

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. Королева»
(национальный исследовательский университет)

А.А.Авраменко

Методические указания

к практическим занятиям по

ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Самара 2010

Автор: Авраменко Александр Алексеевич

В методических указаниях приведены примеры решения задач по основным разделам курса. Рассмотрены задачи по исследованию вынужденных колебаний нелинейных систем, автоколебаний и параметрических колебаний в механических системах с одной и двумя степенями свободы.

Методические указания могут быть использованы при проведении практических занятий по курсу теории нелинейных колебаний, при подготовке к экзамену студентов, обучающихся по магистерской программе «Математическое и компьютерное моделирование космических систем» направлению 010800.68 «Механика и математическое моделирование».

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение4
1. Исследование вынужденных колебаний нелинейных систем	5
2. Исследование автоколебаний	9
3. Исследование параметрических колебаний	19

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях приведены примеры решения задач различного уровня сложности по нелинейным колебаниям механических систем. Рассмотрены задачи на исследование вынужденных колебаний, автоколебаний и параметрических колебаний для механических систем как с одной, так и с двумя степенями свободы.

Методические указания могут использоваться студентами для самостоятельной работы с целью закрепление пройденного материала по теории нелинейных колебаний и преподавателями как пособие для практических занятий.

1 Исследование вынужденных колебаний нелинейных систем

Пример 1. К массе m прикреплены свободно (без предварительного натяга) две пружины длиной l_0 и жесткостью c каждая. Считая, что масса перемещается по плоскости с пренебрежимо малым трением, установить зависимость между частотой и амплитудой свободных колебаний массы, если в начальный момент времени ($t_0 = 0$) масса отклонена от положения равновесия на величину x_0 .

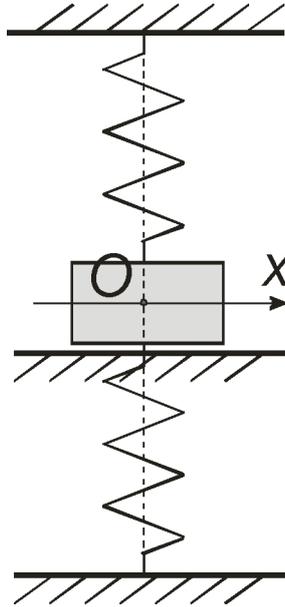


Рисунок 1.1 – Подпружиненная масса

При отклонении массы от положения равновесия на произвольную величину x натяжение в пружинах составляет

$$T = c\Delta l = c\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right) = \frac{c}{2l_0}x^2 + \dots$$

$$\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} = l_0\left(1 + \frac{x^2}{2l_0^2} - \frac{x^4}{8l_0^4} + \frac{x^6}{16l_0^6} + \dots\right)\right)$$

Спроектируем на горизонтальную ось силы, действующие на массу

$$m\ddot{x} = -2T \sin \alpha = -2T \left(\frac{x}{\sqrt{l_0^2 + x^2}}\right) = -2T \left(\frac{x}{l_0} - \frac{x^3}{2l_0^3} + \frac{3x^5}{8l_0^5} + \dots\right) \approx -\frac{2Tx}{l_0} = -\frac{cx^3}{l_0^2}$$

Зависимость этой нелинейной силы от перемещения можно найти и другим способом. Запишем выражение для потенциальной энергии деформированных пружин и разложим нелинейные члены в ряд по степеням x

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \frac{l}{2} c \Delta^2 = c \left(2l_0^2 + x^2 - 2l_0 \sqrt{l_0^2 + x^2} \right) = \\ &= c \left[2l_0^2 + x^2 - 2l_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{2l_0^2} - \frac{x^4}{8l_0^4} + \dots \right) \right] = \frac{cx^4}{4l_0^2} + \dots \end{aligned}$$

Если в разложении оставить члены наименьшего порядка малости, а в нашем случае это четвертый порядок относительно x , то для восстанавливающей силы получим то же самое выражение

$$F = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{cx^3}{l_0^2}.$$

Введем обозначение $k^2 = \frac{c}{ml_0^2}$ и получим следующее уравнение движения груза

$$\ddot{x} + k^2 x^3 = 0.$$

Мы видим, что движение происходит под действием нелинейной консервативной восстанавливающей силы. Для таких систем можно получить аналитические выражения для фазовых траекторий. Введем вторую фазовую координату — скорость движения груза: $y = \dot{x}$. Тогда

$$y dy = -k^2 x^3 dx$$

Уравнения интегральных кривых будут иметь следующий вид

$$y^2 = -\frac{k^2 x^4}{2} + C$$

С учетом начальных условий

$$y^2 = \frac{k^2 (x_0^4 - x^4)}{2}.$$

Следовательно, фазовые траектории в этой системе представляют собой замкнутые линии четвертого порядка, окружающие начало координат. Начало координат есть особая точка типа центр.

Это уравнение можно проинтегрировать повторно и получить уравнения движения

$$t = -\int_{x_0}^x \frac{dx}{k \sqrt{(x_0^4 - x^4)/2}} = \frac{1}{x_0 k} \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^4}}.$$

В последней формуле $\varepsilon = \frac{x}{x_0}$ — безразмерное перемещение.

Так как восстанавливающая сила симметрична, то для определения периода колебаний достаточно рассмотреть только одну четверть периода

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{x_0 k} \sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^4}}.$$

Интеграл сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода и может быть вычислен

$$\sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^4}} = 1.8541.$$

Пользуясь полученным значением, можем найти величину периода колебаний для заданных начальных условий

$$T = \frac{4}{x_0 k} 1.8541 = 7.4164 \frac{l_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Тогда для частоты колебаний получим

$$\omega = 0.8472 \frac{x_0}{l_0} \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Пример 2. Установить зависимость между частотой свободных колебаний и начальной скоростью движения груза в примере 1, если в начальный момент времени массе m , которая находилась в положении равновесия, была сообщена скорость v_0 .

Так как сама механическая система не изменилась, остался без изменений и первый интеграл уравнения движения

$$y^2 + \frac{k^2 x^4}{2} = C.$$

Найдем для новых начальных условий значение постоянной интегрирования

$$C = v_0^2.$$

Тогда

$$y^2 + \frac{k^2 x^4}{2} = v_0^2.$$

Так мы ищем зависимость для периодических колебаний, то вместо интегрирования полученного уравнения, можем снова воспользоваться результатами из первого примера. Для этого достаточно из первого интеграла уравнений движения найти величину максимального отклонения, которое соответствует нулевой скорости

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{v_0}{k} \sqrt{2}} = \sqrt{v_0 l_0} \sqrt{\frac{2m}{c}}.$$

$$\text{Тогда } \omega = \frac{0.8472}{l_0} \sqrt{v_0 l_0} \sqrt{\frac{2m}{c}} \sqrt{\frac{c}{m}} = 1.007 \sqrt{\frac{v_0}{l_0}} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Пример 3. Найти зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы в системе с двумя степенями свободы. Рассмотрим систему, в которой происходят крутильные колебания (рис. 1.2).

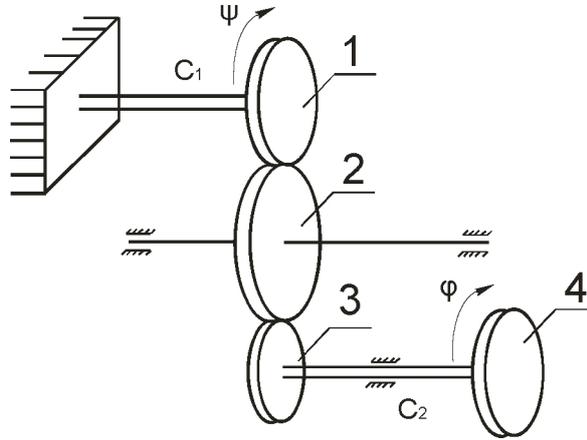


Рисунок 1.2 — Схема системы с двумя степенями свободы

Пусть жесткость вала l - нелинейна: $c_l(\psi) = c_l(1 - \varepsilon\psi^2)$, где $c_l = const$, к колесу 1 приложен внешний крутящий момент $F_{10} \sin \omega t$, а к колесу 4 - момент сил сопротивления $M = -k\dot{\phi}$. Тогда уравнения движения могут быть записаны в таком виде

$$\begin{cases} \frac{(m_1 + m_2 + m_3)R_1^2}{2} \ddot{\psi} + \left[c_1 + c_2 \left(\frac{R_1}{R_3} \right)^2 \right] \dot{\psi} - c_2 \frac{R_1}{R_3} \dot{\phi} = \varepsilon\psi^3 + F_{10} \sin(\omega t) \\ \frac{m_4 R_4^2}{2} \ddot{\phi} - c_2 \frac{R_1}{R_3} \dot{\psi} + c_2 \dot{\phi} = -k\dot{\phi} \end{cases}$$

Для определения собственных частот в порождающей системе, в которой отсутствуют силы сопротивления и нелинейные силы, зададимся следующими значениями параметров системы:

$$\begin{aligned} m_1 = m_4 = 40 \text{ кг}, \quad m_2 = 60 \text{ кг}, \quad m_3 = 30 \text{ кг}, \\ R_1 = R_4 = 0.35 \text{ м}, \quad R_2 = 1.1 \cdot 0.35 = 0.385 \text{ м}, \quad R_3 = 0.9 \cdot 0.35 = 0.315 \text{ м}, \\ c_1 = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}, \quad c_2 = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}. \end{aligned}$$

Тогда частоты собственных колебаний будут равны: $k_1 = 2.9848 \text{ с}^{-1}$, $k_2 = 13.1382 \text{ с}^{-1}$. Рассмотрим вынужденные колебания с частотой ω , близкой к первой собственной. Воспользуемся методом исследования одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы [2].

Введем новые переменные: амплитуду x_0 и сдвиг по фазе θ , для которых дифференциальные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \varepsilon A_1(x_0) \\ \dot{\theta} = \omega_1(x_0) - \omega + \varepsilon B_1(x_0) \end{cases}$$

где ω - частота вынуждающей силы, $\omega_1(x_0)$ - первая собственная частота механической системы, в общем случае зависящая от амплитуды колебаний. Для определения A_1 и B_1 воспользуемся методом усреднения:

$$A_1(x_0) = -\frac{1}{2\pi\omega_1} \int_0^{2\pi} [Q_1(x_0, y_0) + \mu_1 Q_2(x_0, y_0)] \sin y_0 dy_0 - \frac{F_{10}}{m(\omega_1 + \omega)} \cos \theta,$$

$$B_1(x_0) = -\frac{1}{2\pi\omega_1 m x_0} \int_0^{2\pi} [Q_1(x_0, y_0) + \mu_1 Q_2(x_0, y_0)] \cos y_0 dy_0 + \frac{F_{10}}{m(\omega_1 + \omega) x_0} \sin \theta,$$

где $Q_1 = x^3 \cos^3 y$, $Q_2 = \frac{k}{\varepsilon} \mu_1 \omega_1 x \sin y$.

Вычисляя интегралы, получим:

$$A_1 = -h_1 x_0 - \frac{f}{m(\omega_1 + \omega)} \cos \theta = -0.000063 x_0 - \frac{0.4355}{2.9848 + \omega} \cos \theta,$$

$$B_1 = -\omega_e + \frac{f}{m(\omega_1 + \omega) x_0} = -0.000109 x_0^2 + \frac{0.4355}{(2.9848 + \omega) x_0} \sin \theta,$$

С учетом этих выражений дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -\varepsilon h_1 x_0 - \frac{F_{10}}{m(\omega_1 + \omega)} \cos \theta = -0.0313 x_0 - \frac{217.7607}{2.9848 + \omega} \cos \theta \\ \dot{\theta} = \omega_1 - \omega - \varepsilon \omega_e + \frac{F_{10}}{m(\omega_1 + \omega) x_0} \sin \theta = 2.9848 - \omega - 0.547 x_0^2 + \frac{217.7607}{(2.9848 + \omega) x_0} \sin \theta \end{cases}$$

Если мы исключим из этих уравнений сдвиг по фазе θ , то найдем зависимость между амплитудой и частотой возмущающей силы с точностью до величин второго порядка малости:

$$F_{10}^2 = m^2 x_0^2 \left[4\varepsilon^2 h_1^2 \omega^2 + \left((\omega_1 - \varepsilon \omega_e)^2 - \omega^2 \right)^2 \right].$$

Построим зависимость $x_0(\omega)$ для двух значений амплитуды вынуждающей силы: $F_{10} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $F_{10} = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

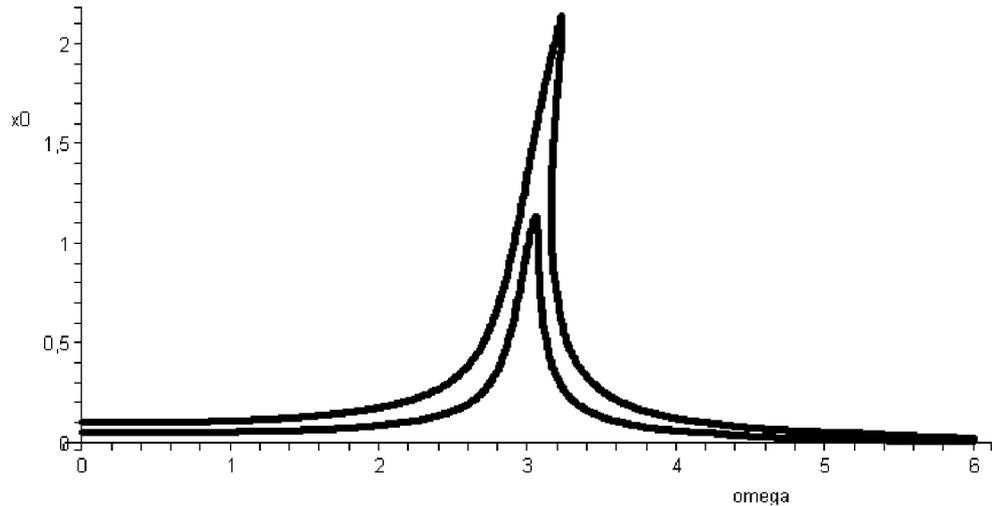


Рисунок 1.3 — Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при $k = 50$

2 Исследование автоколебаний

Пример 1. Движение системы описывается уравнением

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 - \alpha^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Определить амплитуду автоколебательного процесса, возникающего в системе, исследовать его устойчивость.

Для исследования автоколебательного процесса воспользуемся методом Ван-дер-Поля. Запишем наше уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - (y^2 + \omega^2 x^2 - \alpha^2)y = -\omega^2 x - f(x, y). \end{cases}$$

Введем переменные амплитуда-фаза

$$\begin{cases} x = K \cos(\omega t + \theta), \\ y = -\omega K \sin(\omega t + \theta). \end{cases}$$

Найдем производные от записанных соотношений по времени, учитывая при этом, что амплитуда K и фаза θ есть функции времени, и подставим эти производные в уравнения движения

$$\dot{x} = \dot{K} \cos(\omega t + \theta) - \omega K \sin(\omega t + \theta) - K \dot{\theta} \sin(\omega t + \theta) = y = -\omega K \sin(\omega t + \theta),$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\omega\dot{K} \sin(\omega t + \theta) - \omega^2 K \cos(\omega t + \theta) - \omega K \dot{\theta} \cos(\omega t + \theta) = \\ &= -\omega^2 x - f[K \cos(\omega t + \theta), -\omega K \sin(\omega t + \theta)].\end{aligned}$$

В результате мы получили систему из двух линейных относительно \dot{K} и $\dot{\theta}$ уравнений

$$\begin{cases} \cos(\omega t + \theta)\dot{K} - K \sin(\omega t + \theta)\dot{\theta} = 0, \\ -\omega K \sin(\omega t + \theta)\dot{K} - \omega K \cos(\omega t + \theta)\dot{\theta} = f(K, \theta). \end{cases}$$

Найдем из этой системы \dot{K} и $\dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\frac{1}{\omega} f(K, \theta) \sin(\omega t + \theta), \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{K\omega} f(K, \theta) \cos(\omega t + \theta). \end{cases}$$

Для определения амплитуды автоколебаний и исследования устойчивости предельных циклов нам достаточно рассмотреть первое уравнение. Так как амплитуда K изменяется достаточно медленно, то можно усреднить правую часть дифференциального уравнения по фазе $(\omega t + \theta)$ на одном периоде $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Найдем соответствующий интеграл

$$\begin{aligned}\int_0^T f(K, \theta) \sin(\omega t + \theta) dt &= \\ &= \int_0^T [\omega^2 K^2 \sin^2(\omega t + \theta) + \omega^2 K^2 \cos^2(\omega t + \theta) - \alpha^2] [-\omega K \sin(\omega t + \theta)] \sin(\omega t + \theta) dt = \\ &= K\pi(\omega^2 K^2 - \alpha^2)\end{aligned}$$

В результате получаем первое уравнение установления

$$\frac{dK}{dt} = -K\pi(\omega^2 K^2 - \alpha^2).$$

Амплитуды предельных циклов будут определяться из условия

$$\frac{dK}{dt} = F(K) = -K\pi(\omega^2 K^2 - \alpha^2) = 0.$$

Мы видим, что существуют два значения K удовлетворяющих этому уравнению

$$K_0 = 0 \text{ и } K_1 = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Для оценки устойчивости найденных предельных циклов найдем знаки производной от функции $F(K)$ на каждом из циклов

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha^2 - 3\omega^2 K^2.$$

При $K = K_0 = 0$ $\left. \frac{\partial F}{\partial K} \right|_{K=0} = \alpha^2 > 0$, следовательно, этот предельный цикл неустойчив.

При $K = K_1 = \frac{\alpha}{\omega}$ $\left. \frac{\partial F}{\partial K} \right|_{K=\frac{\alpha}{\omega}} = -2\alpha^2 < 0$, что оговорит об устойчивости второго предельного цикла. На рисунках 2.1 и 2.2 приведены результаты численного интегрирования, подтверждающие правильность сделанных выводов.

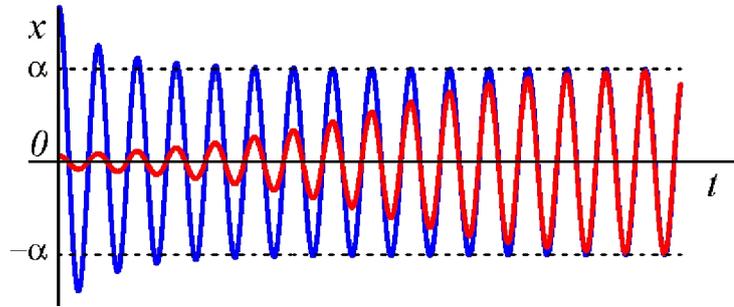


Рисунок 2.1 – Процесс установления автоколебаний

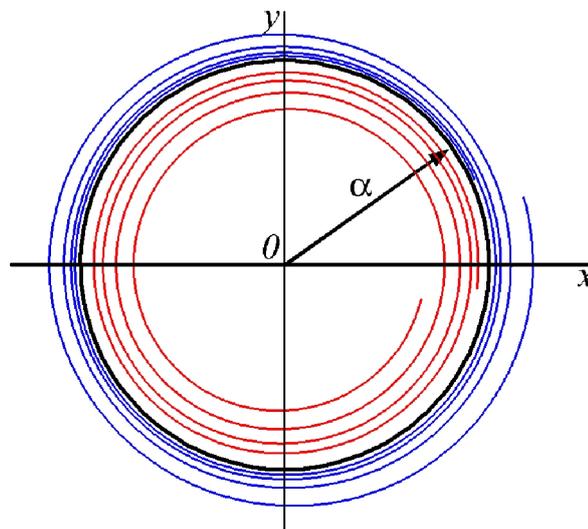


Рисунок 2.2 – Фазовый портрет автоколебательной системы

Пример 2. Толкатель 1 перемещается поступательно с постоянной скоростью v_0 и через пружину передает движение ползуну 2 (рис.2.3). Сила трения между ползуном и направляющими, по которым он перемещается, зависит от скорости ползуна v следующим образом:

$$F_{mp} = F_0 \operatorname{sign} v - \alpha v + \beta v^3,$$

где F_0, α, β - постоянные положительные коэффициенты. Выявить условия, при которых в этой системе могут возникнуть автоколебания, близкие к гармоническим колебаниям частоты $\omega = \sqrt{c/m}$, где c - коэффициент жесткости пружины, m - масса ползуна. Определить приближенно амплитуду этих автоколебаний.

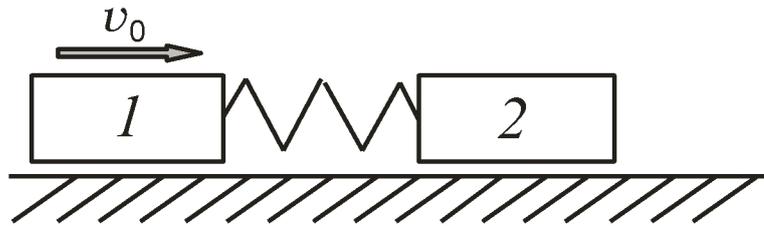


Рисунок 2.3 – Механическая система из примера 2

Рассмотрим относительное движение ползуна относительно толкателя. Пусть x - координата, задающая положение ползуна относительно толкателя. Тогда скорость ползуна относительно направляющих $v = v_0 + \dot{x}$. Запишем уравнения движения ползуна

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \operatorname{sign}(v_0 + \dot{x}) - \alpha(v_0 + \dot{x}) + \beta(v_0 + \dot{x})^3.$$

Равновесие в этой системе может возникнуть в следующем положении

$$x_0 = -\frac{F_0 - \alpha v_0 + \beta v_0^3}{c}.$$

Проведем исследование движения системы методом Ван-дер-Поля.

Допустим, что в этой системе возможны автоколебания, близкие к гармоническим, тогда

$$\begin{aligned} x &= K \cos[\omega(t + \vartheta)], \\ y = \dot{x} &= -K\omega \sin[\omega(t + \vartheta)], \end{aligned}$$

где K и ϑ - медленно меняющиеся параметры.

Запишем уравнения интегральных кривых

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = \frac{F_0}{m} \operatorname{sign}(v_0 + \dot{x}) - \frac{\alpha}{m}(v_0 + \dot{x}) + \frac{\beta}{m}(v_0 + \dot{x})^3 = f(x, y) \end{cases}$$

В полярных координатах K и ϑ во вращающейся фазовой плоскости эти уравнения примут такой вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K} \cos[\omega(t+\vartheta)] - \cancel{K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]} - K\dot{\vartheta}\omega \sin[\omega(t+\vartheta)] = \cancel{-K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]}; \\ -\dot{K}\omega \sin[\omega(t+\vartheta)] - \cancel{K\omega^2 \cos[\omega(t+\vartheta)]} - K\omega^2\dot{\vartheta} \cos[\omega(t+\vartheta)] = \\ = \cancel{-\omega^2 K \cos[\omega(t+\vartheta)]} + f(K \cos[\omega(t+\vartheta)], -K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]). \end{array} \right.$$

После сокращения подобных членов

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K} \cos[\omega(t+\vartheta)] - K\dot{\vartheta}\omega \sin[\omega(t+\vartheta)] = 0; \\ -\dot{K}\omega \sin[\omega(t+\vartheta)] - K\omega^2\dot{\vartheta} \cos[\omega(t+\vartheta)] = f(K \cos[\omega(t+\vartheta)], -K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]). \end{array} \right.$$

Найдем решение этой системы \dot{K} и $\dot{\vartheta}$ методом Крамера. Выпишем определители

$$\Delta = -K\omega^2,$$

$$\Delta_{\dot{K}} = -K\omega f[K \cos[\omega(t+\vartheta)], -K \sin[\omega(t+\vartheta)]] \sin[\omega(t+\vartheta)],$$

$$\Delta_{\dot{\vartheta}} = f[K \cos[\omega(t+\vartheta)], -K \sin[\omega(t+\vartheta)]] \cos[\omega(t+\vartheta)]$$

Тогда

$$\dot{K} = \frac{f(K, \vartheta, t) \sin[\omega(t+\vartheta)]}{\omega},$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{f(K, \vartheta, t) \cos[\omega(t+\vartheta)]}{K\omega^2},$$

где

$$f(K, \vartheta, t) = \frac{F_0}{m} \text{sign}(v_0 - K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]) - \frac{\alpha}{m} (v_0 - K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)]) + \frac{\beta}{m} (v_0 - K\omega \sin[\omega(t+\vartheta)])^3.$$

Перейдем к усредненным уравнениям

$$\dot{K} = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} f(K, \vartheta, \tau) \sin[\omega(\tau+\vartheta)] d\tau,$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{K\omega} \int_0^{2\pi/\omega} f(K, \vartheta, \tau) \cos[\omega(\tau+\vartheta)] d\tau.$$

Учитывая, что в этих уравнениях ϑ есть параметр, получим

$$\dot{K} = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} f(K, u) \sin(\omega u) du,$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{K\omega} \int_0^{2\pi/\omega} f(K, u) \cos(\omega u) du.$$

Для определения особых точек воспользуемся уравнением

$$F(K) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi/\omega} f(K, u) \sin(\omega u) d\omega u = -\frac{1}{2\pi\omega^2} K \omega \pi \left(\frac{3}{4} \beta \omega^2 K^2 - \alpha + 3\beta v_0^2 \right) = 0.$$

Находим два значения K :

$$K_0 = 0, \quad K_1 = \frac{2}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{3\beta} - v_0^2 \right)}.$$

Для оценки устойчивости найдем производную от найденной функции

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dK} &= -3\beta\omega\pi v_0^2 + \alpha\omega\pi - \frac{9}{4}\beta K^2 \omega^3 \pi \\ \left(\frac{dF}{dK} \right)_{K_1} &= -3\beta\omega\pi v_0^2 + \alpha\omega\pi - \frac{9}{4}\beta \frac{4}{\omega^2} \left(\frac{\alpha}{3\beta} - v_0^2 \right) \omega^3 \pi < 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим

$$v_0^2 < \frac{\alpha}{3\beta}.$$

Для того, чтобы сила F_0 не меняла свой знак, необходимо выполнение следующего условия

$$v_0 > K\omega = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta} - v_0^2}.$$

$$\text{Отсюда } 5v_0^2 > \frac{4\alpha}{3\beta}.$$

Пример 3. Рассмотрим, какие силы следует добавить в линейную консервативную механическую систему с двумя степенями свободы, чтобы в ней могли возникнуть автоколебания. В качестве примера выберем систему, движение которой описывается следующими уравнениями

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 l \ddot{\phi} + (c_1 + c_2 + c_3) x + c_3 l \phi = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 l \ddot{x} + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\phi} + c_3 l x + \left(c_3 l^2 - \frac{1}{2} m_2 l g \right) \phi = 0. \end{cases}$$

Схема этой системы приведена на рис.2.4.

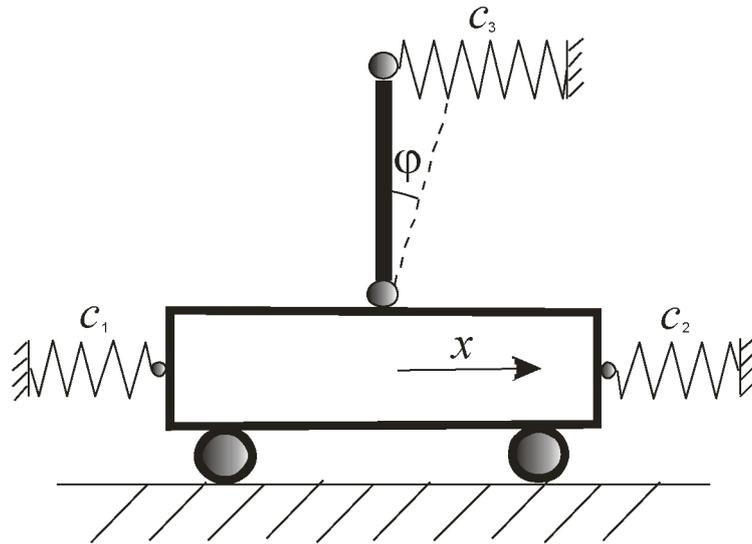


Рисунок 2.4 – Схема исследуемой механической системы

Для проведения численного анализа зададим следующие значения параметров этой системы: $m_1 = 3\text{кг}$, $m_2 = 1\text{кг}$, $c_1 = 600\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $c_2 = 400\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $c_3 = 600\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $l = 0.5\text{м}$.

При этих значениях параметров собственные частоты колебаний системы равны: $\omega_1 = 17,216\text{с}^{-1}$; $\omega_2 = 49,362\text{с}^{-1}$.

Добавим к линейным потенциальным силам малые нелинейные возмущающие силы следующего вида:

$$\begin{cases} Q_1 = (b_1 + b_2 x^2) \dot{x}, \\ Q_2 = 0. \end{cases}$$

Физически введение таких сил означает, что мы добавили нелинейную силу сопротивления, которая возникает при движении тележки. Для того, чтобы в рассматриваемой механической системе могли появиться автоколебания эта нелинейная сила должна удовлетворять условиям критерия Льенара [1]. В нашем случае это сводится к тому, что коэффициенты b_1 и b_2 должны быть малы по сравнению с другими коэффициентами, первый из них должен быть положительным, а второй — отрицательным.

Выберем для этих коэффициентов следующие значения $b_1 = 3 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ и $b_2 = -5 \text{ Н}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$.

Уравнения колебаний механической системы в окрестности F_0 положения равновесия с учетом возмущающих сил можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\varphi} + c_{11}x + c_{12}\varphi = (b_1 + b_2x^2)\dot{x}, \\ a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}x + c_{22}\varphi = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{1}{2}m_2l\ddot{\varphi} + (c_1 + c_2 + c_3)x + c_3l\varphi = (b_1 + b_2x^2)\dot{x}, \\ \frac{1}{2}m_2l\ddot{x} + \frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi} + c_3lx + \left(c_3l^2 - \frac{1}{2}m_2lg\right)\varphi = 0. \end{cases}$$

Покажем, что выбранная нами сила, приводит систему к автоколебаниям. Для этого численно проинтегрируем дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы при различных начальных условиях.

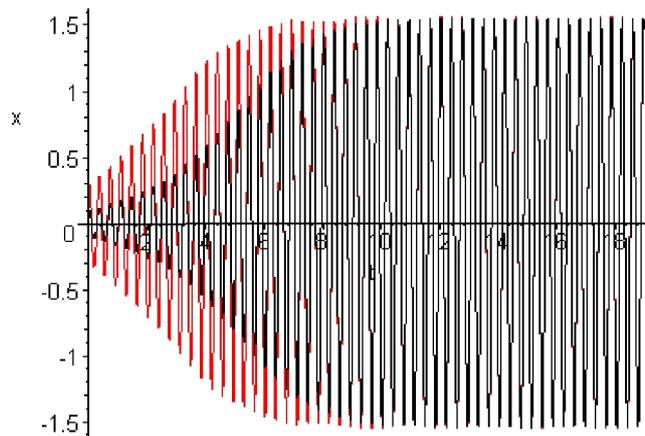


Рисунок 2.4 — Процесс установления автоколебаний при различных начальных условиях

Вычислим путем измерения период и частоту установившихся автоколебаний. Для этого рассмотрим график функции $x(t)$.

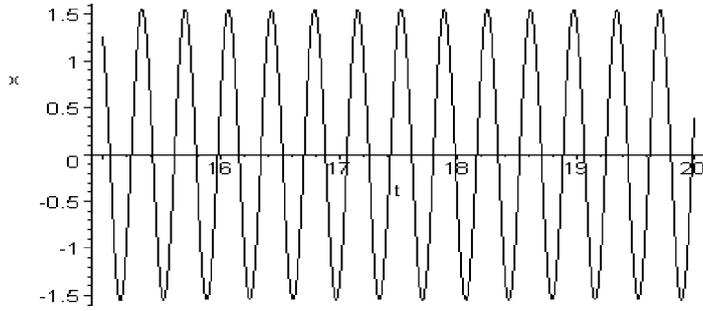


Рисунок 2.5 – Установившиеся автоколебания

Из графика видно, что длительность 11 периодов автоколебаний составляет 4 секунды, таким образом, получаем $T = \frac{4}{11} = 0,36 \text{ с}$. Следовательно, частота установившихся автоколебаний будет равна $\omega = \frac{2\pi}{T} = 17 \text{ с}^{-1}$. Значит, предельный цикл колебаний соответствует первой собственной частоте ($\omega_1 = 17,216 \text{ с}^{-1}$).

Проведем аналитический анализ автоколебаний.

Произведем замену переменных:

$$\begin{cases} x = K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \\ \varphi = \chi_1 K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + \chi_2 K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \\ \dot{x} = -\omega_1 K_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \\ \dot{\varphi} = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в дифференциальные уравнения движения системы получим имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\dot{K}_1, \dot{K}_2, K_1 \dot{\varphi}^{(1)}, K_2 \dot{\varphi}^{(2)}$, решая которую относительно этих переменных, найдем:

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} = -\frac{D_4 Q_1 \sin \varphi_1}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{dK_2}{dt} = \frac{D_3 Q_1 \sin \varphi_2}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \end{cases}$$

где $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1^{(0)}, \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2^{(0)}$,

$$D_3 = a_{12} + a_{22} \chi_1, D_4 = a_{12} + a_{22} \chi_2.$$

Проведем усреднение последней системы по быстрым переменным φ_1 и φ_2 .

Учитывая особенности рассматриваемой системы, получим следующий результат:

$$\begin{cases} \frac{dK_1^0}{dt} = \frac{D_4 K_1 \left(b_1 + \frac{b_1 (K_1)^2}{4} + \frac{b_1 (K_2)^2}{2} \right)}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{dK_2^0}{dt} = -\frac{D_3 K_2 \left(b_1 + \frac{b_1 (K_2)^2}{4} + \frac{b_1 (K_1)^2}{2} \right)}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет четыре особые точки, которые находятся из условий

$$\begin{cases} \frac{dK_1^0}{dt} = 0, \\ \frac{dK_2^0}{dt} = 0. \end{cases}$$

- 1) $K_{*1} = 0, K_{*2} = 0$ - тривиальный случай.
- 2) $K_{*1} = 0, K_{*2} = 1,549$.
- 3) $K_{*1} = 1,549, K_{*2} = 0$.
- 4) $K_{*1} = 0,894, K_{*2} = 0,894$.

Тип этих особых точек устанавливается посредством анализа значений корней характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

При этом

$$d_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial K_1} = \frac{D_4 \left(b_1 + \frac{3b_2 K_{*1}^2}{4} + \frac{b_2 K_{*2}^2}{2} \right)}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)},$$

$$d_{12} = \frac{\partial A_1}{\partial K_2} = \frac{D_4 b_2 K_{*1} K_{*2}}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)},$$

$$d_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial K_1} = -\frac{D_3 b_2 K_{*1} K_{*2}}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)},$$

$$d_{22} = \frac{\partial A_2}{\partial K_2} = -\frac{D_3 \left(b_1 + \frac{3b_2 K_{*2}^2}{4} + \frac{b_2 K_{*1}^2}{2} \right)}{2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Корни характеристического уравнения определяются выражениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_{11} + d_{22}}{2} \pm \left[\frac{(d_{11} + d_{22})^2}{4} - (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) \right]^{1/2}.$$

Для рассматриваемой системы, после подстановки численных значений, получим следующие результаты:

- 1) $K_{*1} = 0, K_{*2} = 0$: $\lambda_1 = 0,447, \lambda_2 = 0,014$;
- 2) $K_{*1} = 0, K_{*2} = 1,549$: $\lambda_1 = -0,03, \lambda_2 = -1,576$;
- 3) $K_{*1} = 1,549, K_{*2} = 0$: $\lambda_1 = -0,005, \lambda_2 = -0,902$;
- 4) $K_{*1} = 0,894, K_{*2} = 0,894$: $\lambda_1 = 0,016, \lambda_2 = -0,714$.

Таким образом, первая точка является неустойчивым узлом, вторая и третья точки являются устойчивыми узлами, а четвертая представляет собой седло. В рассматриваемой системе возможны устойчивые автоколебания с амплитудами, близкими к значениям $K_{*1} = 0, K_{*2} = 1,549$ и $K_{*1} = 1,549, K_{*2} = 0$. В других точках также существуют предельные циклы, однако они неустойчивые.

3 Исследование параметрических колебаний

Пример 1. Маятник представляет собой груз массой m , закрепленный на невесомом стержне длиной l . Верхняя точка подвеса маятника совершает периодическое движение по закону $y_1 = y_0 \sin \omega t$. Исследовать устойчивость малых колебаний маятника при следующих параметрах системы: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, $l = 0.5 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $y_0 = 10 \text{ мм}$.

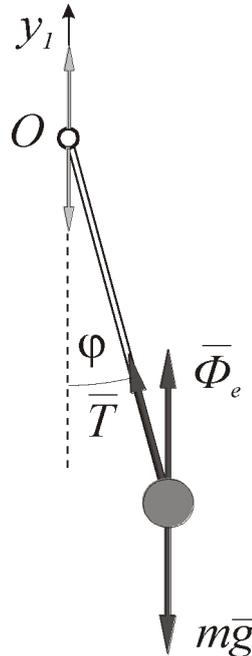


Рисунок 3.1 Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Составим уравнения относительного движения маятника в системе координат, связанной с точкой подвеса

$$m\bar{w}_r = m\bar{g} + \bar{T} + \bar{\Phi}_e$$

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{w}_e = -m\bar{w}_O, \quad w_O = \ddot{y} = -y_0\omega^2 \sin \omega t.$$

Проектируя силы на касательную к траектории, получим

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + my_0\omega^2 \sin \omega t \sin \varphi.$$

Рассмотрим малые колебания маятника:

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{g}{l} - \frac{y_0\omega^2}{l} \sin \omega t \right] \varphi = 0.$$

Сравним полученное уравнение с уравнением Матье

$$\ddot{\varphi} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \varphi = 0.$$

В нашем случае параметры получают следующие значения

$$\delta = \frac{g}{l\omega^2} = 0.1962, \quad \varepsilon = \frac{y_0}{l} = 0.02, \quad \tau = \omega t.$$

Для оценки устойчивости воспользуемся диаграммой Айнса-Стретта. Построим часть этой диаграммы в окрестности нуля. В первом приближении границы областей устойчивости определяются следующими уравнениями:

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad \delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad .$$

На рисунке 3.2 изображены соответствующие границы и изображено положение точки, соответствующее условию нашего примера. Это точка **1**.

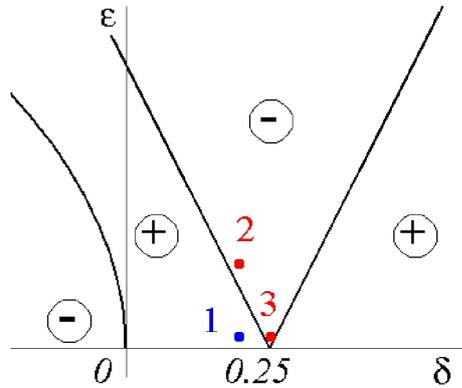


Рисунок 3.2 – Фрагмент диаграммы Айнса-Стретта

Мы видим, что точка с параметрами нашей системы лежит в зоне устойчивости, при такой частоте возбуждения (частоте колебаний точки подвеса) в системе не будет параметрических резонансов. По диаграмме легко найти условия появления параметрических резонансов. Если варьировать только один из параметров системы δ или ε , то можно найти неустойчивые точки:

Точка 2 - $\delta = 0.1962$, $\varepsilon = 0.15$. Для того, чтобы параметр ε получил такое значение, следует увеличить амплитуду колебаний точки подвеса до 75 мм.

Точка 3 - $\delta = 0.25$, $\varepsilon = 0.02$. В этом случае частота возбуждения в два раза меньше собственной частоты колебаний маятника, здесь мы будем иметь половинный параметрический резонанс, который будет возникать даже при самых малых амплитудах колебаний точки подвеса.

Пример 2. На рис. 3.3 изображен астатической маятник. Если точке подвеса O маятника сообщить вертикальное колебательное движение с некоторой частотой ω , то вертикальное положение груза может стать устойчивым. Определить наименьшую частоту ω_{\min} , при которой система будет устойчивой, если движение точки O происходит по закону $y_1 = y_0 \sin \omega t$, $l = 0.2\text{ м}$, $y_0 = 5\text{ мм}$.

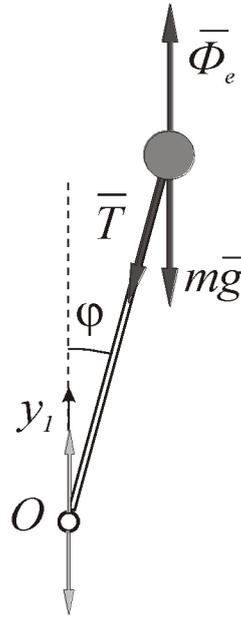


Рисунок 3.3 – Астатический маятник с колеблющейся точкой подвеса

Уравнение движения астатического маятника можно составить аналогично уравнению в примере 1. Оно будет иметь такой вид

$$\ddot{\varphi} + \left[-\frac{g}{l} - \frac{y_0 \omega^2}{l} \sin \omega t \right] \varphi = 0.$$

Это также уравнение Матье. Найдем параметры этого уравнения

$$\delta = -\frac{g}{l\omega^2} = -\frac{49.05}{\omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{y_0}{l} = 0.025.$$

При отрицательных значениях δ при параметрическом возбуждении возможны устойчивые колебания, если точка (δ, ε) будет лежать на диаграмме Айнса-Стретга между линиями

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{и} \quad \delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Так как в нашем случае величина ε задана, то достаточно найти минимальное значение частоты возбуждения из условия

$$\delta > -\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Подставим значения параметров нашей системы и найдем минимальную частоту

$$\frac{49.05}{\omega^2} < \frac{0.025^2}{2}, \quad \omega > 40\sqrt{10g} = 396 \text{ c}^{-1}.$$

Пример 3. Рассмотрим условия возникновения параметрических резонансов в системе с двумя степенями свободы (пример 2.3). При отсутствии нелинейных сил уравнения движения системы имеют такой вид

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 l \ddot{\phi} + (c_1 + c_2 + c_3) x + c_3 l \phi = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 l \ddot{x} + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\phi} + c_3 l x + \left(c_3 l^2 - \frac{1}{2} m_2 l g \right) \phi = 0. \end{cases}$$

Предположим теперь, что на эту систему наряду с потенциальными силами действует периодическое параметрическое возмущение вида

$$c_1 = c_1^0 + \varepsilon \cos pt,$$

где c_1 - жесткость первой пружины,

c_1^0 - невозмущенное значение жесткости,

ε - малый параметр,

p - частота параметрического возмущения.

Таким образом, предполагается, что жесткость первой пружины изменяется по гармоническому закону.

Рассмотрим колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия. Учитывая известные выражения для кинетической и потенциальной энергии, запишем уравнения параметрических колебаний:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{\phi} + c_{11}^0 x + c_{12} \phi = -\varepsilon x \cos pt = \varepsilon Q_1, \\ a_{21} \ddot{x} + a_{22} \ddot{\phi} + c_{21} x + c_{22} \phi = 0, \end{cases}$$

где $c_{11}^0 = c_1^0 + c_2 + c_3$ - невозмущенное значение коэффициента c_{11} ,

εQ_1 - возбуждающая сила.

Преобразуем систему к переменным амплитуды — фазы

$$\begin{cases} x = K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, \\ \varphi = \chi_1 K_1 \cos \varphi_1 + \chi_2 K_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{x} = -\omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{\varphi} = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \end{cases}$$

где $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi^{(1)}$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi^{(2)}$.

Повторим преобразования предыдущей части, найдем выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_1}{dt} = -\frac{\varepsilon Q_1 D_4 \sin \phi_1}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{dK_2}{dt} = \frac{\varepsilon Q_1 D_3 \sin \phi_2}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 - \frac{\varepsilon Q_1 D_4 \cos \phi_1}{K_1 \omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{\varepsilon Q_1 D_3 \cos \phi_2}{K_2 \omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \rho, \end{array} \right.$$

где $D_3 = a_{12} + a_{22} \chi_1$, $D_4 = a_{12} + a_{22} \chi_2$, а коэффициенты распределения χ_1, χ_2 и собственные частоты ω_1, ω_2 определены в первой части курсовой работы.

Полученная система представляет собой систему с тремя быстрыми фазами $\varphi_1, \varphi_2, \phi$ и ее правые части вследствие проведенной замены есть функции, периодические по фазам $\varphi_1, \varphi_2, \phi$ с периодом 2π .

Определим резонансы, возможные в исследуемой системе. Для этого разложим правые части системы в ряды Фурье по фазам $\varphi_1, \varphi_2, \phi$. Выпишем только члены, зависящие от фаз, тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1 \sin \phi_1 &= -\varepsilon (K_1 \cos \phi_1 + K_2 \cos \phi_2) \cos \varphi \sin \phi_1, \\ \varepsilon Q_1 \sin \phi_2 &= -\varepsilon (K_1 \cos \phi_1 + K_2 \cos \phi_2) \cos \varphi \sin \phi_2, \\ \varepsilon Q_1 \cos \phi_1 &= -\varepsilon (K_1 \cos \phi_1 + K_2 \cos \phi_2) \cos \varphi \cos \phi_1, \\ \varepsilon Q_1 \cos \phi_2 &= -\varepsilon (K_1 \cos \phi_1 + K_2 \cos \phi_2) \cos \varphi \cos \phi_2. \end{aligned}$$

Переходя в полученных выражениях от произведений тригонометрических функций к тригонометрическим функциям суммы соответствующих фаз, получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon Q_1 \sin \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \varepsilon K_1 [\sin(2\varphi_1 - \phi) + \sin(2\varphi_1 + \phi)] - \\
&\quad -\frac{1}{4} \varepsilon K_2 [\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \phi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \phi) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \phi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \phi)], \\
\varepsilon Q_1 \sin \varphi_2 &= -\frac{1}{4} \varepsilon K_2 [\sin(2\varphi_2 - \phi) + \sin(2\varphi_2 + \phi)] - \\
&\quad -\frac{1}{4} \varepsilon K_1 [\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \phi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \phi) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \phi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \phi)], \\
\varepsilon Q_1 \cos \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \varepsilon K_1 [\cos(2\varphi_1 - \phi) + \cos(2\varphi_1 + \phi)] - \frac{1}{2} \varepsilon K_1 \cos \phi - \\
&\quad -\frac{1}{4} \varepsilon K_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \phi) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \phi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \phi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \phi)], \\
\varepsilon Q_1 \cos \varphi_2 &= -\frac{1}{4} \varepsilon K_2 [\cos(2\varphi_2 - \phi) + \cos(2\varphi_2 + \phi)] - \frac{1}{2} \varepsilon K_2 \cos \phi - \\
&\quad -\frac{1}{4} \varepsilon K_2 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \phi) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \phi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \phi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \phi)].
\end{aligned}$$

Анализ полученных выражений позволяет определить те коэффициенты ряда Фурье, которые отличны от нуля для рассматриваемой системы :

$$b_{2,0,-1}, b_{2,0,1}, b_{1,-1,-1}, b_{1,1,-1}, b_{1,-1,1}, b_{1,1,1}, b_{0,2,-1}, b_{0,2,1}, b_{-1,1,-1}, b_{-1,1,1}, b_{-2,0,1}, b_{-2,0,-1}, b_{-1,-1,1}, b_{-1,-1,-1}, b_{0,-2,1}, b_{0,-2,-1}, b_{0,0,1}, b_{0,0,-1}.$$

Данные коэффициенты Фурье порождают в асимптотических рядах знаменатели вида:

$$2\omega_1 - \rho, 2\omega_1 + \rho, \omega_1 - \omega_2 - \rho, \omega_1 + \omega_2 - \rho, \omega_1 - \omega_2 + \rho, \omega_1 + \omega_2 + \rho, 2\omega_2 - \rho, 2\omega_2 + \rho.$$

Выбирая из этих знаменателей только те, которые могут обращаться в ноль при $\rho > 0$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$, нетрудно определить резонансы, возможные в данной системе: $2\omega_1 - \rho = 0$, $\omega_1 + \omega_2 - \rho = 0$, $2\omega_2 - \rho = 0$, $\omega_1 - \omega_2 + \rho = 0$.

Исследуем один из этих резонансов с помощью частично усредненной системы. Рассмотрим резонанс $2\omega_1 - \rho = 0$. Введем резонансную фазу вида

$\theta = 2\varphi_1 - \phi$. Подставляя последние выражения в уравнения движения и сохраняя в них только члены, соответствующие данному резонансу, получим частично усредненную систему:

$$\begin{aligned}\frac{dK_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon a K_1}{4\omega_1} \sin \theta, \\ \frac{dK_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2\omega_1 - \rho - \frac{\varepsilon a}{2\omega_1} \cos \theta,\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon a = -\frac{\varepsilon D_4}{(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Для этой системы построим область неустойчивости движения вида

$$\frac{2\omega_1^2}{4\omega_1^2 - \varepsilon a} < \delta < \frac{2\omega_1^2}{4\omega_1^2 + \varepsilon a}$$

где $\delta = \omega_1 / \rho$.

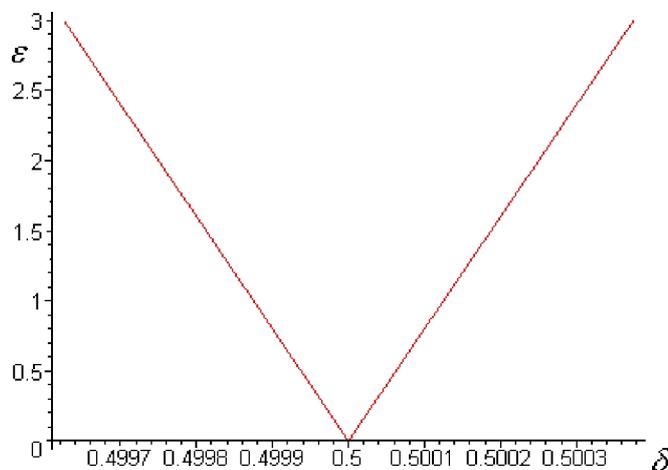


Рисунок 3.4 — Область неустойчивости исследуемого уравнения

Проверим полученный результат. Для этого выберем три точки на плоскости (ε, δ) и проверим на устойчивость решение уравнения. Пусть это будут точки:

1. $\varepsilon = 20, \quad \delta = 0,4$

2. $\varepsilon = 20, \quad \delta = 0,5$

3. $\varepsilon = 20, \quad \delta = 0,7$

Для данной системы $\varepsilon = 20$ можно считать за малый параметр в связи с большими коэффициентами исходного уравнения.

Построим графики зависимостей обобщенных координат от времени, чтобы определить устойчивость решения.

Первой точке $(\varepsilon = 20, \delta = 0,4)$ будут соответствовать рисунки 3.5 и 3.6. Из них видно, что эта точка относится к области устойчивости уравнения.

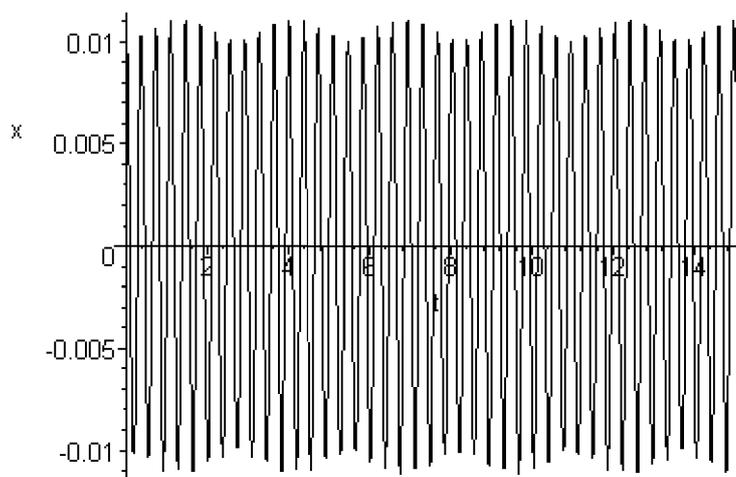


Рисунок 3.5 — Зависимость координаты x от времени

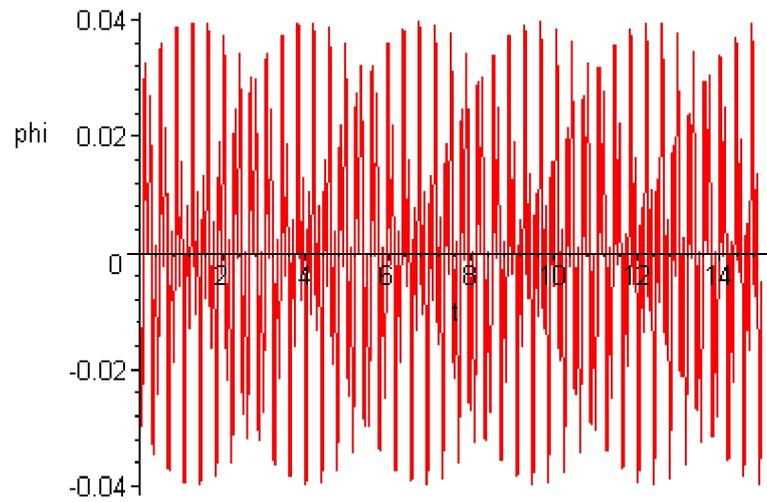


Рисунок 3.6 — Зависимость координаты φ от времени

Второй точке ($\varepsilon = 20$, $\delta = 0,5$) будут соответствовать рисунки 3.7 и 3.8. Из них видно, что эта точка относится к области неустойчивости уравнения.

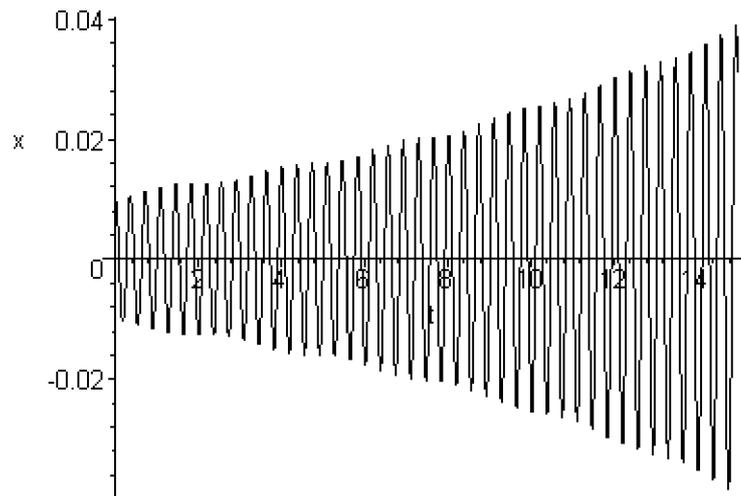


Рисунок 3.7 — Зависимость координаты x от времени

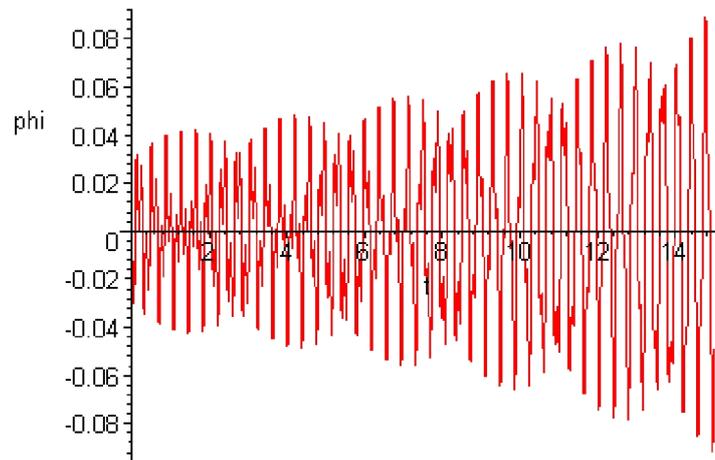


Рисунок 3.8 — Зависимость координаты φ от времени

Третьей точке ($\varepsilon = 20, \delta = 0,7$) будут соответствовать рисунки 3.9 и 3.10.

Из них видно, что эта точка относится к области устойчивости уравнения.

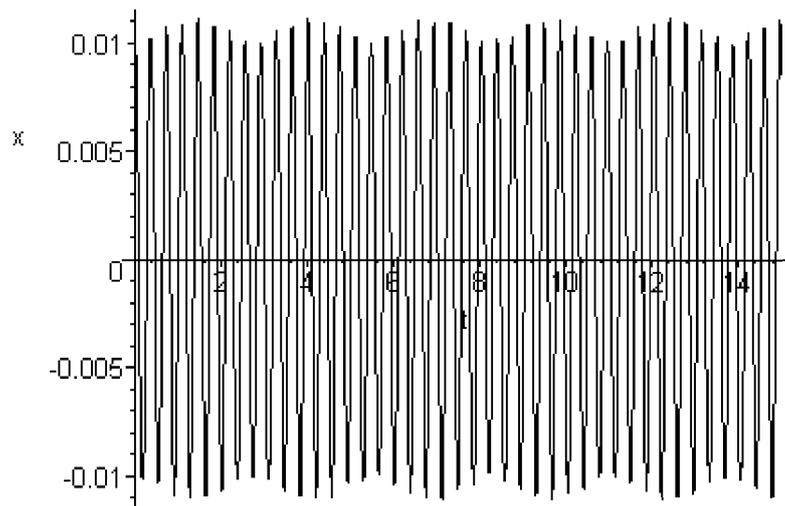


Рисунок 3.9 — Зависимость координаты x от времени

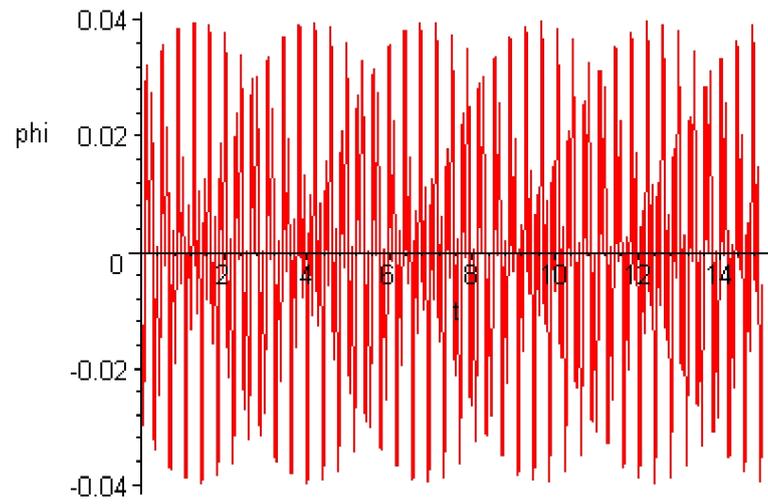


Рисунок 3.10 – Зависимость координаты φ от времени

Рекомендуемая литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний ., М.: Гос. изд. физмат.лит, 1959.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд. физ.-мат.лит., 1958. — 408 стр.
3. Сборник задач по теории колебаний / Под ред. Постникова Л.В. и Королева И.В. — М.:Наука, Глав.ред.физ.-мат.лит., 1976. — 270 стр.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Москва, Физматлит, 2002. — 292с.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б. Нелинейность: от колебаний к хаосу (задачи и учебные программы). — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — 184 с.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний: Учебное пособие для втузов. М.: Физматлит, 1987. — 384с.
7. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Editorial URSS, 2004. — 496 с.
8. Заболотнов Ю.М. Теория колебаний: Учеб. пособие. Самара, СГАУ, 1998. — 198 с.
9. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. — 255 с.