

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕ-  
ДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕ-  
НИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
(СГАУ)**

**Факультет летательных аппаратов**

**Кафедра космического машиностроения**

Л.М. Савельев, С.А. Чернякин

Методические указания к практическим занятиям по курсу

«Вариационные методы в механике деформируемого твёрдого тела»

Электронный ресурс

**Самара 2013г.**

УДК 539.3

В 19

Автор-составитель: **Савельев Леонид Макарович**  
**Чернякин Сергей Алексеевич**

**Вариационные методы в механике деформируемого твёрдого тела**  
[Электронный ресурс] : электрон. методич. указания к практическим занятиям / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост: Л. М. Савельев, С.А. Чернякин. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

© Самарский государственный

аэрокосмический университет, 2013

## Тема «Решение задач изгиба балок методом Ритца»

1. Представим себе консольную балку, нагруженную силой  $P$  на конце. Обозначим через  $u(x)$  прогиб балки на расстоянии  $x$  от заделки. На рисунке 1 показаны различные варианты изогнутой оси балки. Вариант (а), в котором ось балки остаётся недеформированной, а также вариант (в) явно противоречат представлениям об изгибе балки (более вероятный вариант представлен вариантом (б)), но ни одна из этих схем не противоречит условиям закрепления балки.

Истинная функция  $u(x)$  отличается от всех других тем, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба балки. Но её можно отличить по другому признаку: в истинном деформированном состоянии, система обладает наименьшей потенциальной энергией. При вычислении потенциальной энергии необходимо прежде всего условиться о начальном состоянии, в котором энергия принимается равной нулю. В качестве такового удобнее всего взять состояние, изображённое на рисунке 1(а).

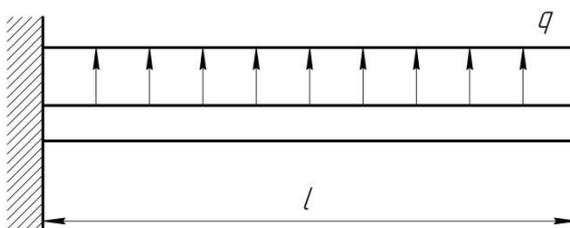


Рисунок 1

Потенциальная энергия упругой системы включает в себя не только энергию внешних нагрузок, но также и внутреннюю энергию деформации, которая обусловлена изменением взаимного положения точек тела, сопровождающимся появлением внутренних усилий. Для балки, например, потенциальная энергия деформации  $U$  определяется кривизной изогнутой оси и может быть подсчитана по формуле, известной из курса сопротивления материалов:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx,$$

где  $EJ$  – изгибная жёсткость балки (в общем случае переменная по толщине).

Для показанной на рисунке 1 балки изменение потенциальной энергии силы  $P$  составит величину  $-Pu(l)$ , а полная энергия деформированной системы будет

$$V = U - Pu(l).$$

Предположим теперь, что на основании опыта или в результате анализа имеющихся решений схожих задач мы можем ориентировочно предсказать закон деформирования тела. Так, например, для рассмотренного выше случая консольной балки можно сразу сказать, что изогнутая ось будет соответствовать рисунку 1 (б), но не рисунку 1 (в). Не составляет особого труда подобрать подходящую функцию  $u(x)$ , описывающую ожидаемый закон деформирования. Приведём для примера две функции, которые можно использовать для описания кривой, показанной на рисунке 1 (б):

$$u(x) = C \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (1a)$$

$$u(x) = Cx^2. \quad (1б)$$

Здесь  $C$  – неизвестный коэффициент. В методе Ритца он подбирается таким образом, чтобы при выбранном законе изменения  $u(x)$  энергия системы была минимальна.

Отметим, что при выборе функций типа (1) требуется выполнить одно условие: функция должна точно соответствовать заданным условиям закрепления тела. В данном примере балка жёстко закреплена на левом конце, и поэтому при  $x = 0$  равны нулю её прогиб и угол поворота сечения. Следовательно, условия закрепления балки требуют, чтобы соблюдались равенства

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Нетрудно проверить, что обе функции (1) удовлетворяют этим требованиям.

Рассмотрим теперь процедуру метода Ритца на примере функции (1а). Так как

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\pi^2}{4l^2} C \cos \frac{\pi x}{2l},$$

то в случае  $EJ = \text{const}$  имеем

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{\pi^2}{4l^2} C \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EJ}{64l^3} C^2.$$

Учитывая также, что  $u(l) = C$ , находим

$$V = U - Pu(l) = \frac{\pi^4 EJ}{64l^3} C^2 - PC.$$

Мы получили выражение для полной энергии системы как функции параметра  $C$ . Чтобы энергия системы была минимальна, необходимо приравнять к нулю производную  $dV/dC$ . Это даёт уравнение

$$\frac{\pi^4 EJ}{32l^3} C - P = 0,$$

из которого определяется параметр  $C$ :

$$C = \frac{32 Pl^3}{\pi^4 EJ} \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

которое представляет собой приближённое решение задачи. В этом приближённом решении прогиб балки на свободном конце оказывается равным

$$u(l) = \frac{32 Pl^3}{\pi^4 EJ} = 0,329 \frac{Pl^3}{EJ},$$

что составляет 98% от известного точного значения

$$\frac{Pl^3}{3EJ}$$

Изгибающий момент, связанный с функцией  $u(x)$  соотношением

$$M = EJ \frac{d^2u}{dx^2},$$

в этом решении будет

$$M(x) = \frac{8}{\pi^2} Pl \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

В частности, в заделке (при  $x = 0$ )

$$M(0) = \frac{8}{\pi^2} Pl = 0,811Pl,$$

что на 19% меньше истинного значения равного  $Pl$ .

Точность полученного приближённого решения зависит от того насколько удачно выбрана функция. Так если взять выражение для  $u(x)$  в виде (1б), то для максимального прогиба получим значение  $Pl^3/4EJ$ , что на 25% меньше точного значения; ещё большая ошибка получается при этом для изгибающего момента.

Для уточнения решения можно к исходным выражениям (1) добавить новые функции с произвольными множителями, причём ни одна из этих функций не должна противоречить заданным условиям закрепления. Так, вместо (1а) и (1б) можно взять соответственно функции

$$u(x) = C_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) + C_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l}\right) + C_3 \left(1 - \cos \frac{5\pi x}{2l}\right) + \dots \quad (2а)$$

$$u(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4 + \dots \quad (2б)$$

Здесь каждая из функций  $1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$  или  $x^n$  удовлетворяет условию заделки на левом конце. Параметры  $C_1, C_2, C_3 \dots$  следует подобрать так, чтобы энергия системы имела наименьшее значение. Подставляя  $u(x)$  в формулу для полной энергии системы, можно после выполнения интегрирования выразить  $V$  как функцию постоянных  $C_1, C_2, C_3 \dots$ . Для отыскания  $C_i$  используются необходимые условия минимума функции нескольких переменных

$$\frac{\partial V}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial C_2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial C_3} = 0,$$

которые приводят к системе линейных уравнений относительно  $C_i$ . Трудоёмкость вычислений резко возрастает с увеличением числа параметров, и поэтому на практике редко берут более двух-трёх членов в выражениях типа (2).

Следует отметить, что если в выражение для  $u(x)$  включены те функции, из которых может быть составлено точное решение, то метод Ритца всегда приводит именно к точному решению. Так, если в (2б) удержано более двух первых членов, то все коэффициенты, начиная с  $C_3$ , окажутся нулевыми, а для  $C_1$  и  $C_2$  будем иметь

$$C_1 = \frac{Pl}{2EJ}, \quad C_2 = -\frac{P}{6EJ},$$

что соответствует точному решению

$$u(x) = \frac{P}{6EJ} (3l - x)x^2.$$

### **Тема «Расчёт балки Тимошенко методом Ритца»**

В соответствии с методом Ритца перемещение балки  $u_y$  будем искать в виде суммы

$$u_y(x) = \sum_{k=1}^n a_k v_k(x).$$

Здесь  $v_k(x)$  – базисные функции которые мы должны выбрать заранее, чтобы выполнялись геометрические граничные условия:

$$x = 0, \quad u_y = 0, \quad \frac{du_y}{dx} = 0,$$

$$x = l, \quad M(l) = 0, \quad Q(l) = 0.$$

Полная энергия системы записывается в виде

$$V = U + \Pi = \frac{E}{2} \int_0^l J u_y''^2 dx - \int_0^l q_y u_y dx.$$

Подставим в данное выражение  $u_y(x)$ , тогда получим следующую формулу

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \sum_{k=1}^n a_k v_k''(x) \right)^2 dx - \int_0^l q \left( \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right)^2 dx.$$

Неизвестные коэффициенты  $a_k$  будем искать из условия минимума полной энергии системы

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} = EJ \int_0^l \sum_{k=1}^n a_k v_k''(x) v_k''(x) dx - \int_0^l q v_k(x) dx = 0.$$

Запишем это равенство в виде:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot A_{ik} - B_i = 0,$$

где

$$A_{ik} = EJ \int_0^l v_k''(x)v_i''(x)dx,$$

$$B_i = \int_0^l qv_k(x)dx.$$

Данное выражение также можно записать в матричном виде:

$$[A][a] = [B],$$

$$[A] = [A_{ik}],$$

$$[B] = [B_i].$$

Здесь матрица  $[A_{ik}]$  является симметричной матрицей.

Решение задачи по методу Ритца сводится к выбору базисных функций  $v_k(x)$ , вычислению коэффициентов, решая при этом приведённую выше систему линейных уравнений.

Рассмотрим пример представленный на рисунке 2.

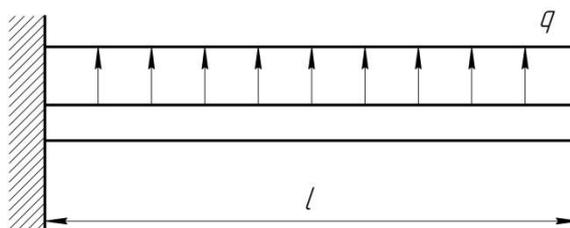


Рисунок 2

Граничные условия:

$$x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_y' = 0,$$

$$x = l, \quad u_y'' = 0, \quad u_y''' = 0.$$

По методу Ритца требуется удовлетворение лишь геометрических граничных условий, то будем искать решение поставленной задаче в виде

$$\tilde{u}_y(x) = \sum_{k=1}^n a_k v_k(x).$$

Так как  $a_k$  находятся из условия минимума полной энергии системы то в качестве  $v_k(x)$  годятся любые функции. Будем пользоваться степенными функциями

$$v_k(x) = x^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

В первом приближении возьмём лишь один член ряда, тогда решение будет выглядеть как

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 x^2.$$

Далее находя левые и правые части матричного уравнения и решая его получаем

$$A_{11} = EJ \int_0^l v_1''(x)(x)v_1''(x)dx = 4lEJ,$$

$$B_1 = \int_0^l qv_1(x)dx = \frac{l^3q}{3},$$

$$a_1 = \frac{ql^2}{12EJ},$$

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^4}{12EJ}.$$

Точное решение данной задачи равно

$$u_y(x) = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Видно, что приближение полученное таким образом является достаточно грубым. Возьмём теперь два члена разложения

$$\tilde{u}_y(x) = a_1x^2 + a_2x^3.$$

Повторяя проделанные выше вычисления получим

$$A_{11} = 4lEJ,$$

$$B_1 = \frac{l^3q}{3},$$

$$A_{22} = 12lEJ,$$

$$B_2 = \frac{l^3q}{4},$$

$$A_{12} = A_{21} = 6lEJ,$$

$$a_1 = \frac{5ql^2}{24EJ}, \quad a_2 = \frac{ql^2}{12EJ}.$$

Приходим к решению вида:

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{5ql^2}{24EJ}x^2 + \frac{ql^2}{12EJ}x^3.$$

$$\tilde{u}_y(l) = \frac{5ql^2}{24EJ}l^2 + \frac{ql^2}{12EJ}l^3 = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

которое совпадает с точным.

Исходя из полученного решения для изгибающего момента имеем:

$$M = EJ u_y'' = EJ \left( \frac{5ql^2}{12} - \frac{ql}{12EJ} 6x \right) = EJ \frac{ql^2}{12} \left( 5 - \frac{6x}{l} \right).$$

**Тема «Приближённое решение задач изгиба пластин»**

Потенциальная энергия пластины в общем случае выражается через перемещения формулой

$$V(w) = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint p w dx dy. \quad (3)$$

Возьмём функцию прогибов в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y) \quad (4)$$

так, чтобы удовлетворялись все геометрические условия задачи.

Для определения коэффициентов  $a_i$  воспользуемся условием экстремума полной энергии:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Мы получим  $n$  уравнений для определения опёртой по контуру прямоугольной пластинки (рисунок 3) при задании функции прогибов в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

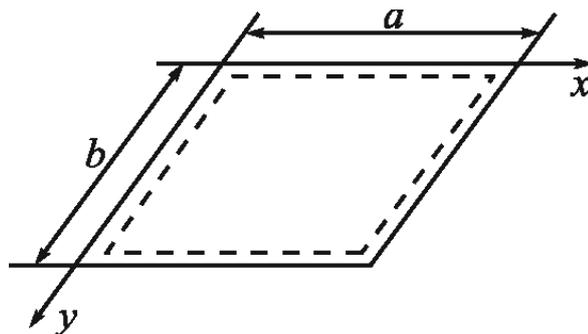


Рисунок 3

После подстановки данного ряда в выражение полной энергии (3), интегрирования и преобразований получим:

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \int_0^a \int_0^b p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Дифференцирование по коэффициентам  $a_{mn}$  даст нам следующее:

$$\frac{\pi^4 ab}{8} D a_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Если  $p = const$ , то интеграл обращается в нуль для чётных значений  $m$  и  $n$ , а для нечётных он равен  $4ab/\pi^2 mn$ . Поэтому получим:

$$a_{mn} = \frac{16p}{\pi^6 D mn \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} (m, n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставим значения коэффициентов  $a_{mn}$  в уравнение прогибов:

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2}.$$

Если в данной формуле взять бесконечно большое число членов, то получим решение задачи, совпадающее с точным.

Ограничившись одним членом ряда, имеем для  $m=1, n=1$ :

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{1 \cdot 1 \cdot \left( \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right)^2}. \quad (5)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2},$$

из формулы (5) получим:

$$w_{11}^{max} = \frac{16p}{\pi^6 D \left( \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right)^2}.$$

Для квадратной пластинки ( $a=b$ ) максимальный прогиб

$$w_{11}^{max} = \frac{4pa^4}{\pi^6 D}.$$

Для коэффициента Пуассона  $\mu = 0,3$  после подстановки выражения цилиндрической жёсткости получим

$$w_{11}^{max} = 0,0455 \frac{4pa^4}{h^6 E},$$

где  $E$  – модуль упругости материала.

Точное же решение даёт

$$w_{11}^{max} = 0,0443 \frac{4pa^4}{h^6 E},$$

т.е. погрешность составляет 2,7%.

Изгибающие погонные моменты определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\}$$

Максимальные изгибающие моменты действуют в центре пластинки ( $x = a/2, y = b/2$ ), для квадратной пластинки ( $a=b$ )

$$M_x^{max} = M_y^{max} = \frac{4pa^2}{\pi^4} (1 + \mu) = 0,0535pa^2.$$

Точное значение максимальных изгибающих моментов для квадратной пластинки:

$$M_x^{max} = M_y^{max} = 0,0479pa^2.$$

Максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки в первом приближении отличается на 11,7%. Для повышения точности решения необходимо увеличивать количество членов ряда.

### **Тема «Приближённое решение задач об изгибе и кручении тонкостенных стержней»**

Определим нормальные и касательные напряжения в сечениях стержня. Поперечное сечение стержня и расчётная схема представлены на рисунке 4. Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1

$B$ , см	40
$H$ , см	44
$\delta$ , см	1,6
$q$ , кН/м	15
$L$ , м	8
$E$ , ГПа	200
$G$ , ГПа	80

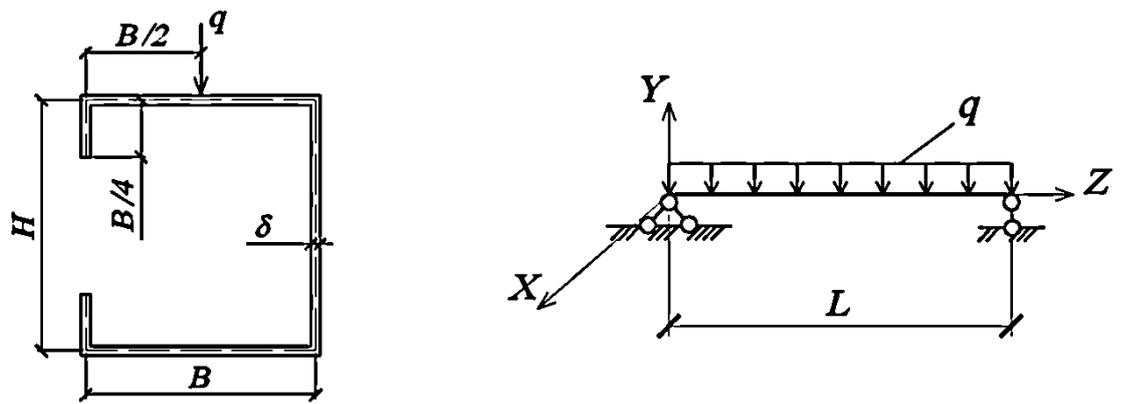


Рисунок 4

1) Определим положение центра тяжести, величину главных центральных моментов инерции поперечного сечения.

Площадь поперечного сечения:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = 2 \cdot 1,6 \cdot 40 + 2 \cdot 1,6 \cdot 10 + 44 \cdot 1,6 = 230,4 \text{ см}^2.$$

Статический момент площади относительно оси  $Y_1$  (рисунок 5) будет равен:

$$S_{Y_1} = \int_A x \cdot dA = -2 \cdot 1,6 \cdot 40 \cdot 20 - 2 \cdot 1,6 \cdot 10 \cdot 40 = -3840 \text{ см}^3.$$

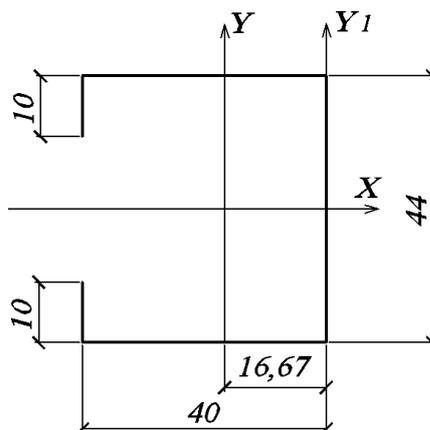


Рисунок 5 – Положение центра тяжести сечения

Координата центра тяжести

$$x_0 = \frac{S_{Y_1}}{A} = -\frac{3840}{230,4} = -16,67 \text{ см};$$

$$y_0 = 0 \text{ см.}$$

Для тонкостенных стержней моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  вычисляем перемножением эпюр линейных координат по правилу Верещагина (при помощи эпюр линейных координат рисунки 6 и 7).

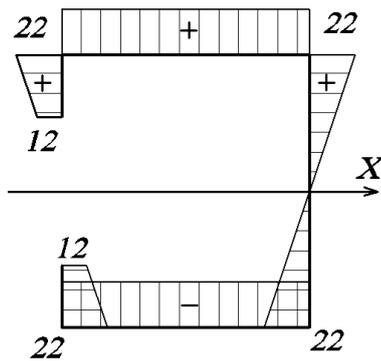


Рисунок 6 – Эпюра момента инерции сечения относительно оси X

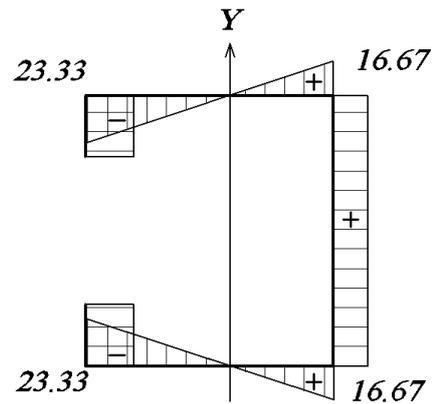


Рисунок 7 – Эпюра момента инерции сечения относительно оси Y

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$J_x = 1,6 \cdot 2 \cdot \left( 22 \cdot 40 \cdot 22 + 22 \cdot \frac{22}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 22 + \right. \\ \left. + \frac{10}{6} (2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 22) \right) = 82824,53 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_l x^2 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$J_y = 1,6 \cdot 2 \cdot \left( 16,67 \cdot 44 \cdot 16,67 + 2 \cdot \frac{16,67^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,67 + \right. \\ \left. + 2 \cdot \frac{23,33^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 23,33 + 2 \cdot 23,33 \cdot 10 \cdot 23,33 \right) = 55466,67 \text{ см}^4;$$

2) Определение положения центра изгиба сечения.

Для определения центра изгиба построим эпюру секториальных площадей с произвольным полюсом  $B$  (рисунок 8).

Секториальная площадь определяется по формуле

$$\omega_B = \int_0^l r dl;$$

$$\omega_{B_1} = 0 \text{ см}^2; \omega_{B_2} = 22 \cdot 40 = 880 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_3} = \omega_{B_2} + 40 \cdot 10 = 1280 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_4} = 0 \text{ см}^2; \omega_{B_5} = -22 \cdot 40 = -880 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_6} = \omega_{B_5} - 40 \cdot 10 = -1280 \text{ см}^2.$$

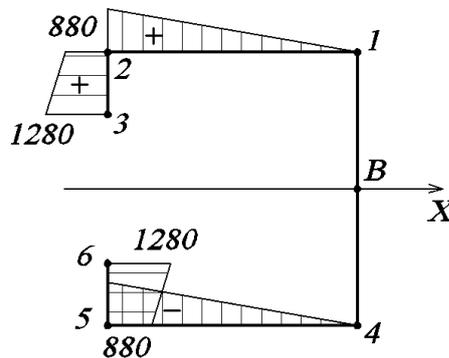


Рисунок 8 – Эпюра секториальных площадей

Секториальный статический момент относительно оси  $X$  вычисляем перемножением эпюр  $\omega_B$  и  $Y$  по формуле

$$S_{\omega x} = \int_A \omega_B \cdot y \cdot dA = \int_A \omega_B \cdot y \cdot \delta \cdot dl;$$

$$S_{\omega x} = 1,6 \cdot 2 \cdot \left( 880 \cdot \frac{40}{2} \cdot 22 + \frac{10}{6} \cdot (2 \cdot 880 \cdot 22 + 2 \cdot 1280 \cdot 12 + 880 \cdot 12 + \right. \\ \left. + 1280 \cdot 22) \right) = 1815893,33 \text{ см}^5.$$

Определим теперь координаты центра изгиба:

$$x_{\text{ц.и.}} = \frac{S_{\omega x}}{J_x} = \frac{1815893,33}{82824,53} = 21,92 \text{ см},$$

$x_{\text{ц.и.}}$  откладываем от полюса  $B$  по оси  $X$ , получаем центр изгиба  $A$  (рисунок 9).

3) Построение эпюры главных секториальных площадей поперечного сечения.

Эпюру главных секториальных площадей поперечного сечения строим, располагая полюс в центре изгиба сечения.

$$\omega_{0_1} = 0 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_2} = -21,92 \cdot 22 = -482,24 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_3} = \omega_{0_2} + 22 \cdot 40 = 397,76 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_4} = \omega_{0_3} + 61,92 \cdot 10 = 1016,96 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_5} = 21,92 \cdot 22 = 482,24 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_6} = \omega_{0_5} - 22 \cdot 40 = -397,76 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_7} = \omega_{0_6} - 61,92 \cdot 10 = -1016,96 \text{ см}^2.$$

Эпюра главных секториальных площадей поперечного сечения представлена на рисунке 9.

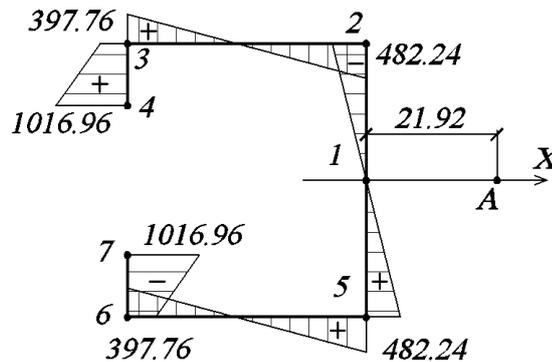


Рисунок 9 – Эпюра главных секториальных площадей поперечного сечения

4) Определим момент инерции при чистом кручении  $J_K$ , секториальный момент инерции  $J_{\omega_0}$  и изгибно-крутильную характеристику  $K$ .

$$J_K = \eta \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \delta_i^3}{3},$$

где  $\eta$  – поправочный коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения (в данном случае он равен 1,12).

$$J_K = 1,12 \cdot \frac{1,6^3}{3} (2 \cdot 10 + 44 + 2 \cdot 40) = 220,2 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} J_{\omega_0} &= \int_l \delta \cdot \omega_0^2 dl = 2 \cdot 1,6 \cdot \frac{482,24 \cdot 22}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 482,24 + \\ &+ \frac{40}{6} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot (2 \cdot 397,76^2 + 2 \cdot 482,24^2 - 2 \cdot 397,76 \cdot 482,24) + \\ &+ \frac{10}{6} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot (2 \cdot 397,76^2 + 2 \cdot 1016,96^2 + 2 \cdot 397,79 \cdot 1016,96) = \\ &= 30979831,5 \text{ см}^6; \end{aligned}$$

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_0}}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 220,2}{200 \cdot 30979831,5}} = 0,0017 \text{ см}^{-1} = 0,17 \text{ м}^{-1}.$$

На рисунке 10 показано расстояние от центра изгиба до линии приложения перерезывающей нагрузки.

$$e = 21,92 + 20 = 41,92 \text{ см};$$

$$m = q \cdot e = 15 \cdot 41,92 \cdot 10^{-2} = 6,288 \text{ кН} \cdot \frac{\text{М}}{\text{М}}$$

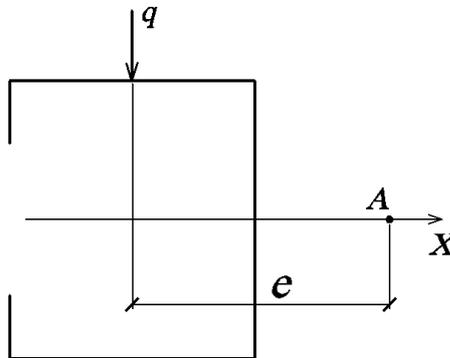


Рисунок 10

Граничные условия для способа закрепления, показанного на рисунке 11, будут следующими

$$\begin{aligned} z = 0; & & z = L; \\ \theta_0 = 0; & & \theta_L = 0; \\ B_{\omega_0} = 0; & & B_{\omega_L} = 0. \\ \theta_0' \neq 0; & & \\ M_{K_0} = \frac{m \cdot L}{2}. & & \end{aligned}$$

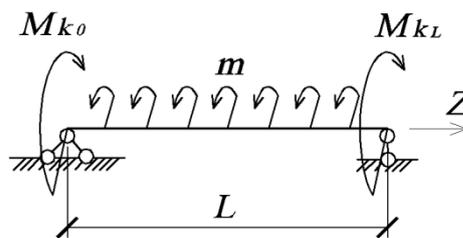


Рисунок 11

При  $z = L$  величина  $\theta_0'$  равна

$$\theta_0' = \left( M_{K_0} \cdot \frac{shKL}{K} - \frac{m}{K^2} (chKL - 1) \right) \cdot \frac{K}{GJ_K \cdot shKL} =$$

$$= \frac{M_{K_0}}{GJ_K} - \frac{m \cdot (chKL - 1)}{K \cdot GJ_K \cdot shKL} = \frac{25,152}{8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7}} -$$

$$- \frac{6,288 \cdot 1,0764}{0,17 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot 1,8198} = 0,143 - 0,124 = 0,019$$

Примем, что бимомент меняется по длине стержня следующим образом

$$B_{\omega_z} = -\theta'_0 \cdot \frac{GJ_K \cdot shKz}{K} + M_{K_0} \cdot \frac{shKz}{K} - \frac{m}{K^2} \cdot (chKz - 1) =$$

$$= -0,019 \cdot \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot shKz}{0,17} + 25,152 \cdot \frac{shKz}{0,17} - \frac{6,288}{0,17^2} (chKz - 1) =$$

$$= -19,688 \cdot shKz + 147,953 \cdot shKz - 217,578 \cdot (chKz - 1);$$

Определим далее ординаты для построения эпюры бимоментов:

$$B_{\omega_0} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_1} = -19,688 \cdot 0,171 + 147,953 \cdot 0,171 - 217,578 \cdot (1,014 - 1) = 18,579;$$

$$B_{\omega_2} = -19,688 \cdot 0,347 + 147,953 \cdot 0,347 - 217,578 \cdot (1,058 - 1) = 31,758;$$

$$B_{\omega_3} = -19,688 \cdot 0,532 + 147,953 \cdot 0,532 - 217,578 \cdot (1,133 - 1) = 39,373;$$

$$B_{\omega_4} = -19,688 \cdot 0,734 + 147,953 \cdot 0,734 - 217,578 \cdot (1,240 - 1) = 41,827.$$

Ввиду симметрии нагрузки эпюра  $B_{\omega_z}$  симметрична, поэтому для ее построения достаточно определить ординаты для половины балки.

Примем, что изгибно-крутящий момент по длине стержня меняется по следующему закону:

$$M_{\omega_z} = -\theta'_0 \cdot GJ_K \cdot chKz + M_{K_0} \cdot chKz - \frac{m}{K} \cdot shKz =$$

$$\begin{aligned}
&= -0,019 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot chKz + 25,152 \cdot chKz - \frac{6,288}{0,17} \cdot shKz = \\
&= -3,347 \cdot chKz + 25,152 \cdot chKz - 36,988 \cdot shKz ;
\end{aligned}$$

Определим далее ординаты для построения эпюры изгибно-крятящих моментов  $M_{\omega}$ :

$$M_{\omega_0} = -3,347 \cdot 1 + 25,152 \cdot 1 = 21,805 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_1} = -3,347 \cdot 1,014 + 25,152 \cdot 1,014 - 36,988 \cdot 0,171 = 15,804 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_2} = -3,347 \cdot 1,058 + 25,152 \cdot 1,058 - 36,988 \cdot 0,347 = 10,261 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_3} = -3,347 \cdot 1,133 + 25,152 \cdot 1,133 - 36,988 \cdot 0,532 = 5,014 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_4} = -3,347 \cdot 1,240 + 25,152 \cdot 1,240 - 36,988 \cdot 0,734 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для определения ординат эпюры  $M_{\omega_x}$  составляем уравнения для половины балки, так как при симметричной нагрузке эпюра  $M_{\omega_x}$  кососимметрична.

Примем, что момент чистого кручения по длине стержня меняется по закону

$$M_{0z} = GJ_K \cdot \theta'_z = \theta'_0 \cdot chKz \cdot GJ_K + \frac{M_{K0} \cdot (1 - chKz) \cdot GJ_K}{GJ_K} -$$

$$-\frac{m \cdot GJ_K}{GJ_K} \left( z - \frac{shKz}{K} \right) = -0,019 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot chKz +$$

$$+ 25,152 \cdot (1 - chKz) - 6,288 \cdot \left( z - \frac{shKz}{0,17} \right) = 3,347 \cdot chKz +$$

$$+ 25,152 \cdot (1 - chKz) - 6,288 \cdot (z - 5,88 \cdot shKz)$$

Определим далее ординаты

$$M_{0_0} = 3,347 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\begin{aligned}
M_{0_1} &= 3,347 \cdot 1,014 + 25,152 \cdot (1 - 1,014) - 6,288 \cdot (1 - 5,88 \cdot 0,171) = \\
&= 3,060 \text{ кН}\cdot\text{м};
\end{aligned}$$

$$M_{0_2} = 3,347 \cdot 1,058 + 25,152 \cdot (1 - 1,058) - 6,288 \cdot (2 - 5,88 \cdot 0,347) =$$

$$= 2,315 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_3} = 3,347 \cdot 1,133 + 25,152 \cdot (1 - 1,133) - 6,288 \cdot (3 - 5,88 \cdot 0,532) = 1,274 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_4} = 3,347 \cdot 1,240 + 25,152 \cdot (1 - 1,240) - 6,288 \cdot (4 - 5,88 \cdot 0,734) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5) Определим ординаты для построения эпюры внешних крутящих моментов  $M_{Kz}$

$$M_{K_0} = M_{K_0} - m \cdot z = \frac{q \cdot e \cdot L}{2} - q \cdot e \cdot z = q \cdot e \cdot \left( \frac{L}{2} - z \right) = 15 \cdot 41,92 \cdot 10^{-2} \cdot (4 - z).$$

Результаты вычислений внутренних усилий сведём в таблицу 2.

Таблица 2

$z$	$Kz$	$shKz$	$chKz$	$B_{\omega_z}$	$M_{Kz}$	$M_{0z}$	$M_{\omega_z}$
0	0	0	1	0	25,152	3,347	21,805
1	0,17	0,171	1,014	18,759	18,864	3,060	15,804
2	0,34	0,347	1,058	31,758	12,576	2,315	10,261
3	0,51	0,532	1,133	39,373	6,288	1,274	5,014
4	0,68	0,734	1,240	41,827	0	0	0
5	0,85	0,956	1,384	-39,373	-6,288	-1,274	-5,014
6	1,02	1,206	1,567	-31,758	-12,576	-2,315	-10,261
7	1,19	1,491	1,796	-18,759	-18,864	-3,060	-15,804
8	1,36	1,820	2,076	0	-25,152	-3,347	-21,805

6) Построим эпюры внутренних усилий

Эпюры приведены на рисунке 12

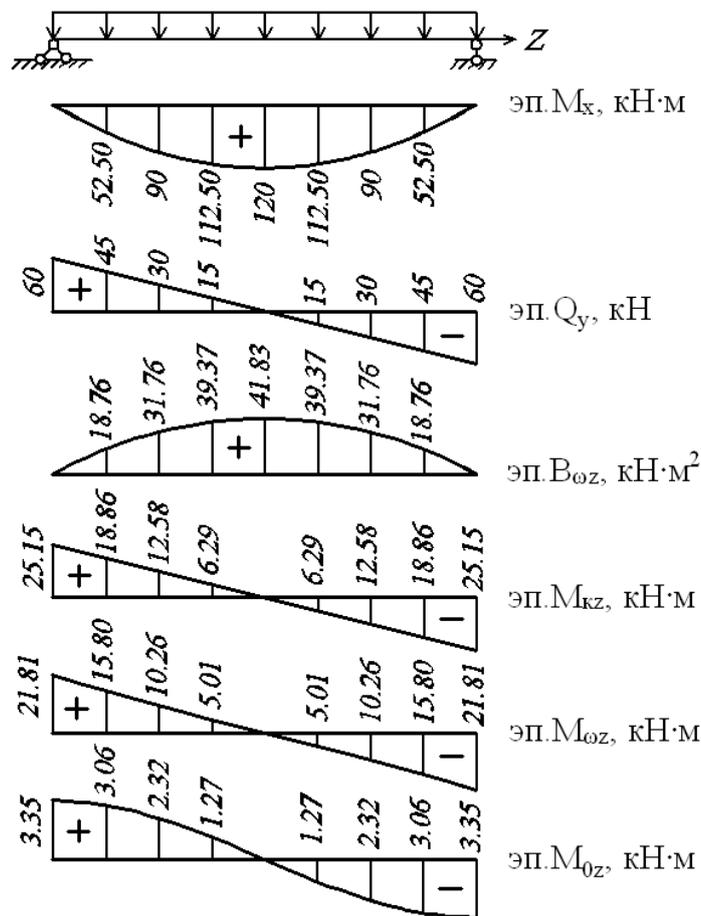


Рисунок 12 – Эпюры внутренних усилий

7) Определим нормальные напряжения в опасном сечении стержня

Нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_\omega = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{B_\omega}{J_\omega} \cdot \omega_0.$$

По эпюрам  $M_x$  и  $B_\omega$  опасным сечением является середина стержня.

$$M_x = 120 \text{ кН·м} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ МН·м};$$

$$B_\omega = 41,827 \text{ кН·м}^2 = 41,827 \cdot 10^{-3} \text{ МН·м}^2;$$

$$J_x = 82824,53 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_\omega = 30979831,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^6;$$

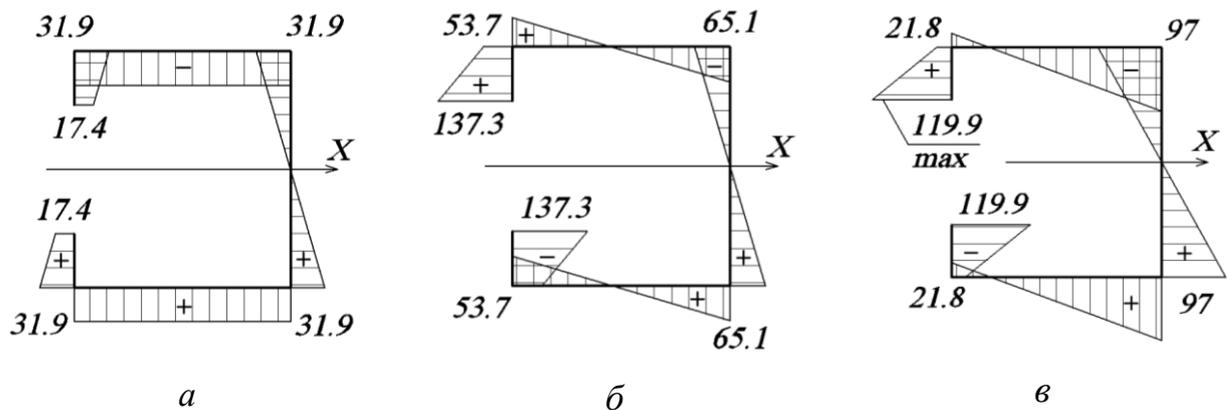
$$\sigma_u = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{82824,53 \cdot 10^{-8}} Y = 1,45 \cdot Y;$$

$$\sigma_\omega = \frac{41,827 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{30979831,5 \cdot 10^{-12}} \omega_0 = 0,135 \cdot \omega_0;$$

Эпюры  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  построены с помощью эпюр  $Y$  и  $\omega_0$ . Эпюру  $\sigma$  получаем суммированием эпюр  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  (рисунок 13, в).

Наибольшие нормальные напряжения

$$\sigma = 137,3 - 17,4 = 119,9 \text{ МПа.}$$



а) эпюра  $\sigma_u$ , МПа;

б) эпюра  $\sigma_\omega$ , МПа;

в) эпюра  $\sigma$ , МПа.

Рисунок 13 – Эпюры нормальных напряжений

8) Определим касательные напряжения в опасном сечении стержня

Касательные напряжения

$$\tau = \tau_u + \tau_{M_\omega} + \tau_{M_0} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{J_x \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} + \frac{M_0}{J_K} \delta.$$

По эпюрам  $Q_x, M_\omega, M_K$  опасным является опорное сечение.

Находим касательные напряжения от изгиба (рисунок 15).

$$\tau_u = \tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_{x_i}^{omc}}{J_x \cdot \delta} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{82824,53 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}} \cdot S_{x_i}^{omc} = 4527,64 \cdot S_{x_i}^{omc},$$

где  $S_{x_i}^{omc}$  - статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $X$ .

$S_{x_i}^{omc}$  считается с помощью рисунок 14.

$$S_{x_1}^{omc} = 0 \text{ м}^3; S_{x_2}^{omc} = 10 \cdot 1,6 \cdot 17 = 272 \text{ см}^3 = 272 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{x_3}^{omc} = S_{x_2}^{omc} + 40 \cdot 1,6 \cdot 22 = 1680 \text{ см}^3 = 1680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{x_4}^{omc} = S_{x_3}^{omc} + 22 \cdot 1,6 \cdot 11 = 2067,2 \text{ см}^3 = 2067,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Остальные ординаты симметричны найденным.

$$\tau_{Q_1} = 0 \text{ МПа}; \tau_{Q_2} = 4527,64 \cdot 272 \cdot 10^{-6} = 1,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_3} = 4527,64 \cdot 1680 \cdot 10^{-6} = 7,61 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_4} = 4527,64 \cdot 2067,2 \cdot 10^{-6} = 9,36 \text{ МПа}.$$

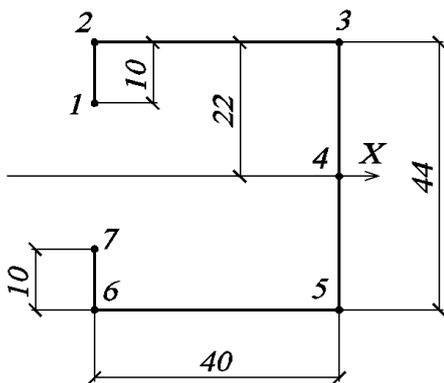


Рисунок 14

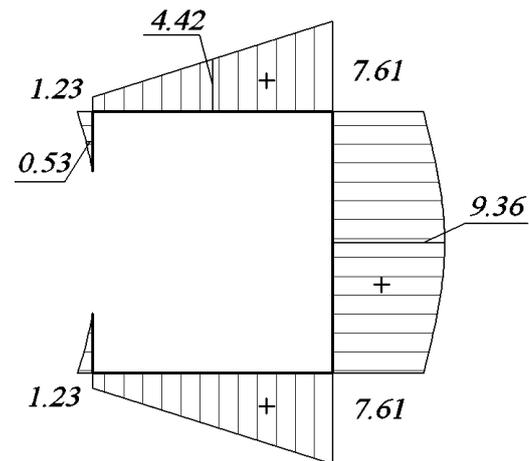


Рисунок 15

Находим напряжения от изгибно-крутящего момента (рисунок 18).

$$\tau_{M_{\omega}} = \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{J_{\omega} \cdot \delta} = \frac{21,805 \cdot 10^{-3} \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{30979831,5 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}} = 43990,31 \cdot S_{\omega_i}^{omc}$$

Эпюра  $S_{\omega_i}^{omc}$  (рисунок 17) строится с помощью эпюры  $\omega_0$  (рисунок 16).

$$S_{\omega_i}^{omc} = \int_{A^{omc}} \omega \cdot dA = \int_{l^{omc}} \omega_0 \cdot \delta dl;$$

$$S_{\omega_1}^{omc} = 0 \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_2}^{omc} = \frac{1016,96 + 397,76}{2} \cdot 1,6 \cdot 10 = 11317,76 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_3}^{omc} = S_{\omega_2}^{omc} + \frac{18,08 \cdot 397,76}{2} \cdot 1,6 = 17070,96 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_4}^{omc} = S_{\omega_3}^{omc} - \frac{21,92 \cdot 482,24}{2} \cdot 1,6 = 8614,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_5}^{omc} = S_{\omega_4}^{omc} - \frac{22 \cdot 482,24}{2} \cdot 1,6 = 126,98 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Касательные напряжения от изгибно-крутящего момента (рисунок 18)

$$\tau_{M_{\omega_1}} = 0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{M_{\omega_2}} = 43990,31 \cdot 11317,76 \cdot 10^{-8} = 4,98;$$

$$\tau_{M_{\omega_3}} = 43990,31 \cdot 17070,96 \cdot 10^{-8} = 7,51;$$

$$\tau_{M_{\omega_4}} = 43990,31 \cdot 8614,4 \cdot 10^{-8} = 3,79;$$

$$\tau_{M_{\omega_5}} = -2782,367 \cdot 126,98 \cdot 10^{-8} = 0,056.$$

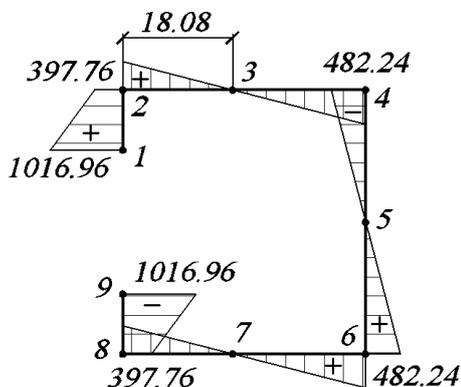


Рисунок 16 - Эпюра  $\omega_0$ , см<sup>2</sup>

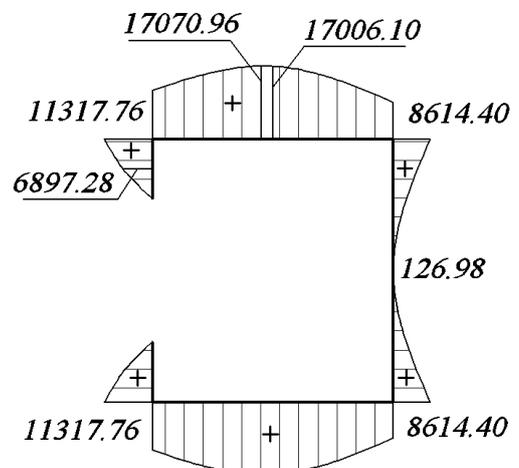


Рисунок 17 - Эпюра  $S_{\omega}^{omc}$ , см<sup>3</sup>

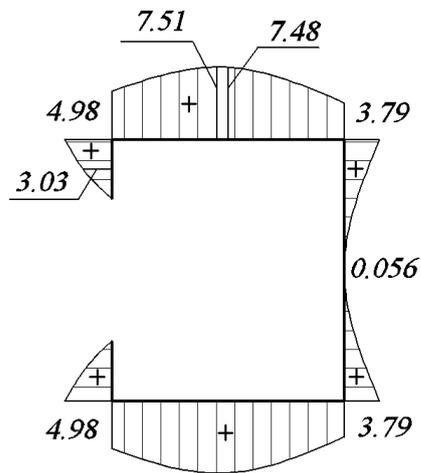


Рисунок 18 - Эпюра  $\tau_\omega$ , МПа

Находим напряжения от чистого кручения в опорном сечении (рисунок 19)

$$\tau_{M_0} = \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta = \frac{3,347 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}}{220,2 \cdot 10^{-8}} = 24,32 \text{ МПа.}$$

Эпюра  $\tau_\omega$  построена с помощью эпюр  $\omega_0$  и  $S_{\omega_i}^{omc}$ . Эпюру  $\tau$  (рисунок 20) получаем суммированием эпюр  $\tau_u$ ,  $\tau_\omega$  и  $\tau_0$ .

Наибольшие касательные напряжения  $\tau$ :

$$\tau = 0,53 + 3,03 + 24,32 = 27,88 \text{ МПа;}$$

$$\tau = 4,42 + 7,48 + 24,32 = 36,22 \text{ МПа;}$$

$$\tau = 9,36 + 0,056 + 24,32 = 33,74 \text{ МПа.}$$

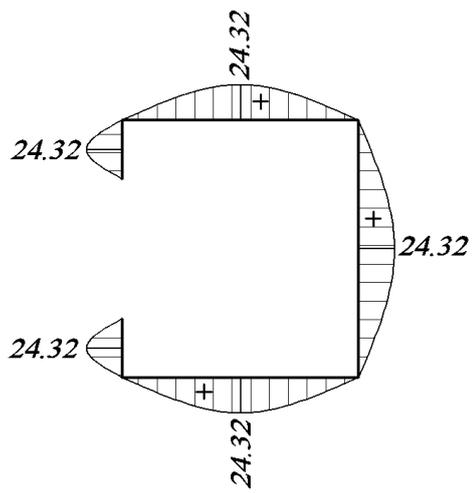


Рисунок 19 - Эпюра  $\tau_0$ , МПа

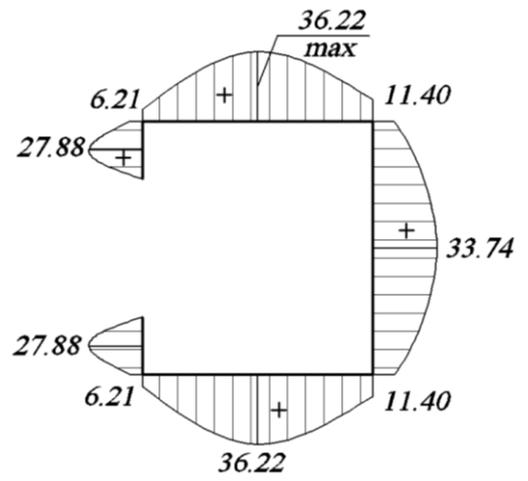


Рисунок 20 - Эпюра  $\tau$ , МПа