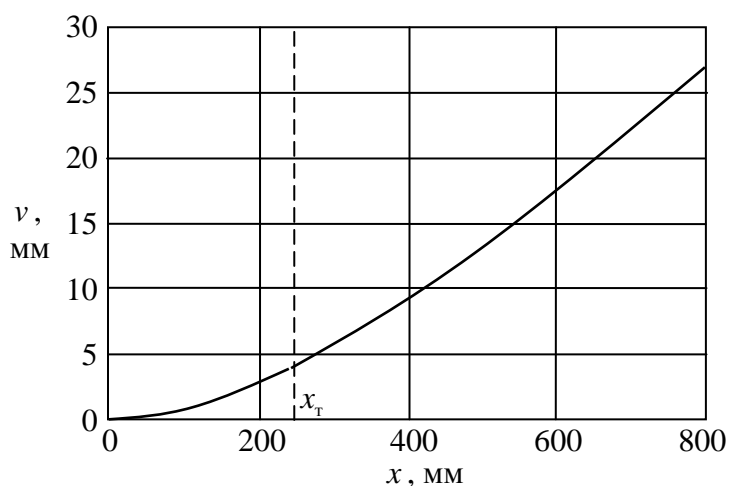
**Таблица 5.1 – Вычисление значений кривизны оси балки**

$\frac{x}{x_{\tau}}$	$x$ , мм	$\kappa_1 \cdot 10^5$ , 1/мм	$\frac{x-x_{\tau}}{l-x_{\tau}}$	$x$ , мм	$\kappa_2 \cdot 10^5$ , 1/мм
0	0	22,5	0	246,2	7,500
0,2	49,23	13,95	0,2	356,9	6,000
0,4	98,46	10,98	0,4	467,7	4,500
0,6	147,7	9,343	0,6	578,5	3,000
0,8	196,9	8,271	0,8	689,2	1,500
1,0	246,2	7,500	1,0	800,0	0

**Таблица 5.2 – Вычисление значений прогиба балки**

$\frac{x}{x_{\tau}}$	$x$ , мм	$v_1$ , мм	$\frac{x-x_{\tau}}{l-x_{\tau}}$	$x$ , мм	$v_2$ , мм
0	0	0	0	246,2	3,98
0,2	49,23	0,225	0,2	356,9	7,47
0,4	98,46	0,797	0,4	467,7	11,7
0,6	147,7	1,64	0,6	578,5	16,5
0,8	196,9	2,71	0,8	689,2	21,6
1,0	246,2	3,98	1,0	800,0	27,0

График функции прогиба показан на рисунке 5.7.

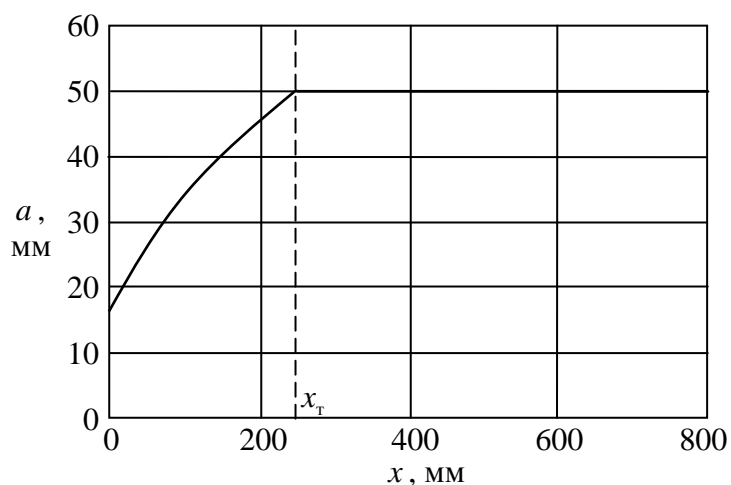


**Рисунок 5.7 – Изменение прогиба по длине балки**

Для сравнения приведём «упругое» решение. Максимальный прогиб в этом случае равен

$$f^0 = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{40625 \cdot 800^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^{11}} = 23,1 \text{ мм.}$$

В заключение, используя формулу (5.6), построим график зависимости  $a(x)$ , описывающий границу между упругой и пластической областями (рисунок 5.8).



**Рисунок 5.8 – Граница между упругой и пластической областями**

## 6 ПРЕДЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ ДЛЯ БАЛКИ С СЕЧЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ОДНУ ОСЬ СИММЕТРИИ

Сечение в виде прямоугольника на практике встречается довольно редко. Оно имеет две оси симметрии. Рассмотрим более общий случай, когда сечение имеет только одну ось симметрии. Будем так же, как и ранее, считать материал неупрочняющимся. Основная сложность расчёта изгиба балок с таким сечением состоит в том, что при возникновении текучести нейтральная линия уже не будет проходить через центр тяжести сечения, как при упругом изгибе (рисунок 6.1).

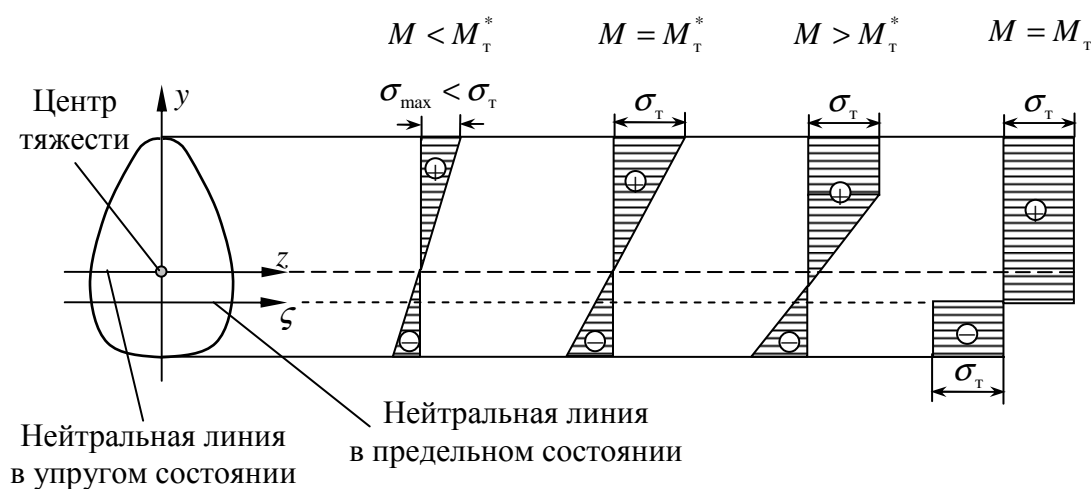


Рисунок 6.1 – Смещение нейтральной оси

Положение нейтральной оси  $\zeta$  в предельном состоянии устанавливается из условия равенства нулю нормальной силы:

$$\int_F \sigma dF = 0. \quad (6.1)$$

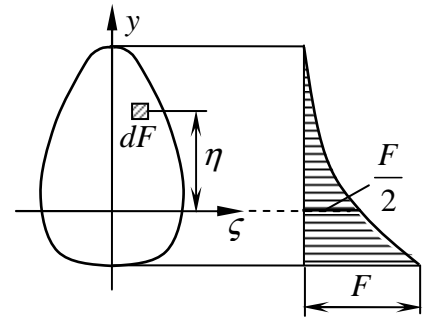
Обозначим через  $F_p$  площадь растянутой части, а через  $F_{сж}$  площадь сжатой части поперечного сечения. Тогда, учитывая, что в предельном состоянии во всех точках растянутой части напряжения равны  $\sigma_T$ , а во всех точках сжатой части – минус  $\sigma_T$ , из уравнения (6.1) получаем

$$\int_{F_p} \sigma_T dF - \int_{F_{сж}} \sigma_T dF = 0,$$

откуда следует

$$F_p = F_{сж}.$$

Таким образом, нейтральная линия делит площадь поперечного сечения на две равные по площади части (рисунок 6.2). Очевидно, что если сечение имеет две оси симметрии, то в предельном состоянии нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.



**Рисунок 6.2 – График изменения площади**

Определим предельный изгибающий момент (см. рисунок 6.2):

$$M_T = \int_F \sigma \eta dF = \int_{F_p} \sigma_T \eta dF + \int_{F_{сж}} \sigma_T |\eta| dF = \sigma_T \int_{F_p} \eta dF + \sigma_T \int_{F_{сж}} |\eta| dF$$

или

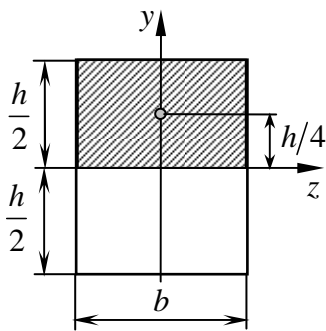
$$M_T = \sigma_T (S_p + |S_{сж}|), \quad (6.2)$$

где  $S_p$  и  $|S_{сж}|$  – абсолютные значения статических моментов соответственно растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии  $\zeta$ .

В частном случае, когда сечение имеет две оси симметрии,

$$S_p = |S_{сж}| = S \quad \text{и} \quad M_T = 2\sigma_T S.$$

Рассмотрим различные формы поперечного сечения изгибаемой балки.



**Рисунок 6.3 – Прямоугольник**

*Пример 1:* Прямоугольное сечение (рисунок 6.3).

Имеем

$$S = b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}; \quad 2S = \frac{bh^2}{4};$$

$$M_T = 2\sigma_T S = \frac{bh^2}{4} \sigma_T.$$

*Пример 2:* Сечение тонкостенной трубы (рисунок 6.4).

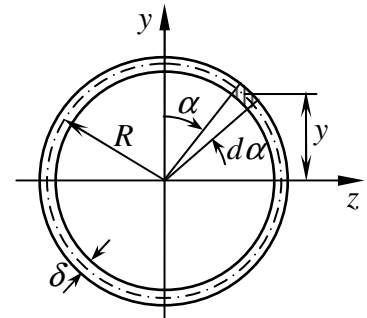
Выделим малый элемент сечения длиной

$$ds = R d\alpha,$$

где  $R$  – радиус средней линии сечения.

Учитывая, что

$$y = R \cos \alpha,$$

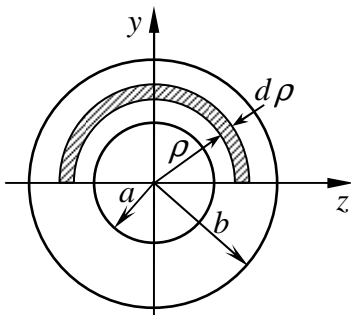


**Рисунок 6.4 – Тонкостенная труба**

запишем

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} y \delta ds = 2 \int_0^{\pi/2} \delta R^2 \cos \alpha d\alpha = 2\delta R^2 \sin \alpha \Big|_0^{\pi/2} = 2\delta R^2 \quad \text{и} \quad 2S = 4\delta R^2;$$

$$M_T = 2\sigma_T S = 4\delta R^2 \sigma_T.$$



**Рисунок 6.5 – Толстостенная труба**

*Пример 3:* Сечение толстостенной трубы (рисунок 6.5).

Используя результаты предыдущего примера, найдём сначала статический момент полукольца бесконечно малой толщины:

$$dS = 2\rho^2 d\rho.$$

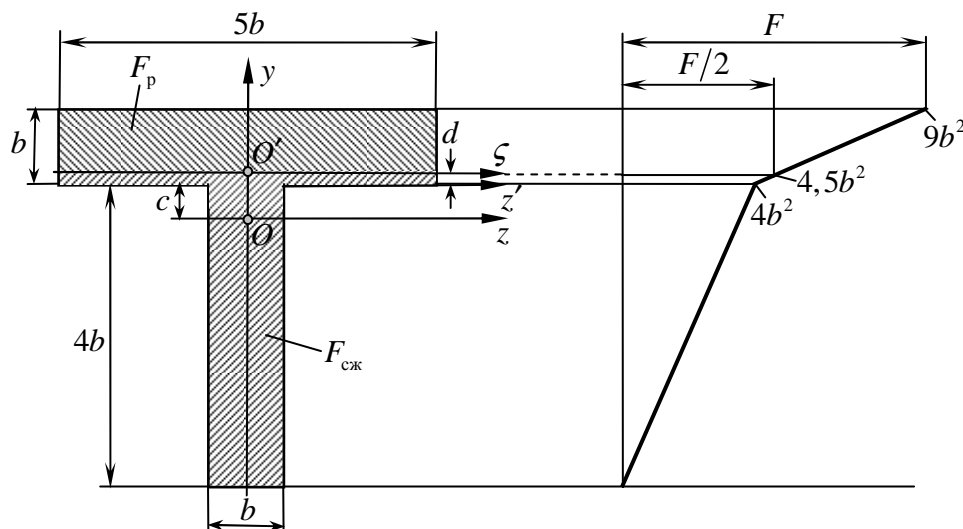
Тогда

$$S = \int_a^b 2\rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \rho^3 \Big|_a^b = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \quad \text{и} \quad 2S = \frac{4}{3} (b^3 - a^3);$$

$$M_T = 2\sigma_T S = \frac{4}{3} \sigma_T (b^3 - a^3).$$

Для круглого сечения, когда  $a = 0$ , получаем  $M_T = \frac{4}{3} \sigma_T b^3$ .

*Пример 4:* Сечение с одной осью симметрии (рисунок 6.6).



**Рисунок 6.6 – Тавровый профиль**

Площадь сечения равна

$$F = 5b^2 + 4b^2 = 9b^2,$$



тогда

$$F_p = F_{сж} = \frac{F}{2} = 4,5b^2.$$

Определяем положение центра тяжести сечения относительно произвольно выбранной оси  $z'$ :

$$c = \frac{S_{z'}}{F} = \frac{1}{9b^2}(5b^2 \cdot 0,5b - 4b^2 \cdot 2b) = -0,6111b.$$

По графику изменения площади (см. рисунок 6.6) находи размер  $d$ , характеризующий положение нейтральной оси  $\zeta$  в предельном состоянии:

$$d = \frac{4,5b^2 - 4b^2}{9b^2 - 4b^2}b = \frac{0,5b^2}{5b^2}b = 0,1b.$$

Далее определяем статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно оси  $\zeta$ :

$$S_p = 5b \cdot 0,9b \cdot 0,45b = 2,025b^3;$$

$$|S_{сж}| = 4b \cdot b \cdot (2b + 0,1b) + 5b \cdot 0,1b \cdot 0,05b = 8,425b^3.$$

Таким образом,

$$S_p + |S_{сж}| = 2,025b^3 + 8,425b^3 = 10,45b^3$$

и согласно (6.2)

$$M_T = \sigma_T (S_p + |S_{сж}|) = 10,45b^3 \sigma_T.$$

## 7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ БАЛОК МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Отметим, что если диаграмма растяжения материала не имеет упрочнения, несущая способность статически определимых балок исчерпывается тогда, когда в опасном сечении балки возникает пластический шарнир. Однако для статически неопределимых систем образование одного пластического шарнира, вообще говоря, ещё не приводит к исчерпанию несущей способности.

Рассмотрим несколько примеров определения предельной нагрузки для балок из неупрочняющегося материала. При этом будем использовать метод предельного равновесия, который заключается в составлении уравнений равновесия для балки в предельном состоянии.

*Пример 1:* Шарнирно опёртая балка нагружена силой  $P$  (рисунок 7.1,а). Определить предельное значение этой силы.

Данная система является статически определимой. Из уравнений равновесия находим реакции опор:

$$R_1 = P \frac{b}{a+b}; \quad R_3 = P \frac{a}{a+b}.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 7.1,б. Рассматриваемую балку можно нагружать до тех пор, пока максимальный изгибающий момент не достигнет предельной величины  $M_T$ .

Пусть при  $P = P_T$  момент в сечении 2  $M_2 = M_T$ . Тогда

$$R_1 a = M_T; \quad P_T \frac{b}{a+b} a = M_T,$$

откуда сразу находим предельную силу:

$$P_T = M_T \frac{a+b}{ab} = M_T \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

При  $a = b = l/2$  имеем

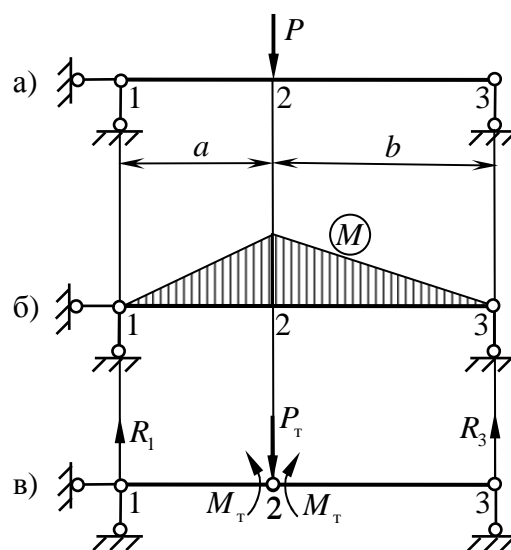
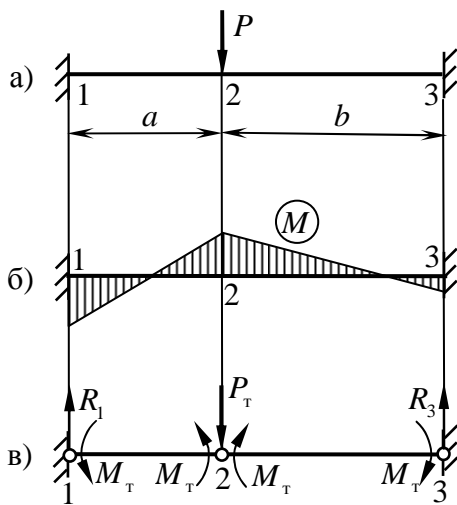


Рисунок 7.1 – Шарнирно опёртая балка, нагруженная силой

$$P_T = 4 \frac{M_T}{l}.$$

При  $P = P_T$  изгибающий момент в сечении 2 равен предельному значению. Принято говорить, что в этом сечении образовался пластический шарнир (рисунок 7.1,в). Дальнейшее увеличение нагрузки в данном случае невозможно, поскольку балка становится геометрически изменяемой, т.е. превращается в механизм.

**Пример 2:** Защемлённая по концам балка нагружена силой  $P$  (рисунок 7.2,а). Определить  $P_T$ .



**Рисунок 7.2 – Защемлённая балка, нагруженная силой**

Данная система является дважды статически неопределимой. Как следует из эпюры изгибающих моментов в пределах упругости (рисунок 7.2,б), при увеличении внешней нагрузки пластическая область возникает поочередно в окрестности сечений 1, 2 и 3 (в том или ином порядке в зависимости от соотношений размеров  $a$  и  $b$ ). Несущая способность балки исчерпывается (балка превращается в геометрически изменяемую систему), когда в сечениях 1, 2 и 3 образуются пластические шарниры (рисунок 7.2,в). Заметим, что

направления моментов в данных сечениях различное. Это вытекает из вида изогнутой оси, который удобнее всего проследить по эпюре изгибающих моментов в пределах упругости.

Величину предельной силы  $P_T$  найдём из уравнений равновесия и условий равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту  $M_T$ .

Сначала определяем реакции в предельном состоянии:

$$R_1 = P_T \frac{b}{a+b}; \quad R_3 = P_T \frac{a}{a+b}.$$

Далее составим равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки 2, например для участка 1-2:

$$2M_T - R_1 a = 0 \quad \text{или} \quad P_T \frac{ab}{a+b} = 2M_T,$$

откуда

$$P_T = 2M_T \frac{a+b}{ab} = 2M_T \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Отметим, что если рассмотреть равновесие участка 2-3, то получится тот же результат.

При  $a = b = l/2$  имеем

$$P_T = 8 \frac{M_T}{l}.$$

Таким образом, заделка по сравнению с шарнирным опиранием увеличивает предельную нагрузку в два раза.

*Пример 3:* Шарнирно опёртая балка находится под действием равномерно распределённой нагрузки  $q$  (рисунок 7.3,а). Определить предельное значение  $q_T$ .

Рассматриваемая система является статически определимой. На рисунке 7.3,б показана эпюра изгибающих моментов в пределах упругости. Она будет иметь тот же самый вид при пластическом деформировании балки.

По мере роста нагрузки в середине пролёта появится пластический шарнир, что приведёт к исчерпанию несущей способности данной системы.

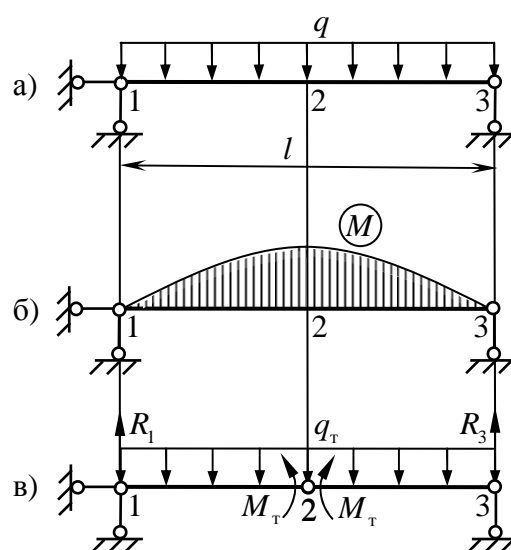
Рассмотрим равновесие балки в предельном состоянии (рисунок 7.3,в). Найдём реакции:

$$R_1 = R_3 = \frac{q_T l}{2}.$$

Составим равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки 2, например для участка 2-3:

$$R_3 \frac{l}{2} - q_T \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - M_T = q_T \frac{l^2}{4} - q_T \frac{l^2}{8} - M_T = 0,$$

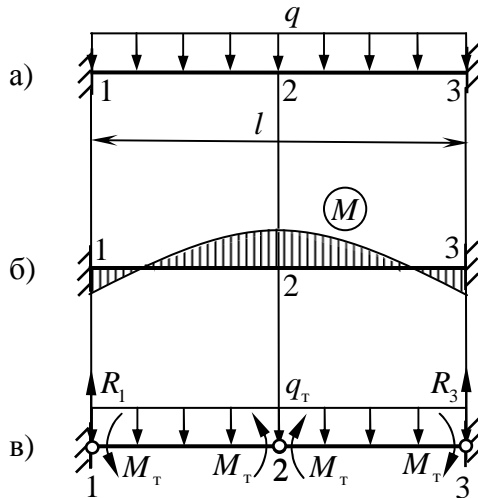
откуда



**Рисунок 7.3 – Шарнирно опёртая балка под действием распределённой нагрузки**

$$q_T = 8 \frac{M_T}{l^2}.$$

*Пример 4:* Защемлённая по концам балка находится под действием равномерно распределённой нагрузки  $q$  (рисунок 7.4,а). Определить  $q_T$ .



**Рисунок 7.4 – Защемлённая балка под действием распределённой нагрузки**

Данная система является дважды статически неопределимой, поэтому для исчерпания её несущей способности должны появиться три пластических шарнира. По эпюре изгибающих моментов в пределах упругости (рисунок 7.4,б) видно, что места образования таких шарниров являются сечения 1, 2 и 3.

Рассмотрим равновесие балки в предельном состоянии (рисунок 7.4,в). Найдём реакции:

$$R_1 = R_3 = \frac{q_T l}{2}.$$

Составим равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки 2, например для участка 2-3:

$$R_3 \frac{l}{2} - q_T \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - 2M_T = q_T \frac{l^2}{4} - q_T \frac{l^2}{8} - 2M_T = 0,$$

откуда

$$q_T = 16 \frac{M_T}{l^2}.$$

Здесь также заделка по сравнению с шарнирным опиранием увеличивает предельную нагрузку в два раза.

*Пример 5:* Балка, заделанная одним концом и опёртая другим, находится под действием равномерно распределённой нагрузки  $q$  (рисунок 7.5,а). Определить  $q_T$ .

Данная система является один раз статически неопределимой, следовательно, для исчерпания её несущей способности требуются два пластических шарнира. По эпюре изгибающих моментов в пределах упругости (рисунок 7.5,б) видно, что один пластический шарнир возникает в заделанном сечении 1, а второй – где-то в пролёте балки (точное положение мы не знаем,

поскольку эпюра моментов при пластическом деформировании будет изменяться). Обозначим расстояние от сечения 3 до сечения 2, в котором возникает второй пластический шарнир, через  $c$  (рисунок 7.5,в).

Рассмотрим балку в предельном состоянии.

Составим равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки 2 для участка 2-3:

$$R_3 c - q_T c \cdot \frac{c}{2} - M_T = 0;$$

$$R_3 c = q_T \frac{c^2}{2} + M_T. \quad (7.1)$$

Далее запишем равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки 1 для балки в целом:

$$R_3 l - q_T l \cdot \frac{l}{2} + M_T = 0;$$

$$R_3 l = q_T \frac{l^2}{2} - M_T. \quad (7.2)$$

В сечении 2 изгибающий момент имеет максимум, следовательно, в этом сечении перерезывающая сила равна нулю:

$$Q_2 = -R_3 + q_T c = 0;$$

$$R_3 = q_T c. \quad (7.3)$$

Складывая выражения (7.1) и (7.2), получим

$$R_3 c + R_3 l = \frac{q_T}{2} (c^2 + l^2)$$

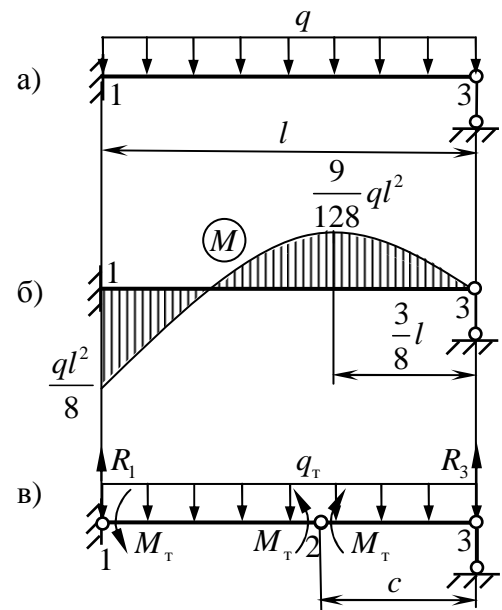
или с учётом (7.3)

$$q_T c^2 + q_T c l = \frac{q_T}{2} (c^2 + l^2),$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно размера  $c$ :

$$c^2 + 2cl - l^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим



**Рисунок 7.5 – Балка под действием распределённой нагрузки**

$$c = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 4l^2}}{2} = -l \pm \sqrt{2}l.$$

Поскольку отрицательный корень нас не интересует, получаем

$$c = (\sqrt{2} - 1)l = 0,4142l. \quad (7.4)$$

Данный размер несколько больше расстояния до сечения, в котором изгибающий момент в пределах упругости имеет максимум. Это расстояние равно  $3/8 l = 0,375l$ .

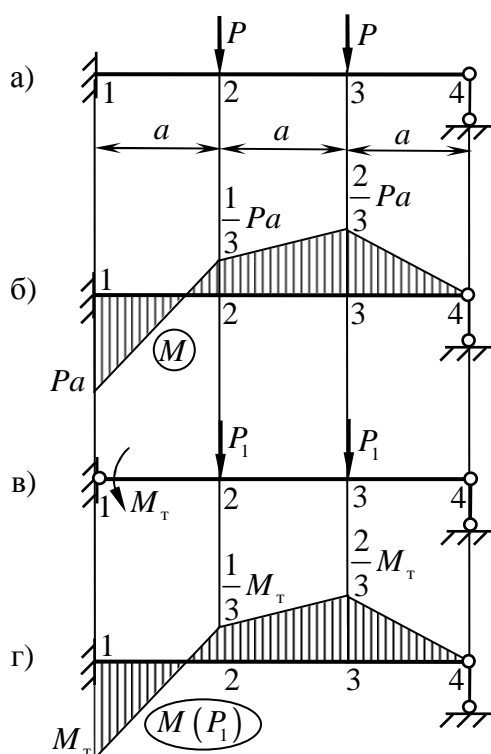
Из (7.1) и (7.3) получаем

$$q_{\tau} c^2 = q_{\tau} \frac{c^2}{2} + M_{\tau} \quad \text{или} \quad \frac{q_{\tau} c^2}{2} = M_{\tau},$$

откуда с учётом (7.4)

$$q_{\tau} = \frac{2M_{\tau}}{c^2} = \frac{2M_{\tau}}{(3 - 2\sqrt{2})l^2} = 11,66 \frac{M_{\tau}}{l^2}.$$

**Пример 6:** Балка, заделанная одним концом и опёртая другим, находится под действием двух сил  $P$  (рисунок 7.6,а). Определить предельную нагрузку. Проследить изменение эпюры изгибающих моментов по мере роста нагрузки.



**Рисунок 7.6 – Балка под действием двух сил**

Напомним, что данная система является один раз статически неопределимой. Рассмотрим другой более общий способ определения предельной нагрузки.

Как следует из эпюры изгибающих моментов в пределах упругости (рисунок 7.6,б), при увеличении нагрузки пластический шарнир появится сначала в сечении 1.

Пусть при  $P = P_1$  наибольший момент достигает предельного значения, т.е.  $M_1 = M_{\tau}$  (рисунок 7.6,в). Тогда

$$P_1 a = M_{\tau} \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{M_{\tau}}{a}.$$

При этом эпюра изгибающих мо-

ментов будет выглядеть так, как показано на рисунке 7.6,г.

При дальнейшем росте нагрузки ( $P > P_1$ ) изгибающий момент в сечении 1 не будет изменяться (рисунок 7.7,а). Это обстоятельство позволяет, приняв

$$P = P_1 + \Delta P,$$

считать, что дополнительная нагрузка  $\Delta P$  будет восприниматься балкой, полученной из исходной постановкой обыкновенного шарнира в сечении 1 (рисунок 7.7,б). Данная система будет уже статически определимой. Для неё эпюра изгибающих моментов изображена на рисунке 7.7,в.

Совместное рассмотрение эпюр моментов  $M(P_1)$  и  $M(\Delta P)$  показывает, что в сечении 3 возможно появление второго пластического шарнира (рисунок 7.7,г). При этом система уже превращается в механизм.

Найдем значение изгибающего момента в сечении 3:

$$M_3 = \frac{2}{3}M_T + \Delta P a.$$

Пусть, когда  $\Delta P = \Delta P_1$ , в сечении 3 появляется пластический шарнир, т.е.  $M_3 = M_T$ . Тогда на основании предыдущего равенства получим

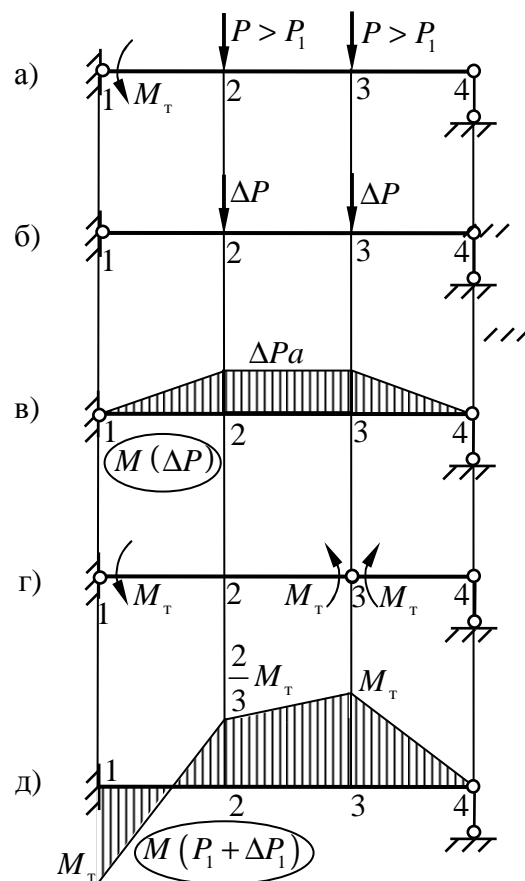
$$\frac{2}{3}M_T + \Delta P_1 a = M_T \quad \text{или} \quad \Delta P_1 = \frac{M_T}{3a}.$$

Теперь можно найти предельную нагрузку:

$$P_T = P_1 + \Delta P_1 = \frac{M_T}{a} + \frac{M_T}{3a} = \frac{4}{3} \frac{M_T}{a}.$$

Эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии представлена на рисунке 7.7,д.

Если сразу рассмотреть равновесие системы в предельном состоянии (см. рисунок 7.7,г), то мы получим тот же результат.



**Рисунок 7.7 – Статически определимая система**



## 8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

Если задана один раз статически неопределимая рама из неупрочняющегося материала, то для неё предельную нагрузку можно найти, используя следующий подход:

1. Сначала для исходной рамы решается линейная задача в предположении, что нагрузка воспринимается системой в пределах упругости. При этом статическая неопределимость раскрывается методами строительной механики.

2. По эпюре изгибающих моментов определяется сечение, в котором действует наибольший момент. В этом сечении ставится пластический шарнир и находится нагрузка  $P_1$ , при которой в рассматриваемом сечении момент достигает предельного значения, равного  $M_T$ .

3. При дальнейшем росте нагрузки изгибающий момент в этом сечении изменяться не будет, и заданная рама становится статически определимой. Для удобства расчёта при  $P > P_1$  принимается, что нагрузка  $P_1$  имеет приращение, т.е.

$$P = P_1 + \Delta P.$$

Приращение  $\Delta P$  прикладывается к раме, в которой вместо пластического шарнира ставится обыкновенный, где изгибающий момент всегда равен нулю. Для данной статически определимой системы строится эпюра изгибающих моментов.

4. Путём формального суммирования эпюр от нагрузок  $P_1$  и  $\Delta P$  определяется сечение, в котором сумма моментов  $M(P_1)$  и  $M(\Delta P)$  имеет наибольшее значение. Затем это значение приравнивается к  $M_T$ , и из данного условия определяется предельное приращение нагрузки  $\Delta P_1$ . Очевидно, что при совместном действии  $P_1 + \Delta P_1$  рама превращается в механизм. Таким образом,  $P_T = P_1 + \Delta P_1$  является предельной нагрузкой для рамы, характеризующей её несущую способность.

*Пример:* Плоская один раз статически неопределимая рама нагружена силой  $P$  (рисунок 8.1). Определить несущую способность, т.е. предельное значение приложенной силы  $P_T$ .

Выполним сначала решение в упругой постановке. При этом для раскрытия статической неопределённости воспользуемся методом сил. Для получения основной системы отбрасываем одну лишнюю связь – горизонтальный опорный стержень в точке 4. Прикладывая в направлении отброшенной связи неизвестную силу  $X_1$ , приходим к эквивалентной системе (рисунок 8.2).

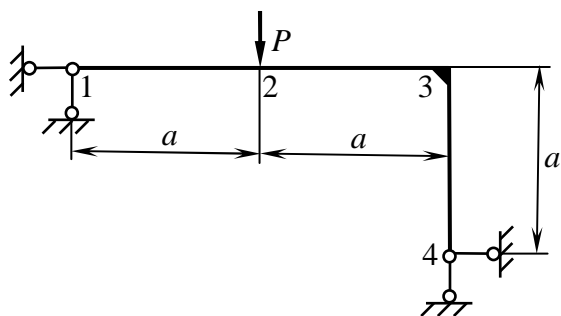


Рисунок 8.1 – Плоская рама

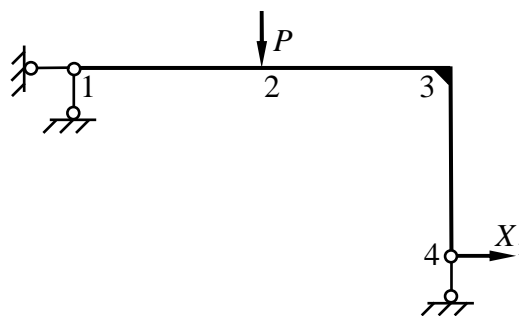


Рисунок 8.2 – Эквивалентная система

Для отыскания силы  $X_1$  составим каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0, \quad (8.1)$$

где

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds; \quad \Delta_{10} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI} ds. \quad (8.2)$$

Здесь  $EI$  – жёсткость сечения рамы на изгиб;  $M_0$  – изгибающий момент в основной системе от действия всей заданной нагрузки (рисунок 8.3);  $\bar{M}_1$  – изгибающий момент в единичной системе, когда действует только сила  $X_1 = 1$  (рисунок 8.4).

Из уравнения (8.1) следует, что

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}. \quad (8.3)$$

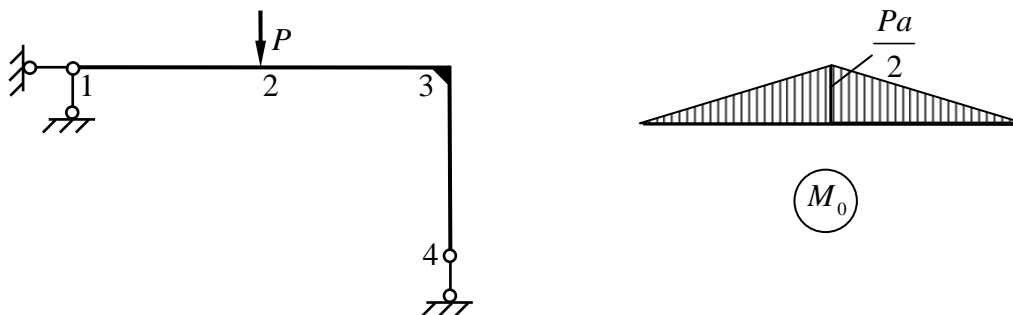


Рисунок 8.3 – Основная система

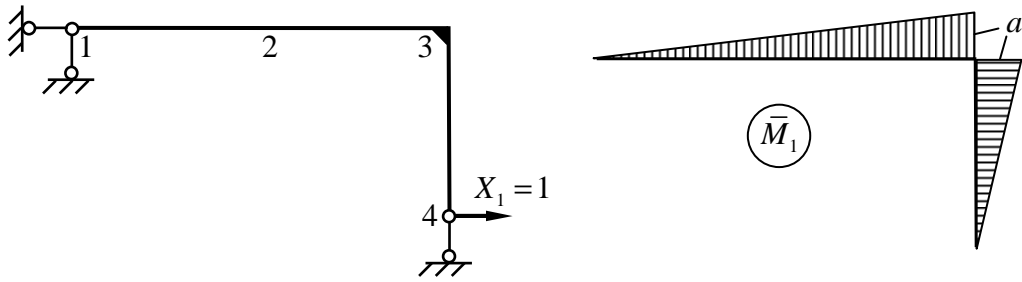


Рисунок 8.4 – Единичная система

После определения силы  $X_1$  можно найти распределение изгибающих моментов в исходной раме:

$$M = M_0 + X_1 \bar{M}_1. \quad (8.4)$$

Для рассматриваемой рамы жёсткость  $EI$  – величина постоянная. Учитывая данный факт и используя правило перемножения эпюр Верещагина, по формулам (8.2) вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}a = a^3;$$

$$EI\Delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{Pa^3}{4}.$$

Тогда согласно (8.3) находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{Pa^3}{4} \cdot \frac{1}{a^3} = -\frac{P}{4}.$$

Используя (8.4), строим эпюру изгибающих моментов для исходной рамы при условии, что она работает в пределах упругости (рисунок 8.5).

Видно, что в сечении 2 действует наибольший изгибающий момент. Предположим, что при  $P = P_1$  в сечении 2 появляется пластический шарнир, т.е. момент достигает значения  $M_T$ . Тогда

$$\frac{3}{8}P_1a = M_T \quad \text{и} \quad P_1 = \frac{8}{3} \frac{M_T}{a}.$$

Строим эпюру моментов при действии силы  $P_1$  (рисунок 8.6).

Пусть  $P > P_1$ . Представим нагрузку в виде суммы

$$P = P_1 + \Delta P.$$

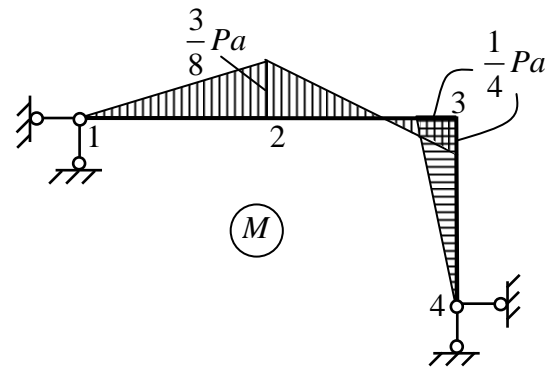
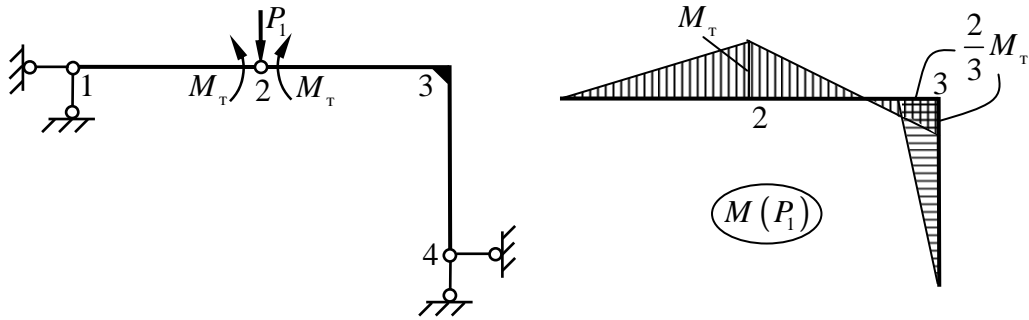


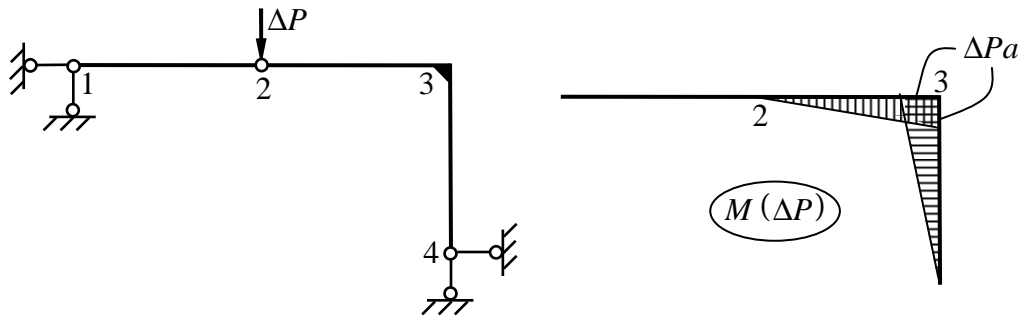
Рисунок 8.5 – Эпюра изгибающих моментов в пределах упругости



**Рисунок 8.6 – Появление первого пластического шарнира**

Дополнительная нагрузка  $\Delta P$  воспринимается рамой, полученной из исходной постановкой обыкновенного шарнира в сечении 2 (рисунок 8.7). Для построения эпюры моментов здесь удобно предварительно определить нормальную силу  $N_2$  в сечении 2. С этой целью составим уравнение моментов относительно точки 4 для участка 2-3-4:

$$N_2 a + \Delta P a = 0 \quad \text{и} \quad N_2 = -\Delta P.$$



**Рисунок 8.7 – Статически определимая система**

Пусть далее при  $P = P_1 + \Delta P$  в сечении 3 появляется второй пластический шарнир, т.е.

$$M_3 = \frac{2}{3} M_T + \Delta P_1 a = M_T,$$

откуда

$$\Delta P_1 = \frac{1}{3} \frac{M_T}{a}.$$

Таким образом, предельная для рассматриваемой рамы нагрузка будет равна

$$P_T = P_1 + \Delta P = \frac{8}{3} \frac{M_T}{a} + \frac{1}{3} \frac{M_T}{a} = 3 \frac{M_T}{a}.$$

Построим эпюру моментов в предельном состоянии (рисунок 8.8).

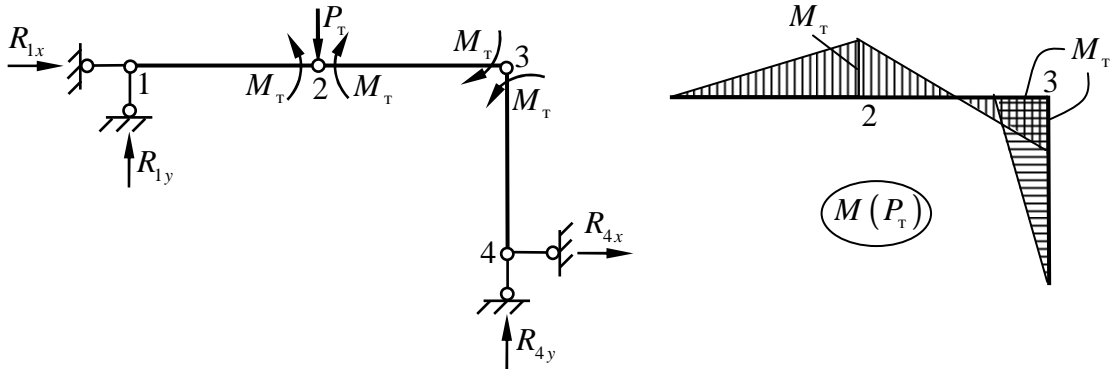


Рисунок 8.8 – Предельное состояние

Проверим полученный результат. Для этого рассмотрим равновесие системы в предельном состоянии (см. рисунок 8.8). Запишем для участка 1-2 равенство нулю моментов относительно точки 2:

$$R_{1y}a - M_T = 0 \quad \text{или} \quad R_{1y} = \frac{M_T}{a}.$$

Аналогично записываем для участка 3-4 равенство нулю моментов относительно точки 3:

$$R_{4x}a + M_T = 0 \quad \text{или} \quad R_{4x} = -\frac{M_T}{a}.$$

Рассмотрим проекцию всех сил на горизонтальную ось:

$$R_{1x} + R_{4x} = 0 \quad \text{или} \quad R_{1x} = -R_{4x} = \frac{M_T}{a}.$$

Для всей системы в целом составим уравнение моментов относительно точки 2:

$$R_{1y}a - R_{4x}a - R_{4y}a = 0 \quad \text{или} \quad R_{4y} = R_{1x} - R_{4x} = \frac{M_T}{a} + \frac{M_T}{a} = 2 \frac{M_T}{a}.$$

И, наконец, из уравнения равновесия в проекции на вертикальную ось

$$P_T = R_{1y} + R_{4y} = \frac{M_T}{a} + 2 \frac{M_T}{a} = 3 \frac{M_T}{a}.$$

Получили прежний результат.

## 9 ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ РАСТЯНУТОГО И ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения при растяжении силой  $N$  и изгибе моментом  $M$  (рисунок 9.1). Будем считать, что материал стержня не обладает упрочнением.

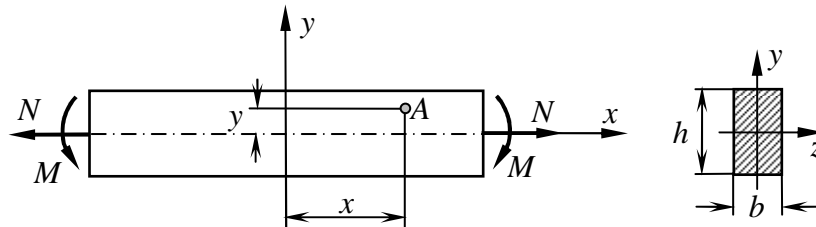


Рисунок 9.1 – Растянутый и изогнутый стержень

Предположим, что имеет место однородное напряжённое состояние вдоль оси  $x$ , т.е. напряжения постоянны по длине стержня. В упругой постановке напряжение в точке  $A$  вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} y, \quad (9.1)$$

где  $F = bh$  – площадь поперечного сечения стержня;  $I = bh^3/12$  – момент инерции сечения относительно оси  $z$ .

Тогда

$$\sigma = \frac{N}{bh} + \frac{12M}{bh^3} y. \quad (9.2)$$

Построим эпюру напряжений по сечению стержня (рисунок 9.2).

Максимальное по сечению напряжение здесь определяется как

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{bh} + \frac{12M}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{N}{bh} + \frac{6M}{bh^2}. \quad (9.3)$$

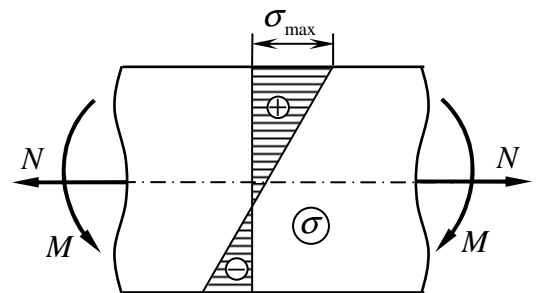


Рисунок 9.2 – Эпюра напряжений в пределах упругости

Пусть при некотором сочетании нагрузок  $N$  и  $M$  максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$  достигает предела текучести  $\sigma_T$ :

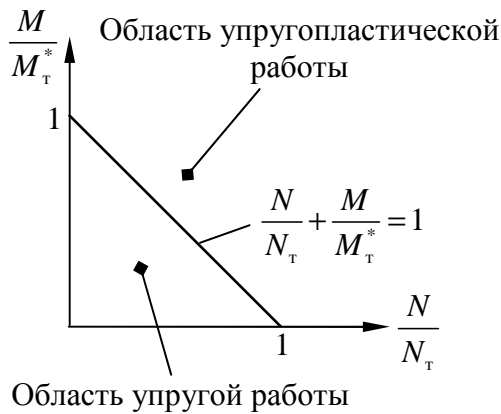
$$\frac{N}{bh} + \frac{6M}{bh^2} = \sigma_T \quad \text{или} \quad \frac{N}{bh\sigma_T} + \frac{6M}{bh^2\sigma_T} = 1.$$

Учитывая, что

$$N_T = \sigma_T bh; \quad M_T^* = \sigma_T \frac{bh^2}{6},$$

приходим к уравнению

$$\frac{N}{N_T} + \frac{M}{M_T^*} = 1. \quad (9.4)$$



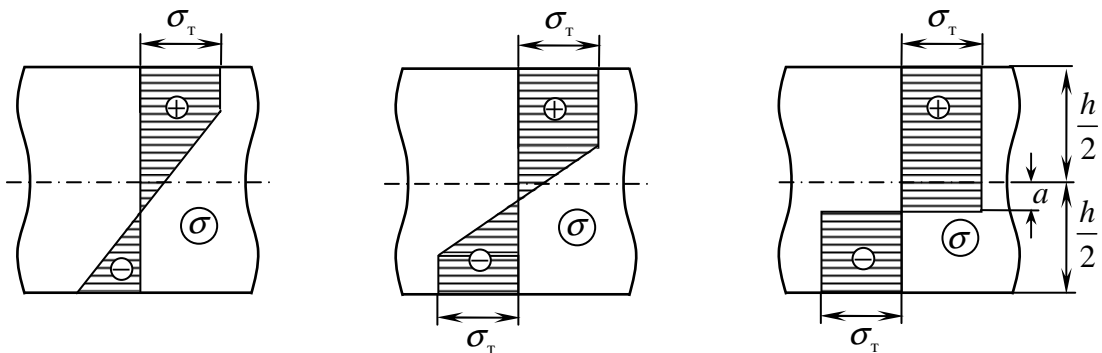
**Рисунок 9.3 – Диаграмма упругой работы**

Таким образом, если напряжение в крайних волокнах достигает значения  $\sigma_T$ , то  $N$  и  $M$  будут связаны равенством (9.4). Используя данную зависимость, построим диаграмму (рисунок 9.3).

Пусть  $N$  и  $M$  таковы, что

$$\frac{N}{N_T} + \frac{M}{M_T^*} > 1.$$

По мере роста нагрузок зона текучести будет распространяться вглубь сечения, а напряжение с противоположной стороны будет стремиться к пределу текучести. После достижения его две зоны текучести противоположного знака будут двигаться навстречу друг другу до тех пор, пока в предельном состоянии они не сомкнутся (рисунок 9.4).



**Рисунок 9.4 – Изменение эпюры напряжений при увеличении нагрузок**

Найдём сочетание нагрузок  $N$  и  $M$ , соответствующее предельному состоянию (см. рисунок 9.4):

$$N = \sigma_{\tau} b \left( \frac{h}{2} + a \right) - \sigma_{\tau} b \left( \frac{h}{2} - a \right) = 2\sigma_{\tau} b a;$$

$$M = 2\sigma_{\tau} b \left( \frac{h}{2} - a \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + a \right) = \sigma_{\tau} b \left( \frac{h^2}{4} - a^2 \right) = \sigma_{\tau} \frac{b h^2}{4} \left( 1 - \frac{4a^2}{h^2} \right).$$

Учитывая, что

$$N_{\tau} = \sigma_{\tau} b h; \quad M_{\tau} = \sigma_{\tau} \frac{b h^2}{4},$$

имеем

$$N = 2N_{\tau} \frac{a}{h}; \tag{9.5}$$

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{4a^2}{h^2} \right). \tag{9.6}$$

Свяжем эти соотношения, для чего выразим  $a$  из (9.5):

$$a = \frac{hN}{2N_{\tau}}.$$

Подставим данное выражение в формулу (9.6):

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{4}{h^2} \cdot \frac{h^2 N^2}{4N_{\tau}^2} \right) = M_{\tau} \left( 1 - \frac{N^2}{N_{\tau}^2} \right)$$

откуда получаем уравнение, описывающее предельное состояние:

$$\left( \frac{N}{N_{\tau}} \right)^2 + \frac{M}{M_{\tau}} = 1. \tag{9.7}$$

Таким образом, при сочетании нагрузок, удовлетворяющем этому уравнению, стержень исчерпывает свою несущую способность. Используя данное равенство, построим диаграмму (рисунок 9.5).

Отметим, что рассмотренный здесь подход применим для очень пластичных материалов с ярко выраженной площадкой текучести, когда можно пренебречь упрочнением.



**Рисунок 9.5 – Диаграмма безопасной работы**



## 10 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

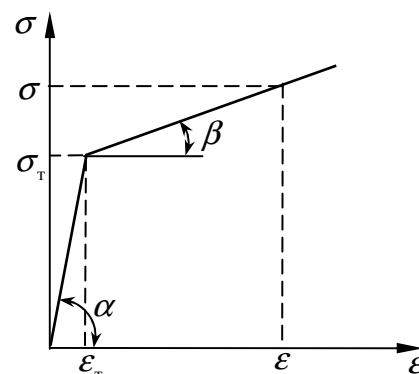
Для материала с линейным упрочнением в соответствии с диаграммой (рисунок 10.1) можно записать:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T \rightarrow \sigma = E\varepsilon; \quad (10.1)$$

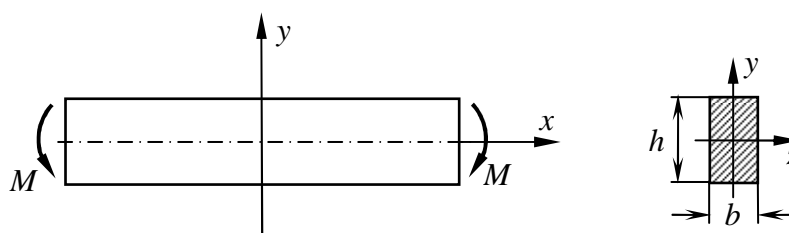
$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_T \rightarrow \sigma = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon, \quad (10.2)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  – модуль упругости;  $E_T = \operatorname{tg} \beta$  – модуль упрочнения;  $\lambda = 1 - E_T/E$  – параметр упрочнения.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения, подверженную чистому изгибу (рисунок 10.2).



**Рисунок 10.1 – Диаграмма растяжения с линейным упрочнением**



**Рисунок 10.2 – Чистый изгиб балки**

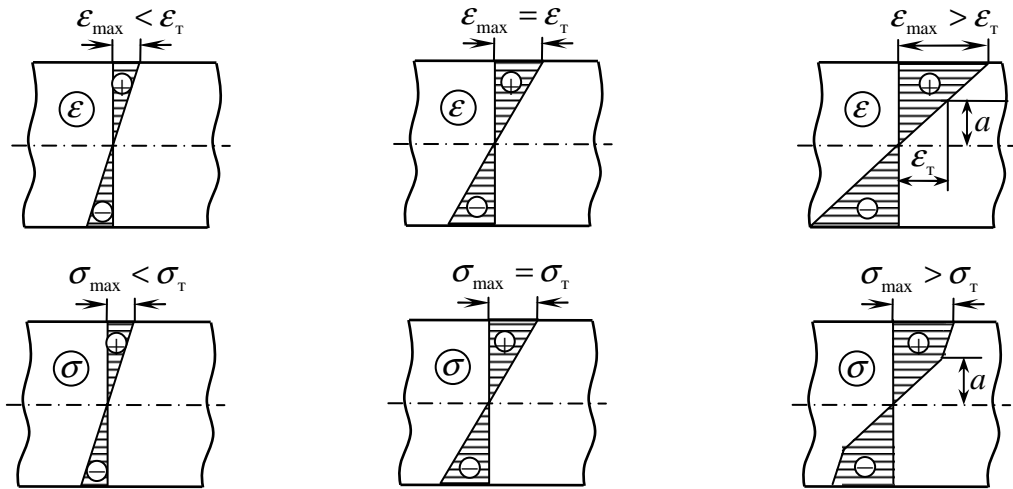
При чистом изгибе как в пределах, так и за пределами упругости поперечное сечение балки поворачивается относительно нейтральной оси, оставаясь плоским, что является следствием симметрии нагружения и деформации. Для поперечного изгиба это положение уже не очевидно. Более того, можно показать, что оно, строго говоря, не имеет места и может быть принято только приближённо.

При использовании гипотезы плоских сечений распределения деформаций и напряжений по сечению в зависимости от момента будут иметь вид, как показано на рисунке 10.3.

Согласно принятой кинематической гипотезе деформации при любой нагрузке изменяются по высоте балки по линейному закону:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (10.3)$$

где  $1/\rho$  – кривизна изогнутой оси балки.



**Рисунок 10.3 – Распределение деформаций и напряжений по сечению**

Пусть  $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_T$ . Рассмотрим первый участок сечения при  $0 \leq y \leq a$ :

$$\sigma = E\varepsilon$$

и с учётом (10.3)

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y.$$

Поскольку при  $y = a$  выполняется равенство  $\sigma = \sigma_T$ , то

$$\sigma_T = \frac{E}{\rho} a \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_T}{a}, \quad (10.4)$$

откуда

$$\sigma = \sigma_T \frac{y}{a}. \quad (10.5)$$

Отметим, что здесь  $a$  – расстояние от центра сечения до точки, где  $\sigma = \sigma_T$ , т.е. до границы упругого ядра.

На втором участке сечения при  $a \leq y \leq h/2$ :

$$\sigma = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon = \lambda \sigma_T + \frac{E_T}{\rho} y$$

и согласно (10.4)

$$\sigma = \lambda \sigma_T + \frac{E_T \sigma_T}{E a} y = \sigma_T \left( \lambda + \frac{E_T y}{E a} \right). \quad (10.6)$$

Подставив вместо  $y$  значение  $h/2$ , находим максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\tau} \left( \lambda + \frac{E_{\tau}}{E} \cdot \frac{h}{2a} \right). \quad (10.7)$$

Исходя из определения изгибающего момента, имеем

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^{h/2} \sigma y b dy = 2 \int_0^a \sigma y b dy + 2 \int_a^{h/2} \sigma y b dy = 2b \int_0^a \sigma_{\tau} \frac{y^2}{a} dy + 2b \int_a^{h/2} \sigma_{\tau} \left( \lambda + \frac{E_{\tau}}{E} \frac{y}{a} \right) y dy = \\ &= \frac{2}{3} \sigma_{\tau} a^2 b + \sigma_{\tau} b \lambda \left( \frac{h^2}{4} - a^2 \right) + \frac{2}{3} \sigma_{\tau} b \frac{E_{\tau}}{E a} \left( \frac{h^3}{8} - a^3 \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{E_{\tau}}{E} = 1 - \lambda; \quad M_{\tau} = \sigma_{\tau} \frac{bh^2}{4},$$

и вводя безразмерную величину

$$z = \frac{2a}{h},$$

получим

$$\frac{M}{M_{\tau}} = \lambda \left( 1 - \frac{1}{3} z^2 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \lambda}{z}. \quad (10.8)$$

Отметим, что для материала, обладающим упрочнением,  $M_{\tau}$  уже не является предельным моментом в прежнем смысле.

Для неупрочняющегося материала ( $E_{\tau} = 0$ ;  $\lambda = 1$ ) имеем

$$\frac{M}{M_{\tau}} = 1 - \frac{1}{3} z^2,$$

откуда

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{a^2}{h^2} \right),$$

что совпадает с полученным ранее выражением (4.7).

Из соотношения (10.8) следует, что для упрочняющегося материала  $z \neq 0$ , т.е. упругое ядро сечения балки никогда не исчезает полностью.

Согласно соотношению (10.8) для определения размера упругого ядра по величине момента необходимо решить кубическое уравнение относитель-

но безразмерного параметра  $z$ . Гораздо проще, задавшись величиной  $a$  (или  $z$ ), найти соответствующий ей изгибающий момент.

*Пример:* Пусть  $E_T/E = 0,1$  и, следовательно,  $\lambda = 0,9$ .

Подставляя эти значения в формулу (10.8), получим

$$\frac{M}{M_T} = \frac{9}{10} \left( 1 - \frac{1}{3} z^2 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z} = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} z^2 + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{z}.$$

Используя выражение (10.7), найдём отношение максимального напряжения к пределу текучести:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_T} = \lambda + \frac{E_T}{E} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \left( 9 + \frac{1}{z} \right).$$

Результаты расчётов по данным формулам представим в табличной форме (таблица 10.1).

**Таблица 10.1 – Изменение изгибающего момента и максимального напряжения в зависимости от размера упругого ядра**

$z$	$M/M_T$	$\sigma_{\max}/\sigma_T$
1/16	1,968	2,5
1/8	1,429	1,7
1/4	1,148	1,3
1/2	0,958	1,1
3/4	0,820	1,03
1	0,667	1

Приведём для справки значения отношения предела прочности к пределу текучести для некоторых конструкционных материалов:

- 30ХГСА  $\sigma_B/\sigma_T = 1080/960 = 1,125$  ;
- Д16Т  $\sigma_B/\sigma_T = 420/280 = 1,5$  ;
- В95  $\sigma_B/\sigma_T = 520/430 = 1,21$  ;
- АМг6  $\sigma_B/\sigma_T = 320/160 = 2$ .

Определим остаточные напряжения для случая, когда

$$z = \frac{1}{2}; \quad M = 0,958M_T; \quad \sigma_{\max} = 1,1\sigma_T.$$

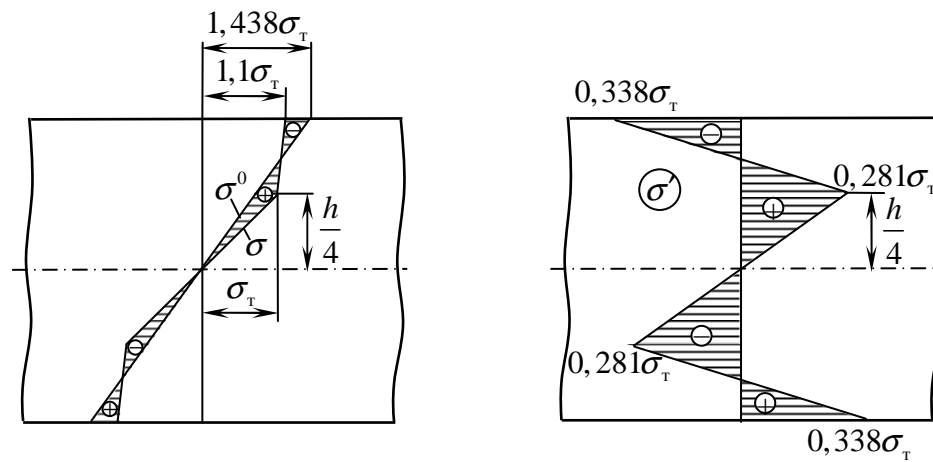
При «упругом» нагружении имеем

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{6M}{bh^2} = 0,958M_T \cdot \frac{6}{bh^2} = 0,958\sigma_T \cdot \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = 1,438\sigma_T.$$

Согласно теореме Ильюшина остаточные напряжения находятся как

$$\sigma' = \sigma - \sigma^0.$$

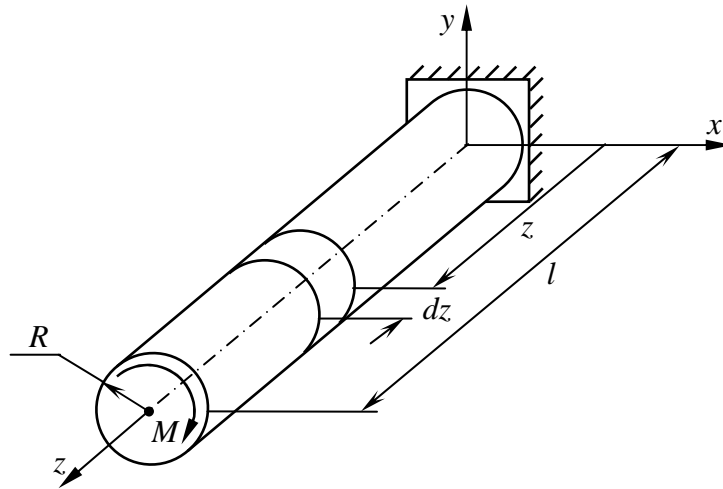
Построение эпюры остаточных напряжений показано на рисунке 10.4.



**Рисунок 10.4 – Эпюра остаточных напряжений**

## 11 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ИЗ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

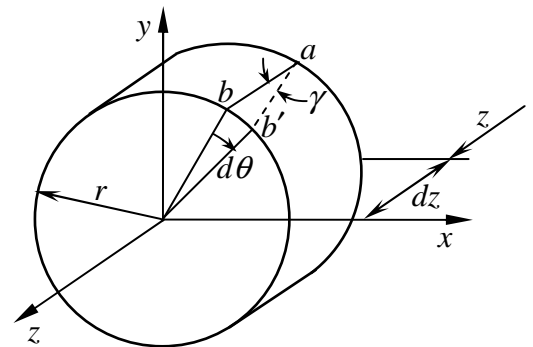
Рассмотрим стержень круглого сечения (рисунок 11.1). Обозначим крутящий момент через  $M$ , а радиус поперечного сечения через  $R$ .



**Рисунок 11.1 – Кручение круглого стержня**

При кручении круглого стержня его поперечное сечение за пределами упругости так же, как и в пределах упругости, остаётся плоским, а радиусы – прямолинейными.

Пусть  $\theta$  – угол поворота сечения, расположенного на расстоянии  $z$  от заделки. Тогда  $\theta + d\theta$  – угол поворота сечения с координатой  $z + dz$ . Рассмотрим бесконечно малый элемент стержня толщиной  $dz$  и радиусом  $r < R$  (рисунок 11.2). В силу малости углов поворота



**Рисунок 11.2 – Элемент стержня**

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{bb'}{ab}.$$

Учитывая, что

$$bb' = rd\theta; \quad ab = dz,$$

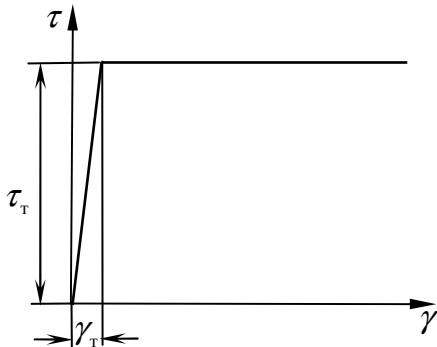
получим

$$\gamma = r\alpha, \tag{11.1}$$

где

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz}.$$

Здесь  $\gamma$  – угол сдвига;  $\alpha$  – относительный угол закручивания.



**Рисунок 11.3 – Диаграмма сдвига без упрочнения**

Отметим, что соотношение (11.1) выражает собой кинематическую гипотезу, справедливую как в пределах упругости, так и за её пределами.

При приложении крутящего момента в сечениях стержня появятся касательные напряжения  $\tau$ . Будем полагать, что  $\tau$  и  $\gamma$  связаны диаграммой, похожей на диаграмму растяжения Прандтля (рисунок 11.3).

Свяжем касательное напряжение с крутящим моментом. Для этого выделим элемент сечения стержня, площадь которого составляет  $r d\phi dr$  (рисунок 11.4). В пределах данного элемента действует элементарная сила  $\tau r d\phi dr$ . Она создаёт момент  $(\tau r d\phi dr) r = \tau r^2 d\phi dr$ . Выполнив интегрирование в окружном направлении, получим момент всех сил, действующих в пределах кольца (см. рисунок 11.4):

$$dM = \int_0^{2\pi} \tau r^2 d\phi dr = 2\pi \tau r^2 dr.$$

Интегрирование в радиальном направлении даёт полный момент:

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr. \quad (11.2)$$

Из выражения (1.11) следует, что касательное напряжение является функцией радиуса.

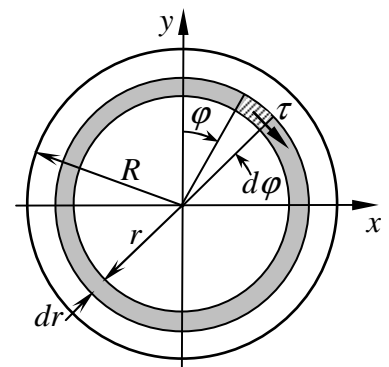
Рассмотрим упругое состояние стержня. Как известно из теории упругости,

$$\tau = G\gamma, \quad (11.3)$$

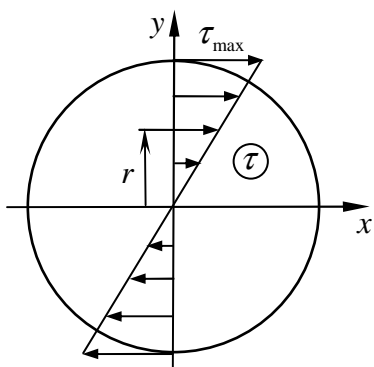
где  $G$  – модуль сдвига.

Тогда с учётом (1.11) получим

$$\tau = \alpha Gr. \quad (11.4)$$



**Рисунок 11.4 – Выделение элемента сечения**



**Рисунок 11.5 – Упругое распределение напряжений**

Соответствующая эпюра касательных напряжений представлена на рисунке 11.5.

Подставляя (11.4) в (11.2), запишем

$$M = 2\pi \int_0^R \alpha G r \cdot r^2 dr = \pi \alpha G \frac{R^4}{2}$$

или

$$M = \alpha G I_\rho, \quad (11.5)$$

где  $I_\rho = \pi R^4/2$  – полярный момент инерции круга.

Сопоставляя формулы (11.4) и (11.5), получим

$$\tau = \frac{M}{I_\rho} r. \quad (11.6)$$

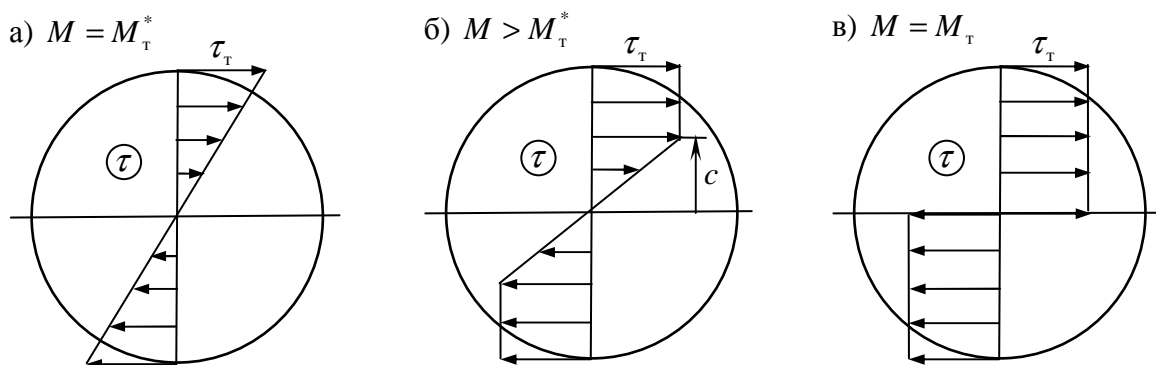
Найдём максимальное касательное напряжение, положив  $r = R$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_\rho} R = \frac{2M}{\pi R^4} R = \frac{2M}{\pi R^3}. \quad (11.7)$$

Предположим, что при  $M = M_T^*$  максимальное касательное напряжение достигает предела текучести при сдвиге, т.е.  $\tau_{\max} = \tau_T$ . Из этого условия найдём  $M_T^*$ :

$$\tau_T = \frac{2M_T^*}{\pi R^3} \quad \text{и} \quad M_T^* = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_T. \quad (11.8)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки зона текучести будет распространяться к центру до тех пор, пока не охватит всё сечение (рисунок 11.6).



**Рисунок 11.6 – Изменение эпюры напряжений по мере роста нагрузки**



Радиус упругого ядра  $c$  можно связать с крутящим моментом. Для этого воспользуемся формулой (11.2):

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = 2\pi \int_0^c \tau r^2 dr + 2\pi \int_c^R \tau r^2 dr.$$

В пределах упругого ядра справедливо выражение (11.4), из которого следует, что

$$\tau_T = \alpha G c. \quad (11.9)$$

Разделим (11.4) на полученный результат:

$$\frac{\tau}{\tau_T} = \frac{r}{c} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{r}{c} \tau_T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \frac{\tau_T}{c} \int_0^c r^3 dr + 2\pi \tau_T \int_c^R r^2 dr = 2\pi \frac{\tau_T}{c} \cdot \frac{c^4}{4} + 2\pi \tau_T \left( \frac{R^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right) = \\ &= 2\pi \tau_T \cdot \frac{c^3}{4} - 2\pi \tau_T \cdot \frac{c^3}{3} + 2\pi \tau_T \cdot \frac{R^3}{3} = 2\pi \tau_T \left( \frac{R^3}{3} - \frac{c^3}{12} \right) = 2\pi \tau_T \cdot \frac{R^3}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{4R^3} \right) \end{aligned}$$

или

$$M = M_T \left( 1 - \frac{c^3}{4R^3} \right), \quad (11.10)$$

где

$$M_T = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T = \frac{4}{3} M_T^* \quad (11.11)$$

– предельный момент, соответствующий предельному состоянию, когда упругое ядро отсутствует, т.е.  $c = 0$  (см. рисунок 11.6,в), причём дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.

Если  $M < M_T$ , то размер упругого ядра может быть найден из соотношения (11.10):

$$c = R \sqrt[3]{4 \left( 1 - \frac{M}{M_T} \right)}. \quad (11.12)$$

Относительный угол закручивания определим из выражения (11.9), справедливого для упругого ядра:

$$\alpha = \frac{\tau_T}{G c}.$$

Тогда

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\tau_r}{Gc}.$$

Интегрируя данное соотношение, находим угол поворота:

$$\theta = \theta_0 + \int_0^z \frac{\tau_r}{Gc} dz = \theta_0 + \frac{\tau_r}{Gc} z, \quad (11.13)$$

где  $\theta_0$  – угол поворота сечения  $z = 0$  (в случае заделки он равен нулю).

Отметим, что после снятия нагрузки стержень не вернётся в исходное недеформированное состояние, поскольку в нём будут остаточные напряжения и деформации (углы закручивания). Их можно найти с помощью теоремы о разгрузке Ильюшина.

*Пример:*

$$l = 1000 \text{ мм}; R = 50 \text{ мм}; E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \mu = 0,3; \sigma_r = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{7,2 \cdot 10^4}{2(1+0,3)} = 2,769 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

$$\tau_r = \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} = \frac{270}{\sqrt{3}} = 155,9 \text{ МПа};$$

$$M_r^* = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_r = \frac{\pi}{2} \cdot 50^3 \cdot 155,9 \cdot 10^{-6} = 30,611 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_r = \frac{4}{3} M_r^* = \frac{4}{3} \cdot 30,611 = 40,815 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пусть радиус упругого ядра  $c = R/2$ . Определим по формуле (11.10) соответствующий ему крутящий момент:

$$M = M_r \left( 1 - \frac{c^3}{4R^3} \right) = M_r \left( 1 - \frac{1}{4 \cdot 2^3} \right) = \frac{31}{32} M_r = \frac{31}{32} \cdot 40,815 = 39,539 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При «упругом» приложении данного момента согласно (11.7) имеем

$$\tau_{\max}^0 = \frac{2M}{\pi R^3} = \frac{2}{\pi R^3} \cdot \frac{31}{32} M_r = \frac{2}{\pi R^3} \cdot \frac{31}{32} \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_r = \frac{31}{24} \tau_r.$$

Построение эпюры остаточных касательных напряжений показано на рисунке 11.7.

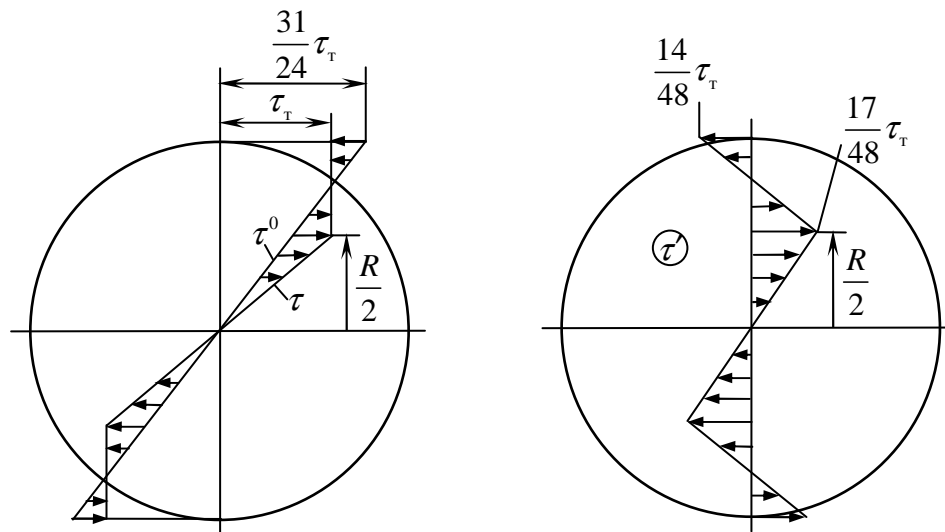


Рисунок 11.7 – Эпюра остаточных касательных напряжений

Определим угол поворота конечного сечения, используя формулу (11.13):

$$\theta(l) = \theta_0 + \frac{\tau_r}{Gc} l = 0 + \frac{155,9}{2,769 \cdot 10^4 \cdot 25} \cdot 1000 = 0,2252 \text{ рад} = 12,9^\circ .$$

При «упругом» кручении имеем

$$\theta^0(l) = \alpha^0 l = \frac{M}{GI_\rho} l = \frac{2M}{G\pi R^4} l = \frac{2 \cdot 39,539 \cdot 10^6}{2,769 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 50^4} \cdot 1000 = 0,1454 \text{ рад} = 8,33^\circ .$$

Таким образом, остаточный угол закручивания конечного сечения будет равен

$$\theta'(l) = \theta(l) - \theta^0(l) = 12,90 - 8,33 = 4,57^\circ .$$

## 12 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

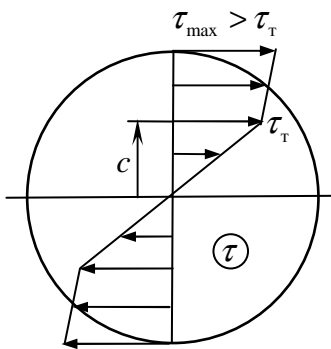
Для материала с линейным упрочнением в соответствии с диаграммой (рисунок 12.1) можно записать:

$$\text{при } 0 \leq \gamma \leq \gamma_T \rightarrow \tau = G\gamma; \quad (12.1)$$

$$\text{при } \gamma \geq \gamma_T \rightarrow \tau = k\tau_T + G_T\gamma, \quad (12.2)$$

где  $G = \operatorname{tg} \alpha$  – модуль сдвига;  $G_T = \operatorname{tg} \beta$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $k = 1 - G_T/G$  – параметр упрочнения при сдвиге.

Распределение касательных напряжений по сечению при упругопластическом кручении круглого стержня в этом случае будет иметь вид, как показано на рисунке 12.2.



**Рисунок 12.2 – Эпюра касательных напряжений**

откуда

Пусть  $\gamma_{\max} > \gamma_T$ . Рассмотрим первый участок сечения при  $0 \leq r \leq c$ :

$$\tau = G\gamma$$

и с учётом (11.1)

$$\tau = \alpha Gr.$$

Поскольку при  $r = c$  выполняется равенство  $\tau = \tau_T$ , то

$$\tau_T = \alpha Gc \quad \text{или} \quad \alpha G = \frac{\tau_T}{c}, \quad (12.3)$$

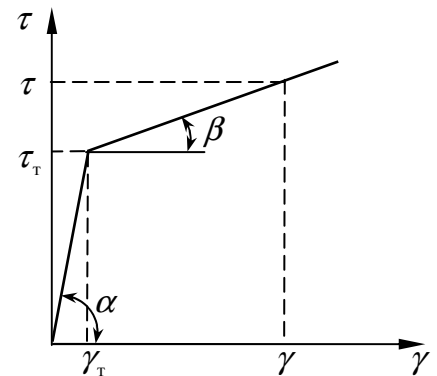
$$\tau = \frac{r}{c} \tau_T. \quad (12.4)$$

На втором участке сечения при  $c \leq r \leq R$ :

$$\tau = k\tau_T + G_T\gamma = k\tau_T + G_T\alpha r$$

и согласно (12.3)

$$\tau = k\tau_T + \frac{G_T\tau_T}{Gc} r = \tau_T \left( k + \frac{G_T}{G} \frac{r}{c} \right). \quad (12.5)$$



**Рисунок 12.1 – Диаграмма сдвига с линейным упрочнением**

Положив  $r = R$ , находим максимальное напряжение:

$$\tau_{\max} = \tau_{\tau} \left( k + \frac{G_{\tau}}{G} \frac{R}{c} \right). \quad (12.6)$$

Исходя из определения крутящего момента, имеем

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = 2\pi \int_0^c \tau r^2 dr + 2\pi \int_c^R \tau r^2 dr = 2\pi \int_0^c \tau_{\tau} \frac{r^3}{c} dr + 2\pi \int_c^R \tau_{\tau} \left( k + \frac{G_{\tau}}{G} \frac{r}{c} \right) r^2 dr = \\ &= \frac{\pi}{2} c^3 \tau_{\tau} + \frac{2}{3} \pi k \tau_{\tau} (R^3 - c^3) + \frac{\pi}{2} \tau_{\tau} \frac{G_{\tau}}{Gc} (R^4 - c^4) = \\ &= \frac{\pi}{2} c^3 \tau_{\tau} + \frac{2}{3} \pi k \tau_{\tau} R^3 \left( 1 - \frac{c^3}{R^3} \right) + \frac{\pi}{2} \tau_{\tau} \frac{G_{\tau}}{Gc} R^4 \left( 1 - \frac{c^4}{R^4} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{G_{\tau}}{G} = 1 - k; \quad M_{\tau} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_{\tau},$$

и вводя безразмерную величину

$$\zeta = \frac{c}{R},$$

получим

$$\frac{M}{M_{\tau}} = k \left( 1 - \frac{1}{4} \zeta^3 \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1-k}{\zeta}. \quad (12.7)$$

Отметим, что для материала, обладающего упрочнением,  $M_{\tau}$  уже не является предельным моментом в прежнем смысле.

Для неупрочняющегося материала ( $G_{\tau} = 0$ ;  $k = 1$ ) имеем

$$\frac{M}{M_{\tau}} = 1 - \frac{1}{3} \zeta^3,$$

откуда

$$M = M_{\tau} \left( 1 - \frac{c^3}{4R^3} \right),$$

что совпадает с полученным ранее выражением (11.10).

*Пример:* Пусть  $G_{\tau}/G = 0,1$  и, следовательно,  $k = 0,9$ .

Подставляя эти значения в формулу (12.7), получим

$$\frac{M}{M_{\tau}} = \frac{9}{10} \left( 1 - \frac{1}{4} \zeta^3 \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{9}{10} + \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{\zeta} - \frac{9}{40} \zeta^3.$$

Используя выражение (12.6), найдём отношение максимального напряжения к пределу текучести:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_T} = k + \frac{G_T}{G} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{10} \left( 9 + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Результаты расчётов по данным формулам представим в табличной форме (таблица 12.1).

**Таблица 12.1 – Изменение крутящего момента и максимального касательного напряжения в зависимости от радиуса упругого ядра**

$\zeta$	$M/M_T$	$\tau_{\max}/\tau_T$
0,1	1,650	1,900
0,2	1,273	1,400
0,3	1,144	1,233
0,4	1,073	1,150
0,5	1,022	1,100
0,6	0,9764	1,067
0,7	0,9300	1,043
0,8	0,8786	1,025
0,9	0,8193	1,011
1	0,7500	1

Определим остаточные напряжения для случая, когда

$$\zeta = \frac{1}{2}; \quad M = 1,022M_T; \quad \tau_{\max} = 1,1\tau_T.$$

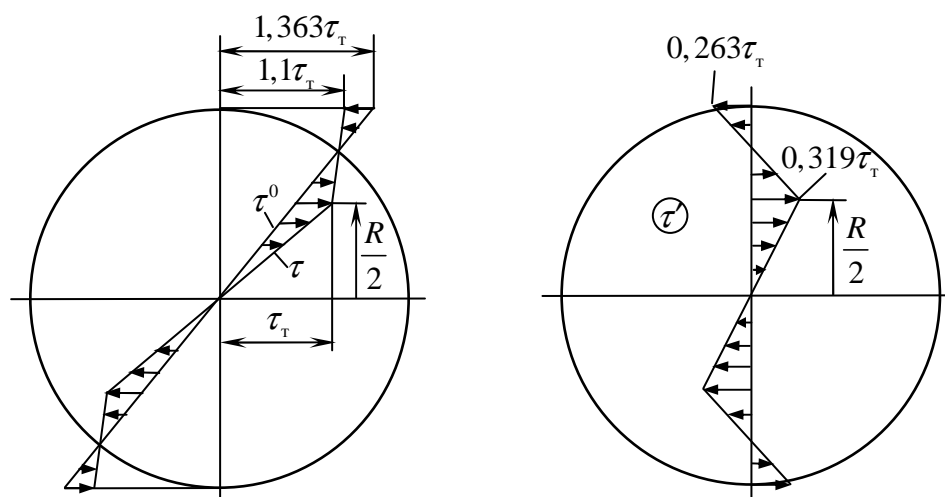
При «упругом» нагружении имеем

$$\tau_{\max}^0 = \frac{M}{I_\rho} R = 1,022M_T \cdot \frac{2}{\pi R^4} R = 1,022 \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T \cdot \frac{2}{\pi R^4} R = 1,363\tau_T.$$

Согласно теореме Ильюшина остаточные касательные напряжения находятся как

$$\tau' = \tau - \tau^0.$$

Построение эпюры остаточных касательных напряжений показано на рисунке 12.3.



**Рисунок 12.3 – Эпюры остаточных касательных напряжений**

### 13 СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ НАЧАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ

Напомним, что условия начала пластичности (или текучести) характеризуют переход за пределы упругости при сложном напряжённом состоянии. На практике наибольшее распространение получили две формулировки. Первая – это условие пластичности Треска–Сен-Венана, согласно которому пластические деформации появляются в тот момент, когда максимальное касательное напряжение достигает предела текучести при сдвиге:

$$\tau_{\max} = \tau_T \quad (13.1)$$

или, что то же самое,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (13.2)$$

Второй формулировкой является условие пластичности Мизеса. При этом предполагается, что пластические деформации возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала при растяжении:

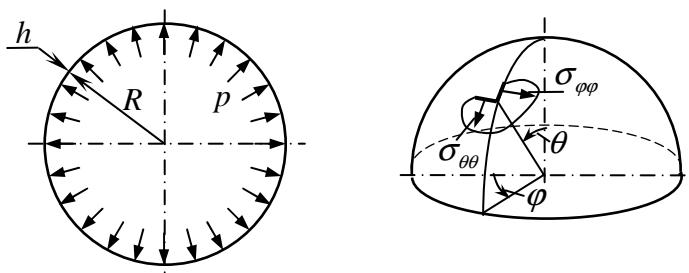
$$\sigma_i = \sigma_T, \quad (13.3)$$

где

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (13.4)$$

Выполним сравнение данных условий начала пластичности на примере двухосного напряжённого состояния.

*Пример 1:* Сферический баллон радиусом  $R$  и толщиной  $h$  нагружен внутренним давлением  $p$  (рисунок 13.1). Определить величину давления, при котором появляются пластические деформации.



**Рисунок 13.1 – Сферический баллон, нагруженный внутренним давлением**



Согласно безмоментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\theta\varphi} = 0,$$

тогда главные напряжения будут равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_3 = 0.$$

По условию начала пластичности Треска–Сен-Венана (13.2):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pR}{2h} - 0 = \frac{pR}{2h} = \sigma_T$$

или

$$p = \frac{2h}{R} \sigma_T.$$

Отсюда получаем, что при

$$p > \frac{2h}{R} \sigma_T$$

в сферической оболочке будут пластические деформации.

Пусть

$$R = 500 \text{ мм}; \quad h = 5 \text{ мм}; \quad \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда согласно условию Треска–Сен-Венана

$$p > \frac{2 \cdot 5}{500} \cdot 270 = 5,4 \text{ МПа}.$$

Воспользуемся далее условием пластичности Мизеса, для чего вычислим сначала интенсивность напряжений по формуле (13.4):

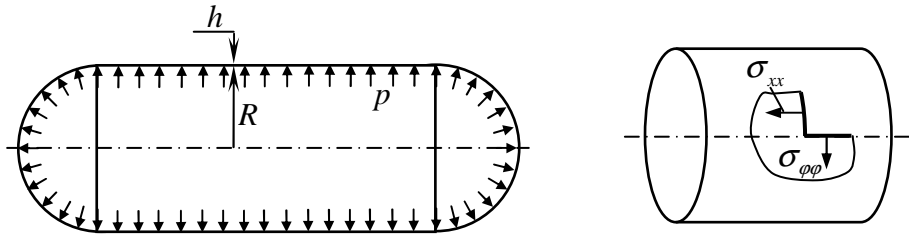
$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_1^2} = \sigma_1.$$

Согласно (13.3) имеем

$$\sigma_1 = \frac{pR}{2h} = \sigma_T.$$

Таким образом, приходим к прежнему результату. Следует отметить, что это случайное совпадение.

*Пример 2:* Цилиндрический сосуд радиусом  $R$  и толщиной  $h$  нагружен внутренним давлением  $p$  (рисунок 13.2). Определить величину давления, при котором появляются пластические деформации.



**Рисунок 13.2 – Цилиндрический сосуд, нагруженный внутренним давлением**

По безмоментной теории в цилиндрической оболочке действуют следующие напряжения:

$$\sigma_{xx} = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{h}; \quad \sigma_{x\varphi} = 0.$$

При этом главные напряжения будут равны

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h} = 2\sigma_2; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_3 = 0.$$

По условию Треска–Сен-Венана (13.2):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pR}{h} - 0 = \frac{pR}{h} = \sigma_T$$

или

$$p = \frac{h}{R} \sigma_T.$$

Отсюда получаем, что при

$$p > \frac{h}{R} \sigma_T$$

в цилиндрической оболочке будут пластические деформации.

Пусть

$$R = 500 \text{ мм}; \quad h = 5 \text{ мм}; \quad \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда в соответствии с условием Треска–Сен-Венана

$$p > \frac{5}{500} \cdot 270 = 2,7 \text{ МПа}.$$

Далее используем условие пластичности Мизеса. Вычислим интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\sigma_2 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 + (0 - 2\sigma_2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6\sigma_2^2} = \sqrt{3} \sigma_2.$$

Согласно (13.3) имеем

$$\sqrt{3} \sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{h} = \sigma_T$$

или

$$p = \frac{2h}{R} \cdot \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

Итак, во втором случае при

$$p > \frac{2h}{R} \cdot \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$$

цилиндрический сосуд будет работать за пределами упругости.

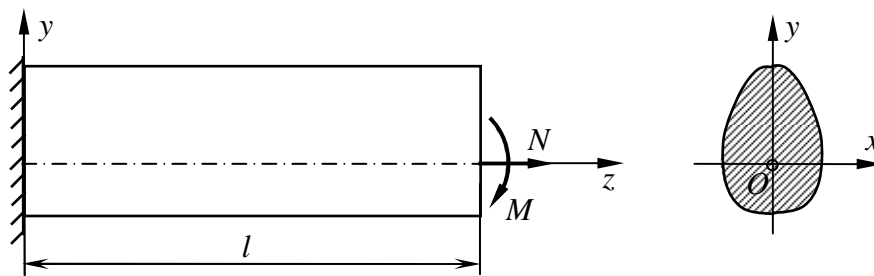
Для оболочки с ранее приведёнными параметрами

$$p > \frac{2 \cdot 5}{500} \cdot \frac{270}{\sqrt{3}} = 3,12 \text{ МПа.}$$

Этот результат уже отличается от предыдущего.

## 14 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО БРУСА ПО ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассмотрим прямолинейный брус с произвольным поперечным сечением, имеющим одну ось симметрии (рисунок 14.1). Систему координат выберем так, чтобы оси  $x$  и  $y$  совпали с главными центральными осями поперечного сечения бруса, а ось  $z$  – с его продольной осью. При этом предположим, что сечение бруса симметрично относительно оси  $y$ . Обозначим через  $N$  и  $M$  соответственно осевую силу и изгибающий момент в сечении бруса.



**Рисунок 14.1 – Растяжение и изгиб прямолинейного бруса**

Задачу будем решать в напряжениях, используя деформационную теорию пластичности.

В силу характера нагрузки напряжения по длине бруса не изменяются. Введём следующие допущения:

- $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$  (гипотеза о ненадавливании волокон друг на друга);
- $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ .

Таким образом, остаётся одна компонента  $\sigma_{zz}$ . Необходимо получить распределение этого напряжения по сечению бруса.

Кроме того, будем считать, что объёмные силы отсутствуют, т.е.  $R_x = R_y = R_z = 0$ . Поскольку напряжение  $\sigma_{zz}$  является функцией только координаты  $y$ , то все три уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно.

Напряжение  $\sigma_{zz}$  будем искать через деформации.

Примем, что

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\mu_p \varepsilon_{zz}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad (14.1)$$

где  $\mu_p$  – коэффициент поперечной деформации за пределами упругости.

Здесь также неизвестна только одна компонента – относительное удлинение волокна  $\varepsilon_{zz}$ . Согласно кинематической гипотезе плоских сечений:

$$\varepsilon_{zz} = e_0 + \kappa y, \quad (14.2)$$

где

$$e_0 = \varepsilon_{zz}^0; \quad \kappa = \frac{1}{\rho}.$$

Здесь  $\varepsilon_{zz}^0$  – относительное удлинение оси бруса;  $\rho$  – радиус кривизны изогнутой оси бруса в плоскости  $yz$ .

Как известно, деформации должны удовлетворять условиям совместности Сен-Венана. Можно показать, что выражения (14.1) и (14.2) будут удовлетворять данным условиям только при  $\mu_p = const$ . За пределами упругости коэффициент поперечной деформации изменяется, причём с ростом деформаций он стремится к  $1/2$ . Поэтому в дальнейшем будем принимать  $\mu_p = 1/2$ , т.е. будем считать материал несжимаемым ( $\varepsilon_0 = 0$ ).

В соответствии с деформационной теорией пластичности:

$$\sigma_{zz} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0$$

или, учитывая, что  $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$ , получим

$$\sigma_{zz} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) + \sigma_0. \quad (14.3)$$

В нашем случае

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1-2\mu_p}{3} \varepsilon_{zz} = 0;$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{\sigma_{zz}}{3}.$$

С учётом этих выражений соотношение (14.3) примет вид

$$\sigma_{zz} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zz} + \frac{\sigma_{zz}}{3}$$

или

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{zz}. \quad (14.4)$$

Подставляя сюда выражение (14.2), запишем

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (e_0 + \kappa y). \quad (14.5)$$

Выразим  $\sigma_i$  через  $\varepsilon_i$ , используя функцию Ильюшина  $\omega$  (рисунок 14.2):

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i(1 - \omega). \quad (14.6)$$

С учётом этого соотношение (14.5) примет вид

$$\sigma_{zz} = 3G(e_0 + \kappa y)(1 - \omega)$$

или, так как для несжимаемого материала  $3G = E$ , получим

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}(1 - \omega) = E(e_0 + \kappa y)(1 - \omega). \quad (14.7)$$

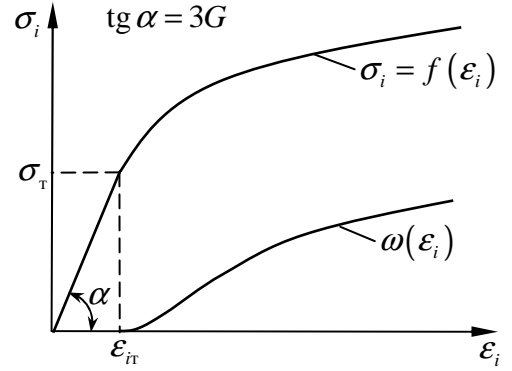


Рисунок 14.2 – Диаграмма деформирования и функция Ильюшина

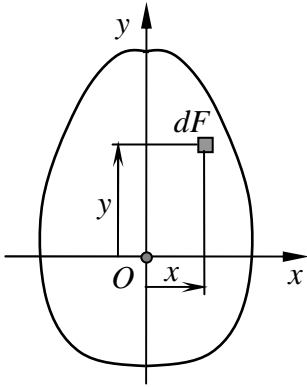


Рисунок 14.3 – Поперечное сечение бруса

Для определения  $e_0$  и  $\kappa$  составим выражения для  $N$  и  $M$  (рисунок 14.3):

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma_{zz} dF = \int_F E\varepsilon_{zz}(1 - \omega) dF = \\ &= E \int_F \varepsilon_{zz} dF - E \int_F \omega \varepsilon_{zz} dF = \\ &= E \int_F (e_0 + \kappa y) dF - N_p = EFe_0 - N_p; \end{aligned}$$

$$M = \int_F \sigma_{zz} y dF = \int_F E\varepsilon_{zz}(1 - \omega) y dF =$$

$$= E \int_F \varepsilon_{zz} y dF - E \int_F \omega \varepsilon_{zz} y dF = E \int_F (e_0 + \kappa y) y dF - M_p = EI\kappa - M_p,$$

где

$$I = \int_F y^2 dF$$

– момент инерции сечения относительно оси  $x$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения бруса;

Таким образом, имеем

$$N = EFe_0 - N_p; \quad M = EI\kappa - M_p, \quad (14.8)$$

где

$$N_p = E \int_F \omega \varepsilon_{zz} dF; \quad M_p = E \int_F \omega \varepsilon_{zz} y dF. \quad (14.9)$$

Из (14.8) вытекают следующие равенства:

$$e_0 = \frac{N + N_p}{EF}; \quad \kappa = \frac{M + M_p}{EI}. \quad (14.10)$$

С учётом этих выражений соотношения (14.2) и (14.7) запишутся как

$$\varepsilon_{zz} = \frac{N + N_p}{EF} + \frac{M + M_p}{EI} y; \quad (14.11)$$

$$\sigma_{zz} = (1 - \omega) \left( \frac{N + N_p}{F} + \frac{M + M_p}{I} y \right). \quad (14.12)$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи интенсивности напряжений и деформаций равны

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{zz}^2} = |\sigma_{zz}|; \end{aligned}$$

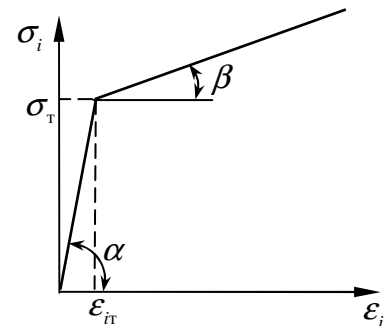
$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(1 + \mu_p)^2 \varepsilon_{zz}^2} = \frac{2}{3}(1 + \mu_p) |\varepsilon_{zz}| = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) |\varepsilon_{zz}| = |\varepsilon_{zz}|. \end{aligned}$$

Получим выражение для функции Ильюшина. Рассмотрим материал с линейным упрочнением (рисунок 14.4). Для него функция  $\omega$  записывается как

$$\omega = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{ir} \\ \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_{ir}}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geq \varepsilon_{ir} \end{cases}, \quad (14.13)$$

где  $\lambda$  – параметр упрочнения.

Следует отметить, что для несжимаемого материала диаграмма деформирования совпадает с диаграммой растяжений. При этом



**Рисунок 14.4 – Диаграмма деформирования с линейным упрочнением**

$$\varepsilon_{it} = \varepsilon_T; \quad \operatorname{tg} \alpha = E; \quad \operatorname{tg} \beta = E_T; \quad \lambda = 1 - \frac{E_T}{E}.$$

Для материала без упрочнения в формуле (14.11) следует положить  $\lambda = 1$ .

Для вычисления напряжений при растяжении и изгибе бруса воспользуемся методом последовательных приближений.

В нулевом приближении определяем деформации в предположении, что брус работает упруго:

$$\varepsilon_{zz}^{(0)} = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EI} y.$$

Далее по формуле (14.13), учитывая, что  $\varepsilon_i^{(0)} = |\varepsilon_{zz}^{(0)}|$ , вычисляем значения функции Ильюшина в разных точках по высоте сечения:

$$\omega^{(0)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\varepsilon_{zz}^{(0)}| \leq \varepsilon_T \\ \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{|\varepsilon_{zz}^{(0)}|} \right), & |\varepsilon_{zz}^{(0)}| \geq \varepsilon_T \end{cases}.$$

Затем для первого приближения, используя (14.9) и (14.11), находим

$$N_p^{(1)} = E \int_F \omega^{(0)} \varepsilon_{zz}^{(0)} dF; \quad M_p^{(1)} = E \int_F \omega^{(0)} \varepsilon_{zz}^{(0)} y dF,$$

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{N + N_p^{(1)}}{EF} + \frac{M + M_p^{(1)}}{EI} y.$$

По найденным деформациям вычисляем значения  $\omega^{(1)}(y)$  и переходим ко второму приближению, и так далее. Данный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия сходимости.

По окончании итераций, зная приближения  $\varepsilon_{zz}^{(k)}$  и  $\omega^{(k)}$  (где  $k$  – номер последнего приближения), можно по формуле (14.7) легко рассчитать и сами напряжения.

*Пример:* Пусть сечение бруса представляет собой прямоугольник шириной  $b$  и высотой  $h$ . Полагаем, что материал бруса не обладает упрочнением. Для определённости примем, что

$$N = \frac{1}{2} N_T = \frac{1}{2} b h \sigma_T; \quad M = \frac{2}{3} M_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{b h^2}{4} \sigma_T = \frac{b h^2}{6} \sigma_T.$$



В нулевом приближении имеем

$$\varepsilon_{zz}^{(0)} = e_0^{(0)} + \kappa^{(0)} y,$$

где

$$e_0^{(0)} = \frac{N}{EF} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\tau} b h}{E b h} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\tau};$$

$$\kappa^{(0)} = \frac{M}{EI} = \frac{b h^2}{6} \sigma_{\tau} \cdot \frac{12}{E b h^3} = 2 \frac{\varepsilon_{\tau}}{h}.$$

Откуда

$$\varepsilon_{zz}^{(0)} = \varepsilon_{\tau} \left( \frac{1}{2} + 2 \frac{y}{h} \right).$$

Находим координату сечения, где деформация равна  $\varepsilon_{\tau}$ :

$$\frac{1}{2} + 2 \frac{y_0^{(0)}}{h} = 1 \quad \text{и} \quad y_0^{(0)} = \frac{1}{4} h.$$

Вычисляем значения функции Ильюшина в зависимости от  $y$ :

$$\omega^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{4};$$

$$\omega^{(0)} = 1 - \frac{\varepsilon_{\tau}}{\varepsilon_{zz}^{(0)}} = 1 - \frac{1}{1/2 + 2y/h} = \frac{2y/h - 1/2}{1/2 + 2y/h} \quad \text{при} \quad \frac{h}{4} \leq y \leq \frac{h}{2}.$$

Результаты расчёта данных значений представлены на рисунке 14.5.

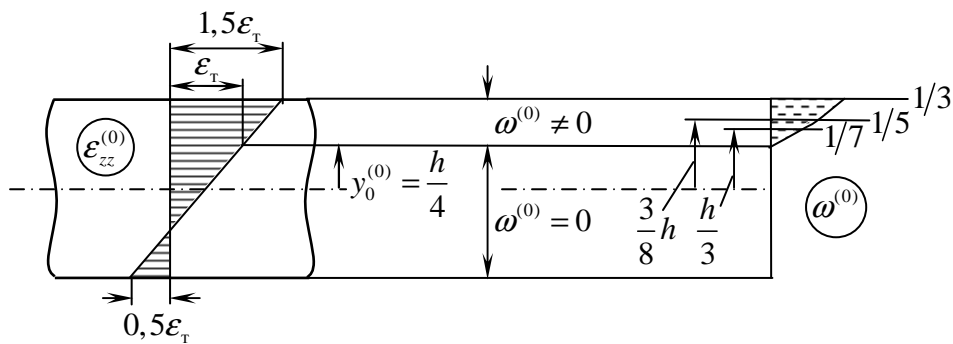


Рисунок 14.5 – Нулевое приближение

Далее находим дополнительные нагрузки в первом приближении:

$$N_p^{(1)} = E \int_F \omega^{(0)} \varepsilon_{zz}^{(0)} dF = E \varepsilon_{\tau} b \int_{y_0^{(0)}}^{h/2} \left( 2 \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{b h}{16} \sigma_{\tau} = \frac{1}{16} N_{\tau} = 0,0625 N_{\tau};$$

$$M_p^{(1)} = E \int_F \omega^{(0)} \varepsilon_{zz}^{(0)} y dF = E \varepsilon_T b \int_{y_0^{(0)}}^{h/2} \left( 2 \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right) y dy = \frac{5}{192} b h^2 \sigma_T = \frac{20}{192} M_T = 0,1042 M_T.$$

Определяем новое распределение деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(1)} &= e_0^{(1)} + \kappa^{(1)} y = \frac{N + N_p^{(1)}}{EF} + \frac{M + M_p^{(1)}}{EI} y = \\ &= \frac{9}{13} \varepsilon_T + \frac{37}{16} \frac{\varepsilon_T}{h} y = 0,5625 \varepsilon_T + 2,3125 \frac{\varepsilon_T}{h} y. \end{aligned}$$

Находим координату сечения, где деформация равна  $\varepsilon_T$ :

$$0,5625 + 2,3125 \frac{y_0^{(1)}}{h} = 1 \quad \text{и} \quad y_0^{(1)} = 0,18919h.$$

Вычисляем значения функции Ильюшина в зависимости от  $y$ :

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= 0 \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq y_0^{(1)}; \\ \omega^{(1)} &= 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{zz}^{(1)}} = 1 - \frac{1}{0,5625 + 2,3125 y/h} \quad \text{при} \quad y_0^{(1)} \leq y \leq \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Затем переходим ко второму приближению и так далее. Результаты расчётов для 30 приближений представлены в таблице 14.1.

**Таблица 14.1 – Расчёт относительного удлинения и кривизны оси бруса**

№ приближения	$N_p/N_T$	$M_p/M_T$	$e_0/\varepsilon_T$	$\kappa h/\varepsilon_T$
0	0	0	0,5000	2,000
1	0,0625	0,1042	0,5625	2,313
2	0,1117	0,1771	0,6117	2,531
...	...	...	...	...
5	0,2154	0,3190	0,7154	2,957
...	...	...	...	...
10	0,3177	0,4492	0,8177	3,348
...	...	...	...	...
15	0,3783	0,5232	0,8783	3,570
...	...	...	...	...
20	0,4170	0,5696	0,9170	3,709
...	...	...	...	...
25	0,4427	0,6000	0,9427	3,800
...	...	...	...	...
28	0,4540	0,6131	0,9540	3,839
29	0,4572	0,6169	0,9572	3,851
30	0,4602	0,6204	0,9602	3,861

После вычисления деформаций бруса можно определить и нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$ . Согласно формуле (14.7)

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}^{(30)}(1 - \omega^{(30)}),$$

где

$$\varepsilon_{zz}^{(30)} = e_0^{(30)} + \kappa^{(30)}y = \varepsilon_T \left( 0,9602 + 3,861 \frac{y}{h} \right);$$

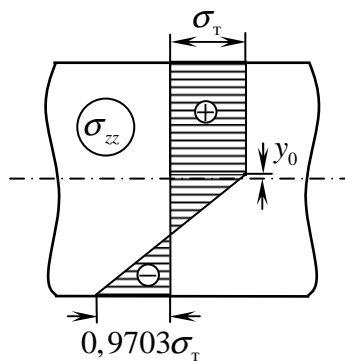
$$\omega^{(30)} = \begin{cases} 0, & -\frac{h}{2} \leq y \leq y_0^{(30)} \\ \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{|\varepsilon_{zz}^{(30)}|} \right), & y_0^{(30)} \leq y \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

причём  $y_0^{(30)} = 0,01032h$ .

Результаты вычисления распределения напряжений представлены в таблице 14.2, а соответствующая эпюра изображена на рисунке 14.6.

**Таблица 14.2 – Изменение напряжений по высоте бруса**

$y/h$	$\varepsilon_{zz}/\varepsilon_T$	$\omega$	$\sigma_{zz}/\sigma_T$
-0,5	-0,9703	0	-0,9703
-0,4	-0,5842	0	-0,5842
-0,3	-0,1981	0	-0,1981
-0,2	0,1880	0	0,1880
-0,1	0,5741	0	0,5462
0	0,9602	0	0,9602
0,01032	1,000	0	1
0,1	1,346	0,2572	1
0,2	1,732	0,4228	1
0,3	2,119	0,5280	1
0,4	2,505	0,6007	1
0,5	2,891	0,6541	1



**Рисунок 14.6 – Эпюра напряжений**

Определим перемещения бруса. Относительное удлинение его оси равно

$$e_0 = \frac{du_z}{dz} = const,$$

откуда находим осевые перемещения:

$$u_z = e_0 z,$$

причём

$$u_z(0) = 0; \quad u_z(l) = e_0 l.$$

Кривизна оси бруса определяется как

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 u_y}{dz^2}.$$

Интегрируя дважды данное выражение и учитывая, что в сечении  $z = 0$  имеется заделка, получим выражение для прогиба:

$$\frac{du_y}{dz} = -\kappa z \quad \text{и} \quad u_y = -\kappa \frac{z^2}{2}.$$

Пусть

$$b = 5 \text{ см}; \quad h = 10 \text{ см}; \quad l = 80 \text{ см}; \quad E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$$

При этом

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{270}{7,2 \cdot 10^4} = 3,75 \cdot 10^{-3};$$

$$e_0 = 0,9602 \varepsilon_T = 0,9602 \cdot 3,75 \cdot 10^{-3} = 3,601 \cdot 10^{-3};$$

$$\kappa = 3,861 \frac{\varepsilon_T}{h} = 3,861 \cdot \frac{3,75 \cdot 10^{-3}}{100} = 1,448 \cdot 10^{-4} \text{ 1/мм}.$$

Находим перемещения свободного конца бруса:

$$u_z(l) = e_0 l = 3,601 \cdot 10^{-3} \cdot 800 = 2,88 \text{ мм};$$

$$u_y(l) = -\frac{1}{2} \kappa l^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1,448 \cdot 10^{-4} \cdot 800^2 = -46,3 \text{ мм}.$$

В упругой постановке имеем

$$u_z^0(l) = \frac{Nl}{EF} = \frac{\frac{1}{2} \sigma_T b h l}{E b h} = \frac{1}{2} \varepsilon_T l = \frac{1}{2} \cdot 3,75 \cdot 10^{-3} \cdot 800 = 1,5 \text{ мм};$$

$$u_y^0(l) = -\frac{Ml^2}{2EI} = -\frac{\frac{b h^2}{6} \sigma_T l^2}{2E \cdot \frac{b h^3}{12}} = -\frac{\varepsilon_T}{h} l^2 = -\frac{3,75 \cdot 10^{-3}}{100} \cdot 800^2 = -24 \text{ мм}.$$

Определяем остаточные перемещения концевое сечения бруса:

$$u'_z(l) = u_z(l) - u_z^0(l) = 2,88 - 1,5 = 1,38 \text{ мм};$$

$$u'_y(l) = u_y(l) - u_y^0(l) = -46,3 + 24 = -22,3 \text{ мм}.$$

## 15 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим длинную толстостенную трубу, находящуюся под действием равномерно распределённого внутреннего давления  $p$  (рисунок 15.1).

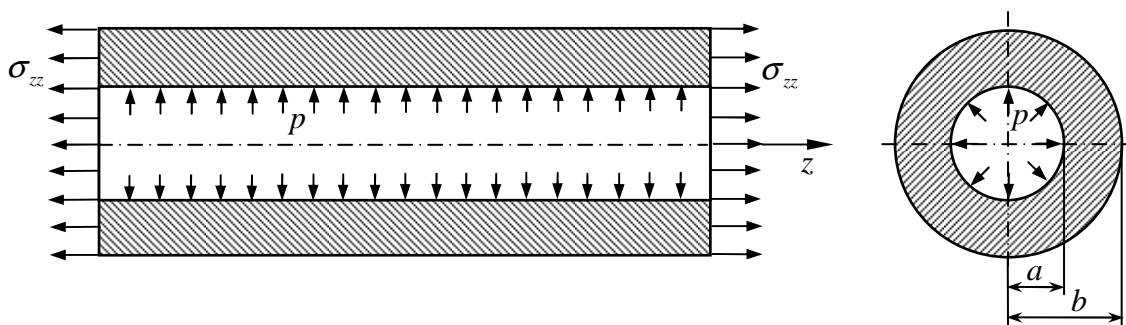


Рисунок 15.1 – Толстостенная труба под действием внутреннего давления

При малом внутреннем давлении  $p$  труба деформируется упруго, и распределение радиальных  $\sigma_{rr}$  и окружных  $\sigma_{\theta\theta}$  напряжений будет определяться следующими выражениями (задача Ламе):

$$\sigma_{rr} = -\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad (15.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \quad (15.2)$$

Примем, что труба закреплена по концам от осевых перемещений. Тогда она будет находиться в условиях плоской деформации, поскольку  $\varepsilon_{zz} = 0$ . При этом на основании закона Гука имеем

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{2\mu pa^2}{b^2 - a^2} = const. \quad (15.3)$$

Выясним, в каких точках сечения трубы прежде всего возникнут пластические деформации. Для этого найдём интенсивность напряжений в произвольной точке трубы:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}. \quad (15.4)$$

Вычисляем

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{2b^2}{r^2};$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 - 2\mu \right);$$

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 + 2\mu \right).$$

Подставляя данные выражения в формулу (15.4), получим

$$\sigma_i = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \sqrt{3 \frac{b^4}{r^4} + (1 - 2\mu)^2}. \quad (15.5)$$

Анализ данного соотношения показывает, что интенсивность напряжений имеет наибольшее значение при  $r = a$ . Таким образом, согласно условию пластичности Мизеса при увеличении нагрузки пластические деформации сначала появятся на внутренней поверхности трубы. Пусть это произойдет при  $p = p_T^*$ . Определим данную нагрузку, полагая в (15.5):

$$\sigma_i = \sigma_T; \quad r = a; \quad p = p_T^*.$$

Имеем

$$\sigma_T = \frac{p_T^* a^2}{b^2 - a^2} \sqrt{3 \frac{b^4}{a^4} + (1 - 2\mu)^2},$$

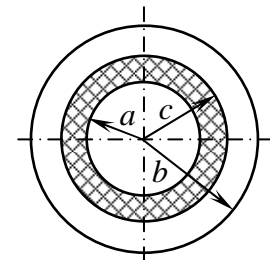
откуда

$$p_T^* = \sigma_T \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{3b^4 + a^4(1 - 2\mu)^2}}. \quad (15.6)$$

Далее примем, что материал трубы несжимаемый ( $\mu = 1/2$ ) и неупрочняющийся. Тогда согласно (15.3) и (15.6)

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}); \quad (15.7)$$

$$p_T^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (15.8)$$



**Рисунок 15.2 – Пластическая область**

При  $p > p_T^*$  в трубе возникнет пластическая область, поперечное сечение которой представляет собой кольцо с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $c$  (рисунок 15.2). В пределах этого кольца всюду  $\sigma_i = \sigma_T$ , так как материал не обладает упрочнением. За пределами пластической зоны труба продолжает работать упруго.

Учитывая (15.7), получим другое выражение для интенсивности напряжений:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2}; \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2},$$

тогда согласно (15.4)

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}). \quad (15.9)$$

При записи последнего выражения учтено, что  $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ .

Условие пластичности Мизеса имеет вид

$$\sigma_i = \sigma_T \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) = \sigma_T. \quad (15.10)$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением равновесия в радиальном направлении:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (15.11)$$

Подставим (15.10) в (15.11):

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T}{r}.$$

Интегрируя данное выражение, получим

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln r + D.$$

Используя граничное условие, что при  $r = a \rightarrow \sigma_{rr} = -p$ , находим постоянную интегрирования:

$$-p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln a + D \quad \text{или} \quad D = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln a.$$

Таким образом,

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{a} - p. \quad (15.12)$$

Из (15.10) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T + \sigma_{rr}$$

или

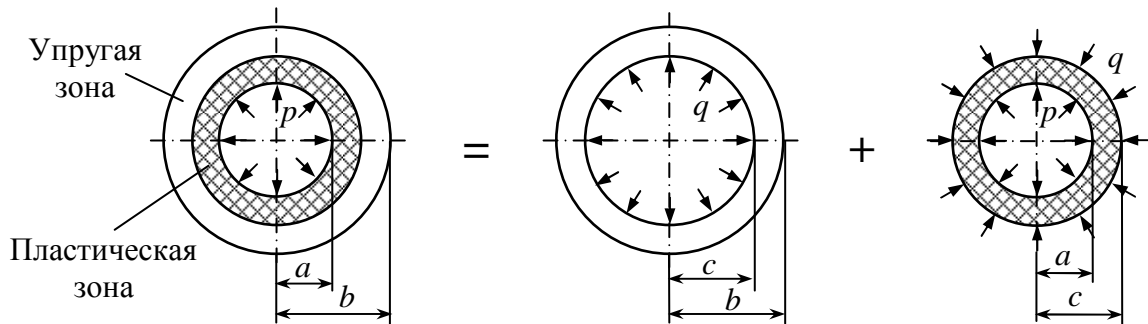
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left( 1 + \ln \frac{r}{a} \right) - p. \quad (15.13)$$

Отметим, что соотношения (15.12) и (15.13) описывают напряжённое состояние в пластической зоне, когда  $a \leq r \leq c$ . За пределами этой области труба работает упруго, а напряжения вычисляются следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -\frac{qc^2}{b^2 - c^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad (15.14)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{qc^2}{b^2 - c^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right), \quad (15.15)$$

где  $q$  – радиальное давление на границе между упругой и пластической зонами (рисунок 15.3).



**Рисунок 15.3 – Давление на границе между упругой и пластической зонами**

Запишем условия сопряжения двух зон:

$$\sigma_{rr}(c-0) = \sigma_{rr}(c+0);$$

$$\sigma_{\theta\theta}(c-0) = \sigma_{\theta\theta}(c+0)$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a} - p = -q; \quad (15.16)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left( 1 + \ln \frac{c}{a} \right) - p = q \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}. \quad (15.17)$$

Равенства (15.16) и (15.17) представляют собой систему двух уравнений относительно двух неизвестных  $q$  и  $c$ .

Вычитая (15.16) из (15.17), получим



$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{\tau} = q \left( 1 + \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} \right),$$

откуда

$$q = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right). \quad (15.18)$$

Подставляя (15.18) в (15.16), имеем

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{\tau} \ln \frac{c}{a} - p = -\frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right)$$

или

$$p = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{c^2}{b^2} + \ln \left( \frac{c}{a} \right)^2 \right]. \quad (15.19)$$

Ведём обозначение

$$\zeta = \left( \frac{c}{a} \right)^2.$$

Тогда предыдущее выражение примет вид

$$p = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \zeta + \ln \zeta \right)$$

или

$$\frac{a^2}{b^2} \zeta - \ln \zeta = 1 - \sqrt{3} \frac{p}{\sigma_{\tau}}. \quad (15.20)$$

Из этого уравнения можно определить  $\zeta$ , а затем радиус  $c$  и по формуле (15.18) давление  $q$ .

Полагая в выражении (15.19)  $c = a$ , получаем формулу (15.8) для давления  $p_{\tau}^*$ , при котором пластические деформации возникают только в точках внутренней поверхности трубы.

Предельную нагрузку  $p_{\tau}$ , характеризующую несущую способность трубы, можно получить из (15.19), приняв  $c = b$ :

$$p_{\tau} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{\tau} \ln \frac{b}{a}. \quad (15.21)$$

Определим величину осевой силы  $N$ , растягивающей трубу:

$$N = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r dr = 2\pi \int_a^c \sigma_{zz} r dr + 2\pi \int_c^b \sigma_{zz} r dr. \quad (15.22)$$

В пластической зоне при  $a \leq r \leq c$  согласно (15.12) и (15.13) имеем

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) - p.$$

В упругой зоне при  $c \leq r \leq b$  в соответствии с (15.14), (15.15) и (15.18)

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{qc^2}{b^2 - c^2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2}.$$

Вычислим интегралы, входящие в выражение (15.22):

$$\begin{aligned} \int_a^c \sigma_{zz} r dr &= \int_a^c \left[ \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) - p \right] r dr = \left( \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} - p \right) \frac{c^2 - a^2}{2} + \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( c^2 \ln \frac{c}{a} - \frac{c^2 - a^2}{2} \right) = \\ &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} c^2 \ln \frac{c}{a} - p \frac{c^2 - a^2}{2}; \\ \int_c^b \sigma_{zz} r dr &= \int_c^b \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2} r dr = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2}. \end{aligned}$$

Кроме того, согласно (15.19)

$$\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{c}{a} = \frac{p}{2} - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2b^2}.$$

Подставляя данные выражения в формулу (15.22), запишем

$$N = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r dr = 2\pi \left( \frac{p}{2} c^2 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2} - p \frac{c^2 - a^2}{2} + \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2} \right) = \pi p a^2. \quad (15.23)$$

Очевидно, что такая осевая сила возникает в трубе с днищами, нагруженной внутренним давлением. Таким образом, осевая деформация равна нулю (т.е. труба работает в условиях плоской деформации), если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если для трубы из несжимаемого материала величина осевой силы определяется формулой (15.23). Последнее, например, имеет место для незакрепленной трубы, у которой осевая сила возникает только за счёт давления на днища.

*Пример:* Рассмотрим в качестве примера трубу, для которой  $b = 2a$ .

Найдём для неё предел упругого деформирования по формуле (15.8):

$$p_T^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{4a^2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_T = 0,4330 \sigma_T.$$

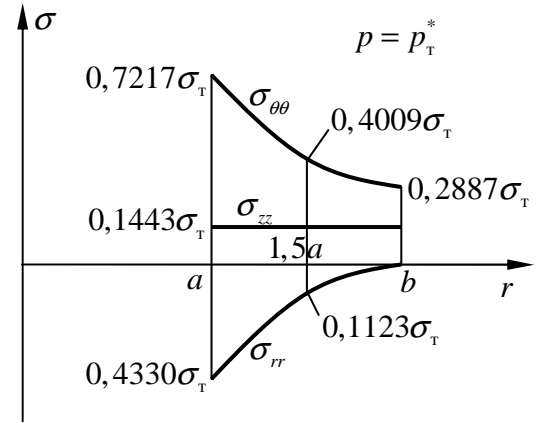
При давлении  $p_T^*$  напряжения в трубе согласно (15.1), (15.2) и (15.7) будут определяться следующими формулами:

$$\sigma_{rr} = -\frac{p_T^* a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_T^* a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right);$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{p_T^* a^2}{b^2 - a^2}.$$

Построенные по этим формулам эпюры напряжений при  $b = 2a$  показаны на рисунке 15.4.



**Рисунок 15.4 – Распределение напряжений в пределах упругости**

Далее определим предельное давление для рассматриваемой трубы, воспользовавшись формулой (15.21):

$$p_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln 2 = 0,8004 \sigma_T.$$

При  $p = p_T$  пластическая область распространяется на всё сечение трубы (т.е.  $c = b$ ). Распределение напряжений в предельном состоянии определяем по формулам (15.12), (15.13) и (15.7) с учётом (15.21):

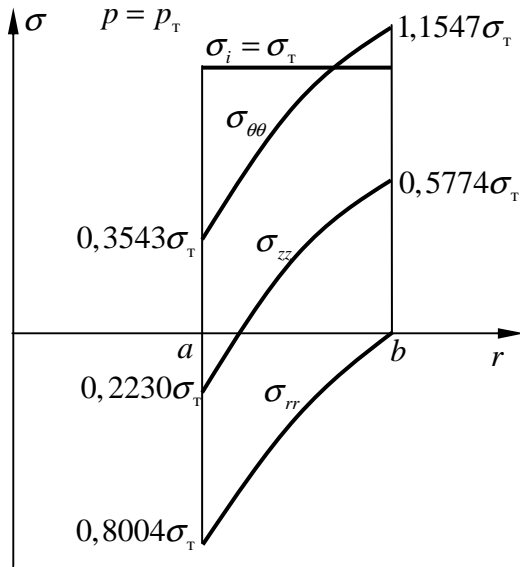
$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{a} - p_T = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{r};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) - p_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 - \ln \frac{b}{r}\right).$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - 2 \ln \frac{b}{r}\right).$$

Результаты числовых расчётов по этим формулам представлены на рисунке 15.5. Видно, что характер распределения окружных напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  в предельном состоянии отличается от их распределения в пределах упругости (см. рисунок 15.4). Наибольшее окружное напряжение здесь возникает уже в точках наружной поверхности трубы. Это согласуется с опытами Бриджмена, который экспериментально установил, что разрушение стальных толстостен-

ных труб, нагруженных внутренним давлением, начинается с наружной поверхности.



**Рисунок 15.5 – Распределение напряжений в предельном состоянии**

Рассмотрим теперь случай нагружения рассматриваемой трубы давлением, удовлетворяющим условию  $p_T^* < p < p_T$ . Для определённости примем

$$p = 0,7\sigma_T$$

или

$$p = 1,617 p_T^* = 0,8746 p_T.$$

Для нахождения наружного радиуса пластической зоны  $c$  воспользуемся уравнением (15.20):

$$\frac{a^2}{b^2} \zeta - \ln \zeta = 1 - \sqrt{3} \frac{p}{\sigma_T}$$

или

$$\zeta - \frac{b^2}{a^2} \ln \zeta = -\frac{b^2}{a^2} \left( \sqrt{3} \frac{p}{\sigma_T} - 1 \right),$$

где

$$\zeta = \left( \frac{c}{a} \right)^2 \quad (a \leq c \leq b).$$

В нашем случае данное уравнение примет вид

$$\zeta - 4 \ln \zeta = -0,8497.$$

Его можно решить численно или графически (рисунок 15.6). Одним из корней этого уравнения, удовлетворяющим условию

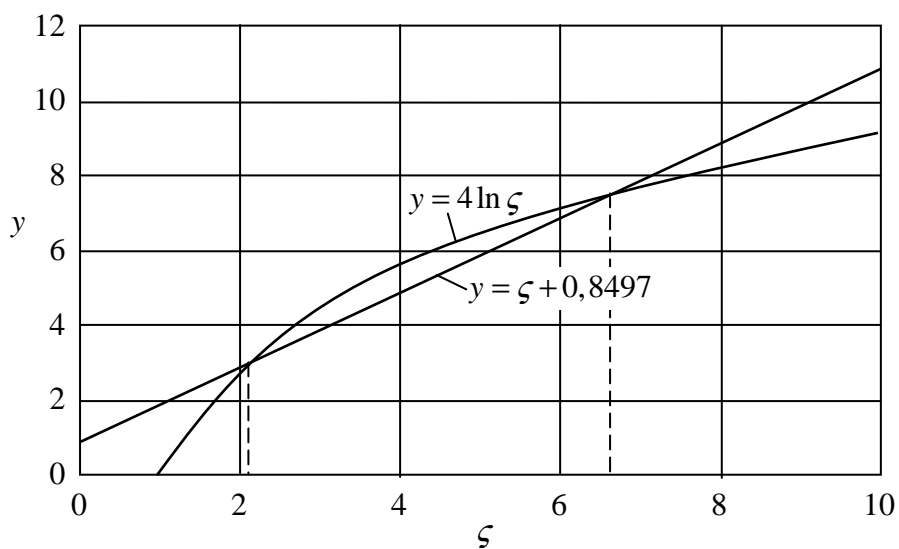
$$\zeta \leq 4,$$

вытекающему из неравенства  $c \leq b = 2a$ , является значение

$$\zeta = 2,0803.$$

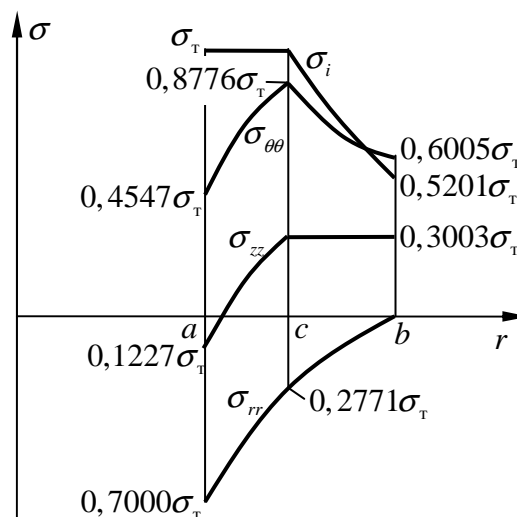
При этом

$$c = a\sqrt{\zeta} = a\sqrt{2,0803} = 1,4423a.$$



**Рисунок 15.6 – Графическое определение корней нелинейного уравнения**

Дальнейшие расчёты по формулам (15.12)...(15.15) приводят к результатам, показанным на рисунке 15.7.



**Рисунок 15.7 – Распределение напряжений при заданном давлении**

## 16 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ К РАСЧЁТУ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ И КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрим тонкостенную трубку, нагруженную осевой силой  $N$  и крутящим моментом  $M$  (рисунок 16.1).

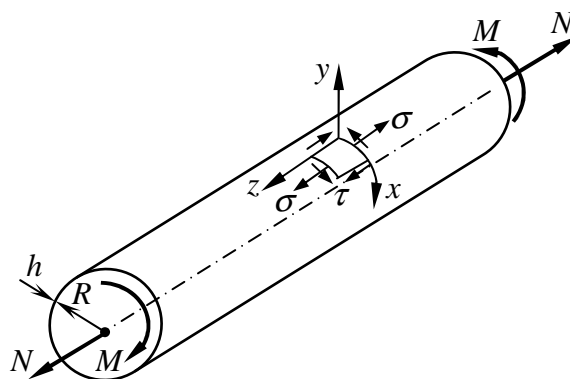


Рисунок 16.1 – Тонкостенная трубка

Материал трубки будем считать несжимаемым ( $\mu = 1/2$ ) и неупрочняющимся (рисунок 16.2).

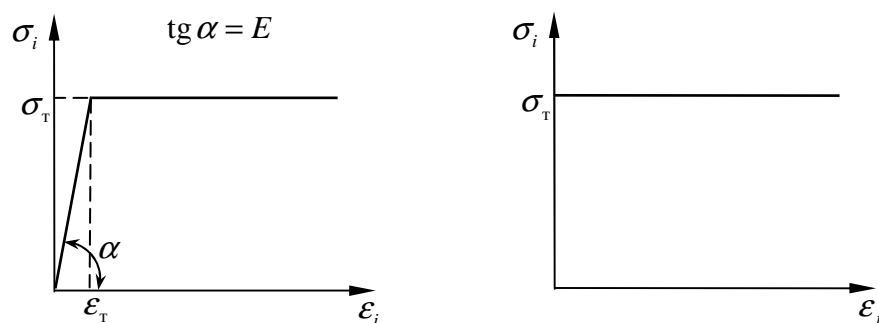


Рисунок 16.2 – Диаграмма деформирования без упрочнения

Рассматриваемая система является статически определимой. При этом нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения находятся как

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{N}{2\pi R h}; \quad \tau = \frac{M}{\Omega h} = \frac{M}{2\pi R^2 h}, \quad (16.1)$$

где  $R$  – средний радиус трубки;  $h$  – толщина стенки.

В пределах упругости относительное удлинение трубки  $\varepsilon$  и угол сдвига  $\gamma$  согласно закону Гука равны

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (16.2)$$

где  $E$  и  $G$  – соответственно модуль упругости и модуль сдвига. Поскольку материал является несжимаемым,  $E = 3G$ .

Определим интенсивность напряжений, используя следующую формулу:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}.$$

В нашем случае  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ ;  $\sigma_{zz} = \sigma$ ;  $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$ ;  $\sigma_{zx} = \tau$ , поэтому

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (16.3)$$

Для вычисления интенсивности деформаций воспользуемся формулой

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Для рассматриваемой трубки из несжимаемого материала  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\varepsilon/2$ ;  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$ ;  $\gamma_{zx} = \gamma$ . При этом

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{9}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\gamma^2}$$

или

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\varepsilon^2 + \gamma^2}. \quad (16.4)$$

Подставляя выражения (16.2) в формулу (16.4), получим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\frac{\sigma^2}{E^2} + 9\frac{\tau^2}{E^2}} = \frac{1}{E} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

или согласно (16.3)

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = 3G\varepsilon_i. \quad (16.5)$$

Напомним, что полученный результат справедлив, когда трубка работает в пределах упругости. Если же интенсивность напряжений  $\sigma_i$  станет равной пределу текучести материала  $\sigma_T$ , то согласно условию пластичности Мизеса трубка начнёт работать с пластическими деформациями.

I. *Применение деформационной теории пластичности.* В этом случае предполагается, что  $N$  и  $M$  прикладываются к трубке одновременно и возрастают пропорционально одному параметру (т.е. реализуется простое нагружение). Связь между напряжениями и деформациями за пределами упругости здесь определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0); & \sigma_{xy} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0); & \sigma_{yz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0); & \sigma_{zx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{zx}.\end{aligned}\quad (16.6)$$

Применительно к рассматриваемой трубке из несжимаемого материала ( $\varepsilon_0 = 0$ ) первая группа выражений (16.6) преобразуется к следующему виду:

$$-\frac{\sigma}{3} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{xx}; \quad -\frac{\sigma}{3} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{yy}; \quad \sigma - \frac{\sigma}{3} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_{zz}$$

или, учитывая, что  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\varepsilon/2$ ;  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon$ , получим одно уравнение

$$\sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon. \quad (16.7)$$

Из второй группы выражений (16.6) также останется только одно уравнение:

$$\tau = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma. \quad (16.8)$$

Соотношения (16.7) и (16.8) справедливы при любой зависимости  $\sigma_i$  от  $\varepsilon_i$ . В нашем случае материал трубки неупрочняющийся, поэтому за пределами упругости имеем

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (16.9)$$

или согласно (16.3)

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_T^2. \quad (16.10)$$

Подставляя выражение (16.9) в соотношения (16.7) и (16.8), получим

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_i}\varepsilon; \quad \tau = \frac{\sigma_T}{3\varepsilon_i}\gamma \quad (16.11)$$



или с учётом (16.4)

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}\sigma_T}{\sqrt{3\varepsilon^2 + \gamma^2}} \varepsilon; \quad \tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{3\varepsilon^2 + \gamma^2}} \gamma. \quad (16.12)$$

По данным формулам, имея значения деформаций  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , можно определить напряжения  $\sigma$  и  $\tau$ . Однако по напряжениям не представляется возможным вычислить деформации. Покажем это, для чего перепишем выражения (16.12):

$$\frac{\sigma^2}{3\sigma_T^2} = \frac{\varepsilon^2}{3\varepsilon^2 + \gamma^2}; \quad \frac{3\tau^2}{\sigma_T^2} = \frac{\gamma^2}{3\varepsilon^2 + \gamma^2}.$$

Пусть

$$\varepsilon^2 = x; \quad \gamma^2 = y; \quad \frac{\sigma^2}{3\sigma_T^2} = a; \quad \frac{3\tau^2}{\sigma_T^2} = b,$$

тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\frac{x}{3x + y} = a; \quad \frac{y}{3x + y} = b$$

или

$$\begin{cases} 3ax + ay - x = 0 \\ 3bx + by - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (3a - 1)x + ay = 0 \\ 3bx + (b - 1)y = 0 \end{cases}.$$

Определитель данной системы равен

$$\Delta = (3a - 1)(b - 1) - 3ab = 1 - 3a - b = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} - \frac{3\tau^2}{\sigma_T^2} = 1 - \frac{\sigma^2 + 3\tau^2}{\sigma_T^2} = 1 - \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2} = 0.$$

Так как определитель однородной системы получился равным нулю, то эта система не имеет определённого решения.

Для дальнейших преобразований целесообразно перейти к безразмерным напряжениям и деформациям:

$$q = \frac{\sigma}{\sigma_T}; \quad s = \frac{\tau}{\tau_T} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_T} \tau; \quad \xi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}; \quad \chi = \frac{\gamma}{\gamma_T}. \quad (16.13)$$

Здесь

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}; \quad \gamma_T = \frac{\tau_T}{G} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}G} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{E} = \sqrt{3}\varepsilon_T. \quad (16.14)$$

Отсюда следует равенство

$$\chi = \frac{\gamma}{\sqrt{3}\varepsilon_{\tau}}. \quad (16.15)$$

Согласно (16.13) и (16.15) имеем

$$\sigma = \sigma_{\tau}q; \quad \tau = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}}s; \quad \varepsilon = \varepsilon_{\tau}\xi; \quad \gamma = \sqrt{3}\varepsilon_{\tau}\chi. \quad (16.16)$$

Подстановка (16.16) в (16.12) даёт

$$q = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}}; \quad s = \frac{\chi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}}, \quad (16.17)$$

откуда

$$q^2 + s^2 = 1. \quad (16.18)$$

Соотношения (16.17) представляют собой зависимости безразмерных напряжений от безразмерных деформаций по деформационной теории пластичности. Из них следует, что напряжения определяются конечными значениями деформаций и не зависят от пути нагружения.

Используя формулы (16.1) и (16.10), установим соотношение между осевой силой  $N$  и крутящим моментом  $M$ , при котором тонкостенная трубка будет находиться в пластическом предельном состоянии (рисунок 16.3):

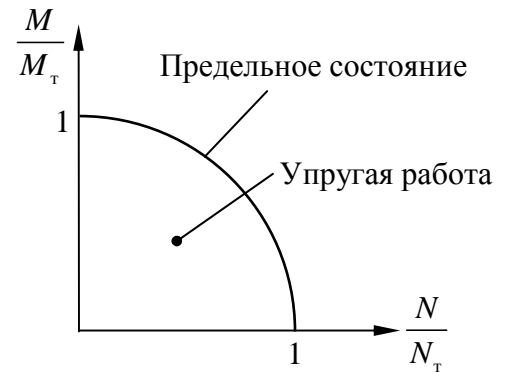
$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \left(\frac{N}{2\pi Rh}\right)^2 + 3\left(\frac{M}{2\pi R^2 h}\right)^2 = \sigma_{\tau}^2$$

или

$$\left(\frac{N}{N_{\tau}}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_{\tau}}\right)^2 = 1, \quad (16.19)$$

где

$$\begin{aligned} N_{\tau} &= 2\pi Rh\sigma_{\tau}; \\ M_{\tau} &= 2\pi R^2 h\sigma_{\tau}/\sqrt{3} = 2\pi R^2 h\tau_{\tau}. \end{aligned} \quad (16.20)$$



**Рисунок 16.3 – Предельное состояние трубки**

Здесь  $N_{\tau}$  – значение осевой силы, при изолированном действии которой трубка переходит в предельное состояние;  $M_{\tau}$  – предельный момент, при действии которого трубка исчерпывает свою несущую способность.

Введённые ранее безразмерные параметры связаны с нагрузками следующими зависимостями:

$$q = \frac{\sigma}{\sigma_T} = \frac{N}{2\pi R h \sigma_T} = \frac{N}{N_T}; \quad s = \frac{\tau}{\tau_T} = \frac{M}{2\pi R^2 h \sigma_T / \sqrt{3}} = \frac{M}{M_T}. \quad (16.21)$$

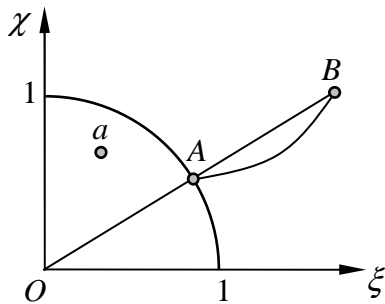
Отметим, что если подставить данные выражения в (16.18), то получим уравнение (16.19).

Внесём выражения для деформаций  $\varepsilon$  и  $\gamma$  (16.16) в формулу (16.4):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\varepsilon_T^2 \xi^2 + 3\varepsilon_T^2 \chi^2} = \varepsilon_T \sqrt{\xi^2 + \chi^2}. \quad (16.22)$$

Отсюда следует, что если деформированное состояние трубки характеризовать безразмерными величинами  $\xi$  и  $\chi$ , то точка  $a$  на плоскости  $\xi\chi$  (рисунок 16.4) с координатами, удовлетворяющими условию

$$\xi^2 + \chi^2 < 1,$$



будет соответствовать упругому состоянию трубки, так как в этом случае  $\varepsilon_i < \varepsilon_T$ .

Когда точка  $A$  с координатами  $\xi$  и  $\chi$  лежит на окружности единичного радиуса, то она будет соответствовать деформациям трубки, только что перешедшей в пластическое состояние.

**Рисунок 16.4 – Различные деформированные состояния трубки**

Очевидно, что точка может находиться и за пределами данной окружности (точка  $B$ ). При этом деформации трубки будут больше, чем в предыдущих случаях, причём её напряжённое состояние оказывается зависящим от способа или пути нагружения, определяемого формой кривой  $AB$ , начало которой  $A$  лежит на окружности единичного радиуса. Однако параметры  $q$  и  $s$ , характеризующие напряжения в трубке, будут по-прежнему удовлетворять уравнению (16.18).

В силу того, что невозможно найти деформации трубки по напряжениям, целесообразно в качестве основных неизвестных принять  $\xi$  и  $\chi$ , поскольку по ним можно определить  $q$  и  $s$ , а значит и напряжения  $\sigma$  и  $\tau$ .

Поведение трубки при условии  $\xi^2 + \chi^2 > 1$  может быть описано теорией течения.

II. *Применение теории течения.* Выпишем основные соотношения данной теории:

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ d\sigma_{xx} - \mu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz}) \right] + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0); \dots; \quad (16.23)$$

$$d\varepsilon_{zx} = \frac{d\sigma_{zx}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_i} \sigma_{zx}.$$

Для исследуемой трубки при  $\sigma_i = \sigma_T$  они примут вид

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_T} \sigma; \quad (16.24)$$

$$d\gamma = \frac{d\tau}{G} + 3 \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_T} \tau.$$

Определим интенсивность приращений пластических деформаций:

$$\overline{d\varepsilon_{ip}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xxp} - d\varepsilon_{yy p})^2 + \dots + 6(d\varepsilon_{xyp}^2 + \dots)}$$

или в нашем случае

$$\overline{d\varepsilon_{ip}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3d\varepsilon_p^2 + d\gamma_p^2}. \quad (16.25)$$

Перейдём в соотношениях (16.24) к безразмерным параметрам. Согласно (16.16) имеем

$$d\sigma = \sigma_T dq; \quad d\tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} ds; \quad d\varepsilon = \varepsilon_T d\xi; \quad d\gamma = \sqrt{3} \varepsilon_T d\chi$$

и тогда

$$\varepsilon_T d\xi = \frac{\sigma_T}{E} dq + q \overline{d\varepsilon_{ip}};$$

$$\sqrt{3} \varepsilon_T d\chi = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{E} ds + 3 \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_T} \cdot \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} s$$

или

$$d\xi = dq + q \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\varepsilon_T}; \quad (16.26)$$

$$d\chi = ds + s \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\varepsilon_T}.$$

Согласно (16.18)

$$q^2 + s^2 = 1.$$

Дифференцируя данное уравнение, получим

$$2qdq + 2sds = 0 \quad \text{или} \quad qdq + sds = 0. \quad (16.27)$$

Умножим первое выражение (16.26) на  $q$ , а второе – на  $s$  и сложим их:

$$qd\xi + sd\chi = qdq + sds + (q^2 + s^2) \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\varepsilon_T} = \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\varepsilon_T}.$$

Полученный результат подставим в первое выражение (16.26):

$$d\xi = dq + q(qd\xi + sd\chi) = dq + q^2 d\xi + q\sqrt{1-q^2} d\chi,$$

откуда

$$\frac{dq}{d\xi} = \sqrt{1-q^2} \left( \sqrt{1-q^2} - q \frac{d\chi}{d\xi} \right). \quad (16.28)$$

Аналогично подстановка во второе выражение (16.26) даёт

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{1-s^2} \left( \sqrt{1-s^2} - s \frac{d\xi}{d\chi} \right). \quad (16.29)$$

Зависимости безразмерных напряжений  $q$  и  $s$  от безразмерных деформаций  $\xi$  и  $\chi$  находятся из решения дифференциальных уравнений (16.28) и (16.29). Путь нагружения в этих уравнениях определяется производными  $d\chi/d\xi$  и  $d\xi/d\chi$ .

Исследуем некоторые частные случаи нагружения (рисунок 16.5).

1. Допустим, что трубка, достигнув пластического состояния, сначала только удлиняется (путь нагружения – прямая  $AB$ ). Это означает  $d\chi=0$ , и уравнение (16.28) примет вид

$$\frac{dq}{d\xi} = 1 - q^2 \quad \text{или} \quad d\xi = \frac{dq}{1 - q^2}, \quad (16.30)$$

откуда

$$\xi + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+q}{1-q} \quad \text{или} \quad \xi + C_1 = \frac{1}{2} \ln X,$$

где

$$X = \frac{1+q}{1-q}. \quad (16.31)$$

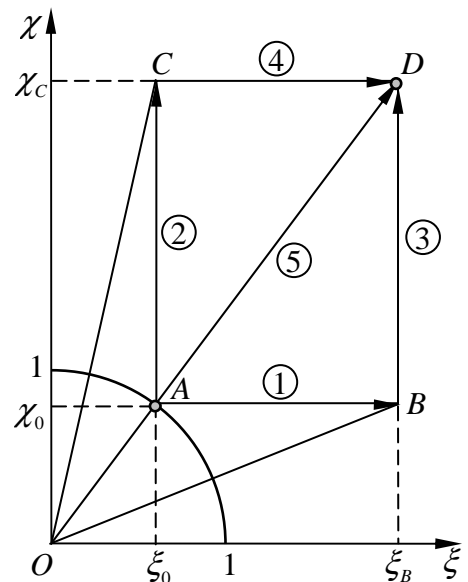


Рисунок 16.5 – Различные пути нагружения

Для определения константы интегрирования используем условие:

при  $\xi = \xi_0 \rightarrow q = q_0$ .

Тогда

$$C_1 = -\xi_0 + \frac{1}{2} \ln X_0,$$

где

$$X_0 = \frac{1+q_0}{1-q_0}. \quad (16.32)$$

При этом решение дифференциального уравнения (16.30) примет вид

$$\xi - \xi_0 + \frac{1}{2} \ln X_0 = \frac{1}{2} \ln X \quad \text{или} \quad \ln \frac{X}{X_0} = 2(\xi - \xi_0),$$

откуда

$$X = X_0 e^{2(\xi - \xi_0)}. \quad (16.33)$$

Зная  $X$ , легко определить и  $q$ :

$$\begin{aligned} 1+q &= (1-q)X; & q+qX &= X-1; \\ q &= \frac{X-1}{X+1}. \end{aligned} \quad (16.34)$$

В качестве примера для точки  $A$  примем  $\xi_0 = 0,6$ . Тогда, учитывая, что точка  $A$  лежит на окружности единичного радиуса (см. рисунок 16.5), имеем

$$\chi_0 = \sqrt{1 - \xi_0^2} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8.$$

Далее по формулам (16.17) находим

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \chi_0^2}} = \frac{0,6}{\sqrt{0,6^2 + 0,8^2}} = 0,6; \\ s_0 &= \frac{\chi_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \chi_0^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,6^2 + 0,8^2}} = 0,8. \end{aligned}$$

Согласно (16.32)

$$X_0 = \frac{1+q_0}{1-q_0} = \frac{1+0,6}{1-0,6} = 4.$$

Положим, что для точки  $B$  параметр  $\xi = \xi_B = 2$ . Так как прямая  $AB$  параллельна оси  $\xi$ , то  $\chi_B = 0,8$ . По формуле (16.33) вычисляем

$$X(\xi_B) = X(2) = 4e^{2(2-0,6)} = 4e^{2,8} = 65,78.$$

Наконец, используя (16.34) и (16.18), находим безразмерные напряжения:

$$q = \frac{X(2) - 1}{X(2) + 1} = \frac{65,78 - 1}{65,78 + 1} = 0,9701;$$

$$s = \sqrt{1 - q^2} = \sqrt{1 - 0,9701^2} = 0,2429.$$

Рассчитаем данные параметры по деформационной теории пластичности, используя соотношения (16.17):

$$q = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0,8^2}} = 0,9285;$$

$$s = \frac{\chi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{2^2 + 0,8^2}} = 0,3714.$$

Как видно, данные результаты несколько отличаются от значений, полученных по теории течения. Это обусловлено тем, что они соответствуют простому нагружению трубки по прямой  $OB$ , а не по ломаной  $OAB$  (см. рисунок 16.5).

Отметим, что рассмотренный путь нагружения  $AB$  может быть реализован увеличением силы  $N$  и одновременным уменьшением крутящего момента  $M$  так, чтобы в каждый момент времени выполнялось равенство (16.18). Соответствующие значения  $N$  и  $M$  приведены в таблице 16.1.

**Таблица 16.1 – Параметры, соответствующие пути нагружения  $AB$**

$\xi$	$\xi - \xi_0$	$q = N/N_T$	$s = M/M_T$
0,6	0	0,6000	0,8000
0,8	0,2	0,7129	0,7012
1,0	0,4	0,7980	0,6026
1,2	0,6	0,8600	0,5104
1,4	0,8	0,9039	0,4277
1,6	1,0	0,9345	0,3558
1,8	1,2	0,9556	0,2945
2,0	1,4	0,9701	0,2429

2. Далее рассмотрим нагружение трубки по пути  $AC$ , для которого  $d\xi = 0$  (см. рисунок 16.5). Воспользуемся теперь уравнением (16.29), которое здесь примет вид

$$d\chi = \frac{ds}{1 - s^2}. \quad (16.35)$$

Его интегрирование даёт

$$\chi + C_2 = \frac{1}{2} \ln Y,$$

где

$$Y = \frac{1+s}{1-s}. \quad (16.36)$$

Постоянную  $C_2$  найдём из условия:

$$\text{при } \chi = \chi_0 \rightarrow s = s_0.$$

Тогда

$$C_2 = -\chi_0 + \frac{1}{2} \ln Y_0,$$

где

$$Y_0 = \frac{1+s_0}{1-s_0}. \quad (16.37)$$

В итоге получаем решение уравнения (16.35) в следующем виде:

$$Y = Y_0 e^{2(\chi - \chi_0)}, \quad (16.38)$$

причём

$$s = \frac{Y-1}{Y+1}. \quad (16.39)$$

В качестве примера для точки  $A$  примем те же значения безразмерных параметров, что и ранее. Для точки  $C$  положим

$$\chi_C = \frac{8}{3}; \quad \xi_C = 0,6.$$

Далее по формулам (16.37) и (16.38) вычисляем

$$Y_0 = \frac{1+s_0}{1-s_0} = \frac{1+0,8}{1-0,8} = 9;$$

$$Y(\chi_C) = Y\left(\frac{8}{3}\right) = 9e^{2\left(\frac{8}{3}-0,8\right)} = 376,36.$$

Затем по формулам (16.39) и (16.18) находим

$$s = \frac{Y(8/3)-1}{Y(8/3)+1} = \frac{376,36-1}{376,36+1} = 0,9947;$$



$$q = \sqrt{1 - s^2} = \sqrt{1 - 0,9947^2} = 0,1028.$$

Деформационная теория пластичности для точки  $C$  согласно (16.17) приводит к следующим результатам:

$$q = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}} = \frac{0,6}{\sqrt{0,6^2 + (8/3)^2}} = 0,2195;$$

$$s = \frac{\chi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}} = \frac{8/3}{\sqrt{0,6^2 + (8/3)^2}} = 0,9756.$$

Эти результаты также отличаются от предыдущих и соответствуют простому нагружению трубки по прямой  $OC$ .

Для реализации пути нагружения  $AC$  необходимо увеличивать крутящий момент  $M$  и уменьшать силу  $N$  в соответствии с данными, приведенными в таблице 16.2.

**Таблица 16.2 – Параметры, соответствующие пути нагружения  $AC$**

$\chi$	$\chi - \chi_0$	$q = N/N_T$	$s = M/M_T$
0,8	0	0,6000	0,8000
1,0	0,2	0,5080	0,8614
1,2	0,4	0,4256	0,9049
1,4	0,6	0,3540	0,9352
1,6	0,8	0,2930	0,9561
1,8	1,0	0,2416	0,9704
2,0	1,2	0,1988	0,9800
2,2	1,4	0,1633	0,9866
2,4	1,6	0,1340	0,9910
2,68	1,87	0,1028	0,9947

3. После рассмотрения путей нагружения  $AB$  и  $AC$  перейдем к следующему пути  $BD$ , приводящему трубку к состоянию в точке  $D$ , характеризуемому безразмерными деформациями  $\xi_D = 2$  и  $\chi_D = 8/3$ . Здесь начальные значения равны

$$\xi_0 = 2; \quad \chi_0 = 0,8; \quad q_0 = 0,9701; \quad s_0 = 0,2429.$$

Далее по формулам (16.37) и (16.38) вычисляем

$$Y_0 = \frac{1 + s_0}{1 - s_0} = \frac{1 + 0,2429}{1 - 0,2429} = 1,6417;$$

$$Y(\chi_D) = Y\left(\frac{8}{3}\right) = 1,6417 e^{2\left(\frac{8}{3}-0,8\right)} = 68,65.$$

И, наконец, по формулам (16.39) и (16.18) находим

$$s = 0,9713; \quad q = 0,2379.$$

Деформационная теория пластичности для точки  $D$  даёт

$$s = 0,8; \quad q = 0,6.$$

4. Перейдём теперь к точке  $D$  по пути  $CD$ . В точке  $C$  имеем следующие начальные значения:

$$\xi_0 = 0,6; \quad \chi_0 = 8/3; \quad q_0 = 0,1028; \quad s_0 = 0,9947.$$

Расчёты по формулам (16.32)...(16.34) и (16.18) дают

$$\begin{aligned} X_0 &= 1,2292; & X(\xi_D) &= 20,21; \\ s &= 0,9057; & q &= 0,4239. \end{aligned}$$

5. В продолжение рассмотрим ещё путь нагружения, описываемый прямой  $OAD$ , проходящей через начало координат (см. рисунок 16.5). Уравнение этой прямой имеет вид

$$\chi = k\xi, \tag{16.40}$$

где  $k$  – тангенс угла наклона прямой  $OAD$  к оси  $\xi$ .

Из (16.40) имеем

$$\frac{d\chi}{d\xi} = k.$$

При этом дифференциальное уравнение (16.28) примет вид

$$\frac{dq}{d\xi} = \sqrt{1-q^2} (\sqrt{1-q^2} - kq). \tag{16.41}$$

Полагая  $q = \sin v$  и учитывая, что

$$\sqrt{1-q^2} = \cos v; \quad \frac{dq}{d\xi} = \cos v \frac{dv}{d\xi},$$

из уравнения (16.41) получаем

$$\frac{dv}{d\xi} = \cos v - k \sin v$$

или

$$d\xi = \frac{dv}{\cos v - k \sin v}. \quad (16.42)$$

Для проведения интегрирования воспользуемся подстановкой

$$w = \operatorname{tg} \frac{v}{2}.$$

При этом

$$\sin v = \frac{2w}{1+w^2}; \quad \cos v = \frac{1-w^2}{1+w^2}; \quad dv = \frac{2dw}{1+w^2}.$$

Тогда соотношение (16.42) примет вид

$$d\xi = \frac{2dw}{(1+w^2)\left(\frac{1-w^2}{1+w^2} - k \frac{2w}{1+w^2}\right)} = -\frac{2dw}{w^2 + 2kw - 1}. \quad (16.43)$$

Уравнение

$$w^2 + 2kw - 1 = 0$$

имеет корни  $w_1$  и  $w_2$ :

$$w_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + 1},$$

так что

$$\frac{1}{w^2 + 2kw - 1} = \frac{1}{(w - w_1)(w - w_2)} = \frac{1}{w_1 - w_2} \left( \frac{1}{w - w_1} - \frac{1}{w - w_2} \right).$$

Тогда интегрирование уравнения (16.43) даёт

$$\xi + C_3 = -2 \int \frac{dw}{w^2 + 2kw - 1} = \frac{2}{w_2 - w_1} \int \left( \frac{1}{w - w_1} - \frac{1}{w - w_2} \right) dw = \frac{2}{w_2 - w_1} \ln \frac{w - w_1}{w - w_2}$$

или

$$\xi + C_3 = \frac{2}{w_2 - w_1} \ln Z, \quad (16.44)$$

где

$$Z = \frac{w - w_1}{w - w_2}. \quad (16.45)$$

Далее определяем постоянную интегрирования:

$$\xi_0 + C_3 = \frac{2}{w_2 - w_1} \ln Z_0 \quad \text{или} \quad C_3 = -\xi_0 + \frac{2}{w_2 - w_1} \ln Z_0,$$

где

$$Z_0 = \frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2}. \quad (16.46)$$

С учётом этого уравнение (16.44) запишется как

$$\xi - \xi_0 = \frac{2}{w_2 - w_1} \ln \frac{Z}{Z_0},$$

откуда

$$Z = Z_0 e^{\frac{w_2 - w_1}{2}(\xi - \xi_0)}. \quad (16.47)$$

Из соотношения (16.45) следует

$$w = \frac{w_1 - w_2 Z}{1 - Z}. \quad (16.48)$$

Для определения  $q$  записываем

$$\nu = 2 \operatorname{arctg} w \quad \text{и} \quad q = \sin(2 \operatorname{arctg} w). \quad (16.49)$$

Для нахождения  $s$ , как и ранее, следует воспользоваться формулой (16.18).

Вернёмся к нашему случаю. Для прямой  $AB$  тангенс угла наклона к оси  $\xi$  равен

$$k = \frac{4}{3},$$

так что

$$w_1 = \frac{1}{3}; \quad w_2 = -3.$$

Для точки  $A$  имеем

$$\xi_0 = 0,6; \quad \chi_0 = 0,8; \quad q_0 = 0,6; \quad s_0 = 0,8.$$

Далее определяем

$$w_0 = \operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} = \frac{\sin \nu_0}{1 + \cos \nu_0} = \frac{q_0}{1 + \sqrt{1 - q_0^2}} = \frac{0,6}{1 + \sqrt{1 - 0,6^2}} = \frac{1}{3}.$$

Тогда согласно (16.46) и (16.47)  $Z_0 = Z = 0$ . Этот результат означает (см. формулу (16.48)), что

$$w = w_1 = \frac{1}{3} = \operatorname{const},$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned}v &= v_0 = const ; \\q &= q_0 = 0,6 = const ; \\s &= s_0 = 0,8 = const .\end{aligned}$$

В заключение приведём значения безразмерных напряжений в точке  $D$ , полученные по теории течения при различных вариантах нагружения (таблица 16.3).

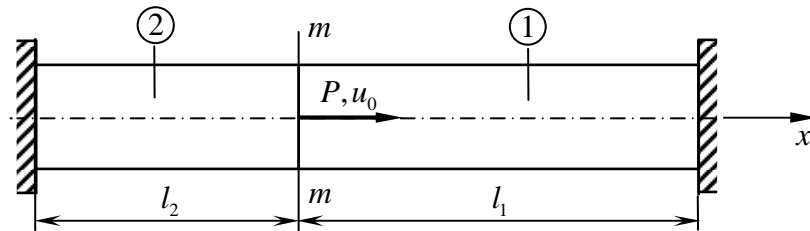
**Таблица 16.3 – Сводка результатов расчётов по теории течения**

Путь нагружения	$q$	$s$
$ABD$	0,9713	0,2379
$ACD$	0,9057	0,4239
$AD$	0,6	0,8

Как видно из таблицы, наблюдается колоссальная разница в напряжениях. Отметим, что по деформационной теории пластичности напряжения в точке  $D$  вне зависимости от способа нагружения получаются одинаковыми:  $q = 0,6$ ;  $s = 0,8$ . При этом они совпадают с результатами по теории течения в случае простого нагружения по пути  $AD$ .

## 17 ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный в некотором сечении осевой силой  $P$  (рисунок 17.1).



**Рисунок 17.1 – Прямолинейный стержень**

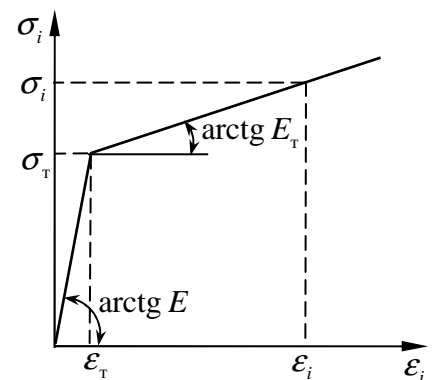
Полагаем материал стержня линейно упрочняющимся и несжимаемым ( $\mu = 1/2$ ). Его диаграмма деформирования показана на рисунке 17.2. Поскольку материал несжимаемый, она совпадает с диаграммой растяжения.

В соответствии с рисунком 17.2 имеем:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \rightarrow \sigma_i = 3G\varepsilon_i = E\varepsilon_i; \quad (17.1)$$

$$\text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \rightarrow \sigma_i = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_i, \quad (17.2)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  – модуль упругости;  $E_T = \operatorname{tg} \beta$  – модуль упрочнения;  $\lambda = 1 - E_T/E$  – параметр упрочнения.



**Рисунок 17.2 – Диаграмма деформирования с линейным упрочнением**

I. *Решение задачи по деформационной теории пластичности.* Для упрощения расчётов будем пользоваться абсолютными величинами напряжений и деформаций, обозначив их для первого участка соответственно через  $\sigma_1$  и  $\varepsilon_1$ , а для второго – через  $\sigma_2$  и  $\varepsilon_2$ .

Очевидно, что

$$\varepsilon_1 = \frac{u_0}{l_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{u_0}{l_2}, \quad (17.3)$$

где  $u_0$  – перемещение сечения  $m - m$ , вызванное силой  $P$ .

Рассматриваемый стержень работает на простое растяжение-сжатие, поэтому интенсивности напряжений на двух участках будут равны

$$\sigma_{i1} = \sigma_1; \quad \sigma_{i2} = \sigma_2.$$

Кроме того, поскольку материал считается несжимаемым для интенсивностей деформаций на этих участках можно записать

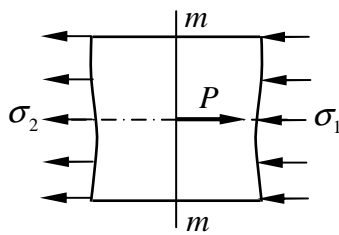
$$\varepsilon_{i1} = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_{i2} = \varepsilon_2.$$

Пусть  $l_1 > l_2$  и сила  $P$  такова, что первый длинный участок работает упруго, а второй короткий – за пределами упругости, т.е.

$$\sigma_1 < \sigma_T; \quad \sigma_2 > \sigma_T.$$

Тогда согласно (17.1) и (17.2) имеем

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_2. \quad (17.4)$$



**Рисунок 17.3 – Часть стержня**

Вблизи сечения  $m-m$  выделим часть стержня (рисунок 17.3). Из условия её равновесия следует, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{F} \quad (17.5)$$

или с учётом (17.4) и (17.3)

$$E \frac{u_0}{l_1} + \left( \lambda\sigma_T + E_T \frac{u_0}{l_2} \right) = \frac{P}{F}.$$

Здесь  $F$  – площадь поперечного сечения стержня.

Выразим из этого равенства перемещение  $u_0$ :

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - \lambda\sigma_T}{\frac{E}{l_1} + \frac{E_T}{l_2}}. \quad (17.6)$$

Тогда для напряжений получим

$$\sigma_1 = E \frac{u_0}{l_1} = \frac{\frac{P}{F} - \lambda\sigma_T}{1 + \frac{E_T l_1}{E l_2}}; \quad (17.7)$$

$$\sigma_2 = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{u_0}{l_2} = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{\frac{P}{F} - \lambda\sigma_\tau}{l_2 \left( \frac{E}{l_1} + \frac{E_\tau}{l_2} \right)} = \frac{\lambda\sigma_\tau + \frac{P}{F} \frac{E_\tau l_1}{E l_2}}{1 + \frac{E_\tau l_1}{E l_2}}. \quad (17.8)$$

Если подставить выражения (17.7) и (17.8) в уравнение (17.5), то получится тождество.

Рассмотрим теперь случай, когда оба участка работают за пределами упругости. Тогда

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \varepsilon_2. \quad (17.9)$$

Подставляя выражения (17.9) и (17.3) в уравнение равновесия (17.5), получим

$$\left( \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{u_0}{l_1} \right) + \left( \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{u_0}{l_2} \right) = \frac{P}{F},$$

откуда

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_\tau}{E_\tau \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)}. \quad (17.10)$$

Далее находим напряжения

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{u_0}{l_1} = \lambda\sigma_\tau + \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_\tau}{l_1 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)} = \frac{\frac{P}{F} + \lambda\sigma_\tau \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}; \quad (17.11)$$

$$\sigma_2 = \lambda\sigma_\tau + E_\tau \frac{u_0}{l_2} = \lambda\sigma_\tau + \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_\tau}{l_2 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)} = \frac{\frac{P}{F} \frac{l_1}{l_2} - \lambda\sigma_\tau \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}. \quad (17.12)$$

Здесь также подставка выражений (17.11) и (17.12) в уравнение (17.5) приводит к тождеству.

II. *Решение задачи с помощью вариационного уравнения Лагранжа.* Запишем вариационное уравнение Лагранжа:

$$\delta A = \delta R, \quad (17.13)$$

где  $\delta A$  – работа внешних сил на возможных перемещениях;  $\delta R$  – вариация работы, затраченной на деформацию тела.



Для рассматриваемого стержня имеем

$$\delta A = P \delta u_0; \quad (17.14)$$

$$\delta R = \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV = \int_{V_1} (-\sigma_1)(-\delta \varepsilon_1) dV + \int_{V_2} \sigma_2 \delta \varepsilon_2 dV, \quad (17.15)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – объёмы первого и второго участков стержня.

Вычислим входящие в выражение (17.15) интегралы:

$$\int_{V_1} \sigma_1 \delta \varepsilon_1 dV = F l_1 \sigma_1 \delta \varepsilon_1; \quad \int_{V_2} \sigma_2 \delta \varepsilon_2 dV = F l_2 \sigma_2 \delta \varepsilon_2.$$

Пусть оба участка работают за пределами упругости ( $\sigma_1 > \sigma_T$ ;  $\sigma_2 > \sigma_T$ ), тогда согласно (17.2) и (17.3)

$$\sigma_1 = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_1 = \lambda \sigma_T + E_T \frac{u_0}{l_1};$$

$$\sigma_2 = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_2 = \lambda \sigma_T + E_T \frac{u_0}{l_2}.$$

Учитывая (17.3), имеем

$$\delta \varepsilon_1 = \frac{\delta u_0}{l_1}; \quad \delta \varepsilon_2 = \frac{\delta u_0}{l_2}.$$

Тогда выражение (17.15) примет вид

$$\delta R = F l_1 \left( \lambda \sigma_T + E_T \frac{u_0}{l_1} \right) \frac{\delta u_0}{l_1} + F l_2 \left( \lambda \sigma_T + E_T \frac{u_0}{l_2} \right) \frac{\delta u_0}{l_2}$$

или

$$\delta R = F \left[ 2\lambda \sigma_T + E_T u_0 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \delta u_0. \quad (17.16)$$

Теперь подставим выражения (17.14) и (17.16) в уравнение Лагранжа (17.13):

$$P \delta u_0 = F \left[ 2\lambda \sigma_T + E_T u_0 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \delta u_0,$$

откуда находим

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda \sigma_T}{E_T \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)}. \quad (17.17)$$

Отметим, что выражение (17.17) совпадает с полученным ранее результатом (17.10).

III. *Решение задачи с помощью принципа минимума полной энергии деформируемой системы.* Запишем выражение для полной энергии системы:

$$\mathcal{E} = \Pi + R, \quad (17.18)$$

где  $\Pi$  – потенциал внешних сил, равный произведению сил на соответствующие перемещения, взятые с обратным знаком;  $R$  – работа, затраченная на деформацию тела.

В нашем случае

$$\Pi = -Pu_0; \quad (17.19)$$

$$R = \int_V \Phi dV = \int_{V_1} \Phi_1 dV + \int_{V_2} \Phi_2 dV = \Phi_1 Fl_1 + \Phi_2 Fl_2, \quad (17.20)$$

где в силу несжимаемости материала стержня

$$\Phi = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (17.21)$$

Рассмотрим случай, когда первый участок работает упруго, а второй – за пределами упругости ( $\sigma_1 < \sigma_T$ ;  $\sigma_2 > \sigma_T$ ). Из (17.21) следует, что значения функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  равны заштрихованным на рисунке 17.4 площадям:

$$\Phi_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_i d\varepsilon_i = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 = \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2; \quad (17.22)$$

$$\Phi_2 = \int_0^{\varepsilon_2} \sigma_i d\varepsilon_i = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_T + \frac{\sigma_T + \sigma_2}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_T).$$

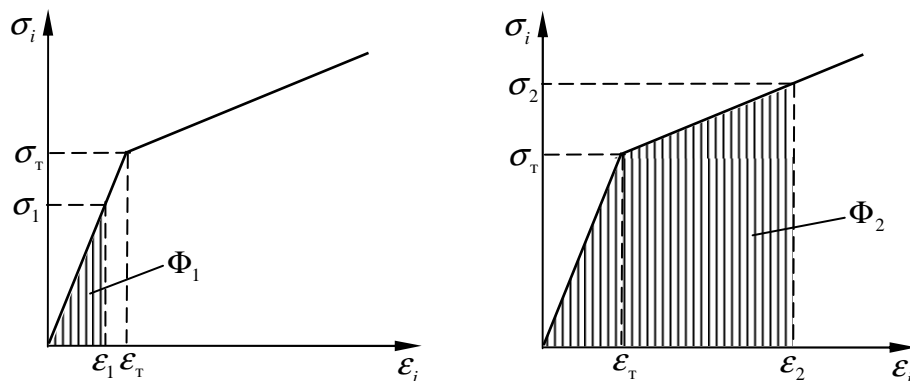


Рисунок 17.4 – К определению значений функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

Здесь согласно (17.2)

$$\sigma_2 = \lambda \sigma_\tau + E_\tau \varepsilon_2.$$

С учётом этого предыдущее выражение примет вид

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sigma_\tau \varepsilon_\tau + \frac{1}{2} (\sigma_\tau + \lambda \sigma_\tau + E_\tau \varepsilon_2) (\varepsilon_2 - \varepsilon_\tau)$$

или

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} (E_\tau \varepsilon_2^2 + 2\lambda \sigma_\tau \varepsilon_2 - \lambda \sigma_\tau \varepsilon_\tau). \quad (17.23)$$

Подставляя (17.22) и (17.23) в соотношение (17.20), получим

$$R = \frac{1}{2} EFl_1 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} Fl_2 (E_\tau \varepsilon_2^2 + 2\lambda \sigma_\tau \varepsilon_2 - \lambda \sigma_\tau \varepsilon_\tau). \quad (17.24)$$

Внося (17.19) и (17.24) в выражение (17.18), с учётом (17.3) имеем

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} EFl_1 \left( \frac{u_0}{l_1} \right)^2 + \frac{1}{2} Fl_2 \left[ E_\tau \left( \frac{u_0}{l_2} \right)^2 + 2\lambda \sigma_\tau \frac{u_0}{l_2} - \lambda \sigma_\tau \varepsilon_\tau \right] - Pu_0. \quad (17.25)$$

Таким образом,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u_0)$ . Найдём перемещение из условия минимума этой функции:

$$\frac{d\mathcal{E}}{du_0} = 0$$

или с учётом (17.25)

$$\frac{d\mathcal{E}}{du_0} = EF \frac{u_0}{l_1} + F \left( E_\tau \frac{u_0}{l_2} + \lambda \sigma_\tau \right) - P = 0, \quad (17.26)$$

откуда

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - \lambda \sigma_\tau}{\frac{E}{l_1} + \frac{E_\tau}{l_2}}. \quad (17.27)$$

Отметим, что выражение (17.27) совпадает с ранее полученным соотношением (17.6).

Дифференцирование (17.26) даёт

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{du_0^2} = \frac{EF}{l_1} + \frac{FE_\tau}{l_2} > 0.$$

Следовательно, полная энергия системы  $\mathcal{E}$  при перемещении  $u_0$ , определяемом выражением (17.27), имеет минимальное значение.

*Пример:*

$$l_1 = 20 \text{ см}; l_2 = 10 \text{ см}; F = 10 \text{ см}^2; E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \sigma_T = 270 \text{ МПа}; P = 600 \text{ кН};$$

$$\frac{E_T}{E} = \frac{1}{10} \text{ и, следовательно, } \lambda = \frac{9}{10}.$$

1. Находим сначала напряжения в предположении, что весь стержень работает упруго:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{1 + l_1/l_2} = \frac{600000}{1000} \cdot \frac{1}{1 + 20/10} = 200 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{1 + l_2/l_1} = \frac{600000}{1000} \cdot \frac{1}{1 + 10/20} = 400 \text{ МПа}.$$

Обнаруживаем, что второй участок стержня работает за пределами упругости.

2. Вычисляем напряжение  $\sigma_1$  по формуле (17.7) в предположении, что первый участок работает упруго:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} - \lambda \sigma_T}{1 + \frac{E_T l_1}{E l_2}} = \frac{\frac{600000}{1000} - \frac{9}{10} \cdot 270}{1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{10}} = 297,5 \text{ МПа}.$$

Имеем  $\sigma_1 > \sigma_T$ . Таким образом, получается, что оба участка стержня работают за пределами упругости материала.

3. Определяем напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по формулам (17.11) и (17.12), имея в виду, что весь стержень подвергается пластическим деформациям:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} + \lambda \sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}} = \frac{\frac{600000}{1000} + \frac{9}{10} \cdot 270 \cdot \left( \frac{20}{10} - 1 \right)}{1 + \frac{20}{10}} = 281 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{\frac{P l_1}{F l_2} - \lambda \sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}} = \frac{\frac{600000}{1000} \cdot \frac{20}{10} - \frac{9}{10} \cdot 270 \cdot \left( \frac{20}{10} - 1 \right)}{1 + \frac{20}{10}} = 319 \text{ МПа}.$$

Просуммируем их:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 281 + 319 = 600 \text{ МПа.}$$

Полученный результат совпадает со значением

$$\frac{P}{F} = \frac{600000}{1000} = 600 \text{ МПа.}$$

И, наконец, по формуле (17.10) рассчитаем перемещение  $u_0$ :

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_\tau}{E_\tau \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)} = \frac{\frac{600000}{1000} - 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot 270}{\frac{1}{10} \cdot 7,2 \cdot 10^4 \left( \frac{1}{200} + \frac{1}{100} \right)} = 1,056 \text{ мм.}$$

## 18 ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАСТИЛЬЯНО И ПРИНЦИПА МИНИМУМА ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим прямолинейный стержень из предыдущего примера, нагруженный в некотором сечении осевой силой  $P$  (см. рисунок 17.1).

I. *Решение задачи с помощью вариационного уравнения Кастильяно.*  
Запишем вариационное уравнение Кастильяно:

$$\delta A^* = \delta R^*, \quad (18.1)$$

где  $\delta A^*$  – работа вариаций внешних сил на действительных перемещениях точек тела;  $\delta R^*$  – вариация дополнительной работой деформации тела.

В нашем случае

$$\delta A^* = u_0 \delta P,$$

где  $u_0$  – известное перемещение сечения стержня, в котором приложена сила.

Примем, что сила  $P$  не изменяется. Тогда

$$\delta P = 0 \quad \text{и} \quad \delta A^* = 0.$$

Следовательно, вместо (18.1) будем иметь уравнение

$$\delta R^* = 0, \quad (18.2)$$

в котором для рассматриваемого стержня

$$\delta R^* = \int_V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dV = \int_{V_1} (-\varepsilon_1) (-\delta \sigma_1) dV + \int_{V_2} \varepsilon_2 \delta \sigma_2 dV, \quad (18.3)$$

где  $\varepsilon_1, \sigma_1$  и  $\varepsilon_2, \sigma_2$  – абсолютные величины деформаций и напряжений на первом и втором участках стержня.

Напряжения удовлетворяют уравнению равновесия

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{F}, \quad (18.4)$$

из которого следует

$$\delta \sigma_1 + \delta \sigma_2 = 0 \quad \text{или} \quad \delta \sigma_2 = -\delta \sigma_1. \quad (18.5)$$

Здесь учтено, что  $P = const$ .

Проводя интегрирование в (18.3), с учётом равенства (18.5) получим

$$\delta R^* = Fl_1 \varepsilon_1 \delta \sigma_1 + Fl_2 \varepsilon_2 \delta \sigma_2 = (Fl_1 \varepsilon_1 - Fl_2 \varepsilon_2) \delta \sigma_1,$$

откуда согласно (18.2) имеем

$$l_1 \varepsilon_1 - l_2 \varepsilon_2 = 0$$

или

$$l_1 \varepsilon_1 = l_2 \varepsilon_2. \quad (18.6)$$

Рассмотрим случай, когда оба участка стержня работают за пределами упругости ( $\sigma_1 > \sigma_T$ ;  $\sigma_2 > \sigma_T$ ). Тогда согласно (17.9)

$$\sigma_1 = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda \sigma_T + E_T \varepsilon_2.$$

Отсюда с учётом (18.4) находим

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \lambda \sigma_T}{E_T}; \quad (18.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \lambda \sigma_T}{E_T} = \frac{\frac{P}{F} - \sigma_1 - \lambda \sigma_T}{E_T}. \quad (18.8)$$

Внесём выражения (18.7) и (18.8) в уравнение (18.6):

$$\frac{l_1}{E_T} (\sigma_1 - \lambda \sigma_T) = \frac{l_2}{E_T} \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 - \lambda \sigma_T \right)$$

или

$$\sigma_1 (l_1 + l_2) = l_2 \left( \frac{P}{F} - \lambda \sigma_T \right) + \lambda \sigma_T l_1.$$

Отсюда с учётом (18.4) устанавливаем

$$\sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} + \lambda \sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}; \quad (18.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} - \sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} \frac{l_1}{l_2} - \lambda \sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}. \quad (18.10)$$

Полученные выражения для напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  совпадают с результатами, найденными прежде (см. формулы (17.11) и (17.12)).

II. *Решение задачи с помощью принципа минимума дополнительной работы деформации.* На этот раз обратимся к принципу минимума дополни-

тельной работы деформации, предполагая тем самым, что нагрузка, приложенная к стержню, не изменяется.

Выражение для дополнительной работы деформации в нашем случае имеем вид

$$R^* = \int_V \Phi^* dV = \int_{V_1} \Phi_1^* dV + \int_{V_2} \Phi_2^* dV = \Phi_1^* Fl_1 + \Phi_2^* Fl_2, \quad (18.11)$$

где в силу несжимаемости материала стержня

$$\Phi^* = \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i d\sigma_i. \quad (18.12)$$

Предположим, что оба участка стержня работают за пределами упругости ( $\sigma_1 > \sigma_T$ ;  $\sigma_2 > \sigma_T$ ). Согласно (18.12) значения функций  $\Phi_1^*$  и  $\Phi_2^*$  равны заштрихованным на рисунке 18.1 площадям:

$$\Phi_1^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon_i d\sigma_i = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_T + \varepsilon_1}{2} (\sigma_1 - \sigma_T) = \frac{1}{2} \varepsilon_T \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 (\sigma_1 - \sigma_T); \quad (18.13)$$

$$\Phi_2^* = \int_0^{\sigma_2} \varepsilon_i d\sigma_i = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_T + \varepsilon_2}{2} (\sigma_2 - \sigma_T) = \frac{1}{2} \varepsilon_T \sigma_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 (\sigma_2 - \sigma_T). \quad (18.14)$$

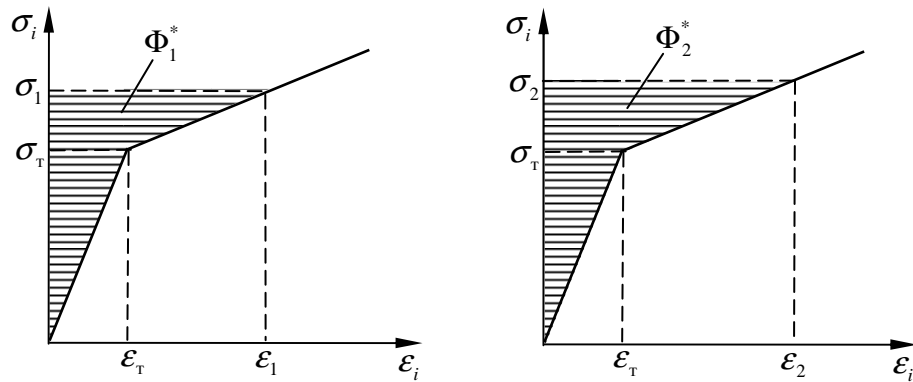


Рисунок 18.1 – К определению значений функций  $\Phi_1^*$  и  $\Phi_2^*$

Внося (18.7) в соотношение (18.13), имеем

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2} \varepsilon_T \sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \lambda \sigma_T}{2E_T} (\sigma_1 - \sigma_T) = \frac{\sigma_1^2}{2E_T} + \frac{1}{2E_T} [\sigma_1^2 - (1 + \lambda) \sigma_T \sigma_1 + \lambda \sigma_T^2]$$

или

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2E_T} (\sigma_1^2 - 2\lambda \sigma_T \sigma_1 + \lambda \sigma_T^2). \quad (18.15)$$



Для второго участка стержня аналогично находим

$$\Phi_2^* = \frac{1}{2E_T} (\sigma_2^2 - 2\lambda\sigma_T\sigma_2 + \lambda\sigma_T^2).$$

Согласно (18.4)

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} - \sigma_1.$$

С учётом этого предыдущее выражение примет вид

$$\Phi_2^* = \frac{1}{2E_T} \left[ \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^2 - 2\lambda\sigma_T \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right) + \lambda\sigma_T^2 \right]. \quad (18.16)$$

Подставляя выражения (18.15) и (18.16) в соотношение (18.11), имеем

$$R^* = \frac{Fl_1}{2E_T} (\sigma_1^2 - 2\lambda\sigma_T\sigma_1 + \lambda\sigma_T^2) + \frac{Fl_2}{2E_T} \left[ \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^2 - 2\lambda\sigma_T \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right) + \lambda\sigma_T^2 \right]. \quad (18.17)$$

Таким образом,  $R^*$  является функцией лишь  $\sigma_1$ . Учитывая это, составим условие минимума данной функции:

$$\frac{dR^*}{d\sigma_1} = \frac{Fl_1}{2E_T} (2\sigma_1 - 2\lambda\sigma_T) + \frac{Fl_2}{2E_T} \left[ -2 \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right) + 2\lambda\sigma_T \right] = 0$$

или

$$\sigma_1(l_1 + l_2) = \lambda\sigma_T(l_1 - l_2) + \frac{P}{F}l_2.$$

Отсюда с учётом (18.4) устанавливаем

$$\sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} + \lambda\sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}; \quad (18.18)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} - \sigma_1 = \frac{\frac{P}{F} \frac{l_1}{l_2} - \lambda\sigma_T \left( \frac{l_1}{l_2} - 1 \right)}{1 + \frac{l_1}{l_2}}. \quad (18.19)$$

Результат совпадает с полученным ранее решением.

Для определения перемещения сечения, в котором приложена сила, воспользуемся теоремой Кастильяно:

$$u_0 = \frac{dR^*}{dP}. \quad (18.20)$$

Используя выражение (18.17), имеем

$$u_0 = \frac{dR^*}{dP} = \frac{Fl_1}{E_T}(\sigma_1 - \lambda\sigma_T)\frac{d\sigma_1}{dP} + \frac{Fl_2}{E_T}\left[\left(\frac{P}{F} - \sigma_1\right)\left(\frac{1}{F} - \frac{d\sigma_1}{dP}\right) - \lambda\sigma_T\left(\frac{1}{F} - \frac{d\sigma_1}{dP}\right)\right].$$

Согласно (18.18)

$$\frac{d\sigma_1}{dP} = \frac{1}{F\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)};$$

$$\frac{1}{F} - \frac{d\sigma_1}{dP} = \frac{1}{F}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{l_1}{l_2}}\right).$$

После тождественных преобразований окончательно получим

$$u_0 = \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_T}{E_T\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}, \quad (18.21)$$

что совпадает с формулой (17.10).

## 19 ПОЛЗУЧЕСТЬ БАЛКИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Рассмотрим чистый изгиб балки с произвольным поперечным сечением, имеющим одну ось симметрии (рисунок 19.1). Предположим, что изгибающий момент может изменяться с течением времени, т.е.  $M = M(t)$ .

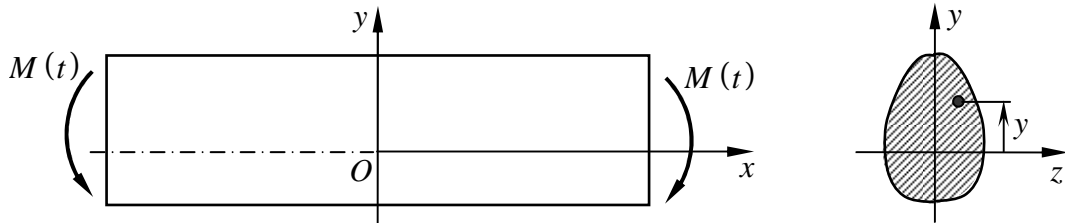


Рисунок 19.1 – Чистый изгиб балки

При изгибе относительные удлинения волокон согласно кинематической гипотезе плоских сечений выражаются как

$$\varepsilon = \kappa y = \frac{y}{\rho}, \quad (19.1)$$

где  $\kappa = 1/\rho$  – кривизна изогнутой оси балки;  $\rho$  – её радиус кривизны.

Запишем уравнение Кельвина:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = H\varepsilon + nE\dot{\varepsilon}, \quad (19.2)$$

где  $E$  – мгновенный модуль упругости;  $H$  – длительный модуль упругости (причём  $H < E$ );  $n$  – время релаксации. Здесь точкой обозначена производная по времени.

Подставляя (19.1) в уравнение (19.2), получим

$$\sigma + n\dot{\sigma} = H\kappa y + nE\dot{\kappa} y. \quad (19.3)$$

Умножим левую и правую части данного равенства на  $y$  и проинтегрируем по площади поперечного сечения балки  $F$ :

$$\int_F \sigma y dF + n \int_F \dot{\sigma} y dF = H\kappa \int_F y^2 dF + nE\dot{\kappa} \int_F y^2 dF.$$

Учитывая, что

$$\int_F \sigma y dF = M(t); \quad \int_F y^2 dF = I_z = I,$$

предыдущее уравнение примет вид

$$M + n\dot{M} = HI\kappa + nEI\dot{\kappa}. \quad (19.4)$$

Это основное дифференциальное уравнение задачи о ползучести балки при чистом изгибе. С его помощью можно определить изменение кривизны изогнутой оси балки с течением времени  $\kappa(t)$ .

Пусть  $M = M_0 = const$ , тогда  $\dot{M} = 0$ , и из уравнения (19.4) получим

$$M_0 = I(H\kappa + nE\dot{\kappa})$$

или

$$\dot{\kappa} + \frac{H}{nE}\kappa = \frac{M_0}{nEI}. \quad (19.5)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\kappa = Ce^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{M_0}{HI}. \quad (19.6)$$

При  $t = 0$  имеем

$$\kappa = \kappa(0) = \frac{M_0}{EI},$$

тогда согласно (19.6)

$$\frac{M_0}{EI} = C + \frac{M_0}{HI},$$

откуда

$$C = \frac{M_0}{EI} - \frac{M_0}{HI} = -\frac{M_0}{EI} \left( \frac{E}{H} - 1 \right).$$

Подставляя найденную постоянную в (19.6), устанавливаем

$$\kappa(t) = \frac{M_0}{HI} - \frac{M_0}{EI} \left( \frac{E}{H} - 1 \right) e^{-\frac{H}{nE}t}. \quad (19.7)$$

Отсюда следует, что при  $t \rightarrow \infty$  кривизна  $\kappa \rightarrow \frac{M_0}{HI}$  (рисунок 19.2).

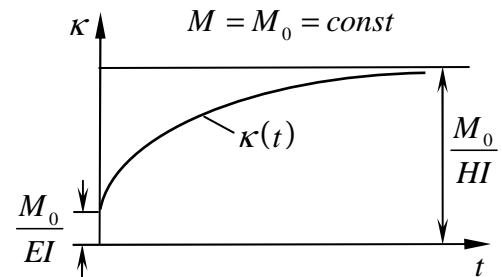


Рисунок 19.2 – Изменение кривизны

Подставим решение (19.7) в дифференциальное уравнение (19.3):

$$\sigma + n\dot{\sigma} = y \left[ \frac{M_0}{I} - \frac{M_0}{EI} (E - H) e^{-\frac{H}{nE}t} + nE \frac{M_0}{EI} \left( \frac{E}{H} - 1 \right) \frac{H}{nE} e^{-\frac{H}{nE}t} \right]$$

или

$$\sigma + n\dot{\sigma} = \frac{M_0}{I} y. \quad (19.8)$$

Правая часть уравнения (19.8) не зависит от времени. Это означает, что напряжения  $\sigma$  также не зависят от времени и выражаются формулой

$$\sigma = \frac{M_0}{I} y.$$

Таким образом, ползучесть сказывается только на кривизне изогнутой оси балки.

Пусть теперь  $M = M(t)$ . Перепишем уравнение (19.4) в виде

$$\dot{\kappa} + \frac{H}{nE} \kappa = \frac{M}{nEI} + \frac{\dot{M}}{EI}. \quad (19.9)$$

Если задан закон изменения момента  $M(t)$ , то будет известна и правая часть этого уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения (19.9) можно записать в виде суммы общего решения однородного уравнения  $\kappa^0$  и частного решения неоднородного уравнения  $\kappa$ :

$$\kappa = \kappa^0 + \kappa,$$

где

$$\kappa^0 = C e^{-\frac{H}{nE} t}.$$

Для отыскания  $\kappa$  воспользуемся методом вариации постоянных:

$$\begin{aligned} \kappa &= D(t) e^{-\frac{H}{nE} t}; \\ \frac{d\kappa}{dt} &= -\frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE} t} + \frac{dD}{dt} e^{-\frac{H}{nE} t}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение (19.9):

$$\begin{aligned} -\frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE} t} + \frac{dD}{dt} e^{-\frac{H}{nE} t} + \frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE} t} &= \frac{M}{nEI} + \frac{1}{EI} \frac{dM}{dt}; \\ \frac{dD}{dt} &= \left( \frac{M}{nEI} + \frac{1}{EI} \frac{dM}{dt} \right) e^{\frac{H}{nE} t}, \end{aligned}$$

откуда

$$D(t) = \frac{1}{EI} \int_0^t \left( \frac{M}{n} + \frac{dM}{d\tau} \right) e^{\frac{H}{nE} \tau} d\tau.$$

Выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^t \overbrace{e^{\frac{H}{nE}\tau}}^U \underbrace{\frac{dM}{d\tau}}_{dV} d\tau = \left[ \int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU \right] = M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} \Big|_0^t - \frac{H}{nE} \int_0^t M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau =$$

$$= M(t) e^{\frac{H}{nE}t} - M(0) - \frac{H}{nE} \int_0^t M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau.$$

Тогда

$$D(t) = \frac{1}{nEI} \int_0^t M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau - \frac{H}{nE^2 I} \int_0^t M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau + \frac{M(t)}{EI} e^{\frac{H}{nE}t} - \frac{M(0)}{EI} =$$

$$= \frac{1}{nEI} \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \int_0^t M(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau + \frac{M(t)}{EI} e^{\frac{H}{nE}t} - \frac{M(0)}{EI}.$$

Таким образом, для решения уравнения (19.8) получим

$$\kappa(t) = C e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{M(t)}{EI} + \frac{1}{nEI} \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \int_0^t M(\tau) e^{-\frac{H}{nE}(t-\tau)} d\tau.$$

Начальное условие

$$\kappa(0) = \frac{M(0)}{EI},$$

откуда

$$\frac{M(0)}{EI} = C + \frac{M(0)}{EI} \quad \text{и} \quad C = 0.$$

Тогда окончательно устанавливаем

$$\kappa(t) = \frac{M(t)}{EI} + \frac{1}{nEI} \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \int_0^t M(\tau) e^{-\frac{H}{nE}(t-\tau)} d\tau. \quad (19.10)$$

При этом для напряжения получается следующая формула:

$$\sigma = \frac{M(t)}{I} y. \quad (19.11)$$

## 20 ПОЛЗУЧЕСТЬ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрим стержень круглого сечения радиусом  $R$ , под действием крутящего момента  $M(t)$ , который может изменяться во времени (рисунок 20.1).

Уравнение Кельвина для касательных напряжений имеем вид

$$\tau + n\dot{\tau} = H_1 \gamma + nG\dot{\gamma}, \quad (20.1)$$

где  $E$  – мгновенный модуль сдвига;  $H_1$  – длительный модуль сдвига (причём  $H_1 < G$ ).

Как известно, угол сдвига выражается как

$$\gamma = \alpha r, \quad (20.2)$$

где  $r$  – радиус-вектор точки сечения стержня;  $\alpha = d\theta/dx$  – относительный угол закручивания.

Тогда

$$\dot{\gamma} = \dot{\alpha} r.$$

При этом уравнение (20.1) примет следующий вид:

$$\tau + n\dot{\tau} = H_1 \alpha r + nG\dot{\alpha} r. \quad (20.3)$$

Умножим левую и правую части данного равенства на  $r$  и проинтегрируем по площади поперечного сечения стержня  $F$ :

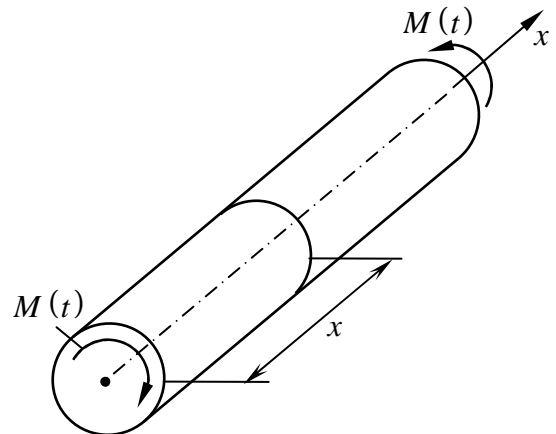
$$\int_F \tau r dF + n \int_F \dot{\tau} r dF = H_1 \alpha \int_F r^2 dF + nG\dot{\alpha} \int_F r^2 dF.$$

Учитывая, что

$$\int_F \tau r dF = M(t); \quad \int_F r^2 dF = I_\rho,$$

предыдущее уравнение запишется как

$$M + n\dot{M} = H_1 I_\rho \alpha + nGI_\rho \dot{\alpha}. \quad (20.4)$$



**Рисунок 20.1 – Круглый стержень, нагруженный крутящим моментом**

Если известен закон изменения крутящего момента по времени  $M(t)$ , то из (20.4) может быть получена зависимость относительного угла закручивания стержня от времени  $\alpha(t)$ .

Пусть  $M = M_0 = const$ , тогда  $\dot{M} = 0$ , и из уравнения (20.4) получим

$$M_0 = I_\rho (H_1 \alpha + nG \dot{\alpha})$$

или

$$\dot{\alpha} + \frac{H_1}{nG} \alpha = \frac{M_0}{nGI_\rho}. \quad (20.5)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\alpha = C e^{-\frac{H_1 t}{nG}} + \frac{M_0}{H_1 I_\rho}. \quad (20.6)$$

При  $t = 0$  имеем

$$\alpha = \alpha(0) = \frac{M_0}{GI_\rho},$$

тогда согласно (20.6)

$$\frac{M_0}{GI_\rho} = C + \frac{M_0}{H_1 I_\rho},$$

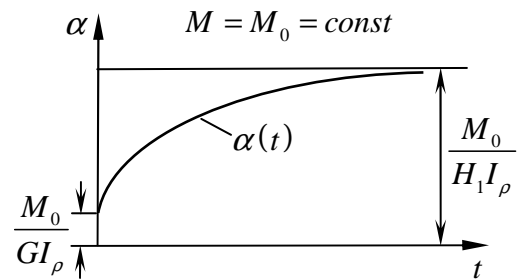
откуда

$$C = \frac{M_0}{GI_\rho} - \frac{M_0}{H_1 I_\rho} = -\frac{M_0}{GI_\rho} \left( \frac{G}{H_1} - 1 \right).$$

Подставляя данное выражение в (20.6), устанавливаем

$$\alpha = \frac{M_0}{H_1 I_\rho} - \frac{M_0}{GI_\rho} \left( \frac{G}{H_1} - 1 \right) e^{-\frac{H_1 t}{nG}}. \quad (20.7)$$

Видно, что при  $t \rightarrow \infty$  относительный угол закручивания стремится к  $\frac{M_0}{H_1 I_\rho}$  (рисунок 20.2).



**Рисунок 20.2 – Изменение относительного угла закручивания**

Подставим решение (20.7) в дифференциальное уравнение (20.3):

$$\tau + n\dot{\tau} = r \left[ \frac{M_0}{I_\rho} - \frac{M_0}{GI_\rho} (G - H_1) e^{-\frac{H_1 t}{nG}} + nG \frac{M_0}{GI_\rho} \left( \frac{G}{H_1} - 1 \right) \frac{H_1}{nG} e^{-\frac{H_1 t}{nG}} \right]$$



или

$$\tau + n\dot{\tau} = \frac{M_0}{I_\rho} r. \quad (20.8)$$

Правая часть уравнения (20.8) не зависит от времени. Отсюда следует, что касательные напряжения неизменны во времени и равны

$$\tau = \frac{M_0}{I_\rho} r.$$

Таким образом, ползучесть сказывается только на угле закручивания стержня.

Пусть теперь сечение стержня  $x=0$  закреплено, а сечение  $x=l$  закручено на некоторый угол  $\theta_0$  и оставлено в этом положении, так что

$$\alpha_0 = \frac{\theta_0}{l} = const; \quad \dot{\alpha} = 0.$$

При этом уравнение (20.4) примет вид

$$M + n\dot{M} = H_1 I_\rho \alpha_0.$$

или

$$\dot{M} + \frac{1}{n}M = \frac{H_1 I_\rho}{n} \alpha_0. \quad (20.9)$$

Его решение представим как сумму общего решения однородного уравнения  $M^0$  и частного решения неоднородного уравнения  $M^\epsilon$ :

$$M = M^0 + M^\epsilon.$$

Решение однородного уравнения будем искать в виде  $e^{kt}$ . Получаем характеристическое уравнение

$$k + \frac{1}{n} = 0, \quad \text{откуда} \quad k = -\frac{1}{n}.$$

Тогда

$$M^0 = C e^{-\frac{1}{n}t}.$$

Если принять  $M^\epsilon = const$ , то из уравнения (20.9) получаем

$$M^\epsilon = H_1 I_\rho \alpha_0.$$

Таким образом,

$$M(t) = Ce^{-\frac{1}{n}t} + H_1 I_\rho \alpha_0. \quad (20.10)$$

Пусть при  $t = 0$  имеем

$$M = M(0) = GI_\rho \alpha_0,$$

тогда согласно (20.10)

$$GI_\rho \alpha_0 = C + H_1 I_\rho \alpha_0,$$

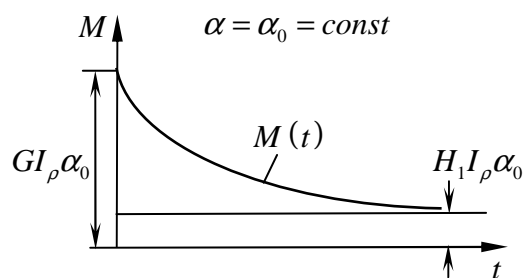
откуда

$$C = (G - H_1) I_\rho \alpha_0.$$

Подставляя данное значение в (20.10), получаем

$$M(t) = (G - H_1) I_\rho \alpha_0 e^{-\frac{1}{n}t} + H_1 I_\rho \alpha_0. \quad (20.11)$$

Видно, что при  $t \rightarrow \infty$  крутящий момент стремится к  $H_1 I_\rho \alpha_0$  (рисунок 20.3).



**Рисунок 20.3 – Изменение крутящего момента**