МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

МЕТОДЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

ЭЛЕКТРОННЫЙ ВАРИАНТ
КОНТРОЛЬНО-ПРОВЕРОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С А М А Р А
2010

УДК 629.7.017.1 (075)

Составители: Салмин Вадим Викторович, Старинова Ольга Леонардовна, Петрухина Ксения Вячеславовна.

Даны основные вопросы по курсу «Методы и математические модели оптимизации проектных решений» для контроля знаний и практические задания.

Предназначено для студентов специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем».

Разработано на кафедре летательных аппаратов СГАУ.

Содержание

Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию задач оптимизации.
2. Приведите основные постановки задач оптимизации.
3. Какие модели динамических систем называют непрерывными, а какие – дискретными?
4. Что такое критерий оптимальности?
5. Дайте определение функционалу и функциональным пространствам.
6. Что понимают под близостью элементов в нормированном функциональном пространстве?
7. Какие функционалы называют непрерывными?
8. Что такое вариация функционала?
9. Приведите необходимое условие экстремума функционала.
10. Что понимают под сильным и слабым экстремумами?
11. Сформулируйте простейшую задачу вариационного исчисления.
12. Сформулируйте основную лемму вариационного исчисления.
13. Как определяется вариация функционала в задаче с закрепленными концами? Приведите общий вид уравнения Эйлера и уравнения Эйлера для функционалов, зависящих от n неизвестных функций.
14. В чем заключается изопериметрическая задача?
15. Сформулируйте задачу на условный экстремум.
16. Приведите основную формулу для вариации функционала. Сделайте обобщение основной формулы для функционалов, зависящих от n неизвестных функций.
17. Сформулируйте задачи с подвижными границами и приведите условия трансверсальности.
18. Какие экстремали называют негладкими?
19. Приведите условия Вейерштрасса-Эрдмана.
20. Что такое поле экстремалей?
21. В чем заключается условие Якоби?
22. Приведите каноническую форму уравнений Эйлера. Что такое гамильтониан и сопряженные переменные.
23. Выведите уравнение Гамильтона-Якоби.
24. Что понимают под второй вариацией функционала? Приведите формулу для второй вариации в задаче с закрепленными концами.
25. Приведите необходимое условие слабого экстремума (условие Лежандра).
26. Приведите сводку необходимых и достаточных условий слабого экстремума.
27. Что такое функция Вейерштрасса?
28. Сформулируйте достаточное условие сильного экстремума.
29. Как связаны условия Вейерштрасса с условием Лежандра?
30. Сформулируйте постановку задачи оптимального управления непрерывной динамической системой.
31. Как связана задача оптимального управления с классической задачей на условный экстремум?
32. Выведите уравнения возмущенного движения динамической системы в вариациях.
33. Что понимают под игольчатой вариация управления?
34. Сформулируйте теорему об оптимальном управлении (принцип максимума Понтрягина).
35. Какими свойствами обладает гамильтониана?
36. Приведите возможные типы зависимости функции Гамильтона от управления.
37. Приведите различные типы граничных условий в задачах оптимального управления (задача с фиксированным и со свободным правым концом; задача попадания на терминальную поверхность).

38. Приведите общий алгоритм решения задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина.
39. Сформулируйте задачу об оптимальном быстродействии для линейных динамических систем и теорему Фельдбаума о числе переключений.
40. Какое программное управление линейной динамической системой с квадратичным функционалом является оптимальным?
41. Сформулируйте задачу синтеза оптимального управления линейной динамической системой с квадратичным функционалом.
42. Какие задачи оптимального управления являются вырожденными?
43. В чем заключается необходимое условие оптимальности особого управления?
44. Сформулируйте общую постановку задач оптимального управления с ограничениями на вектор состояния.
45. Что такое динамическое программирование?
46. Сформулируйте принцип оптимальности Р.Беллмана.
47. Что понимают под функцией «будущих потерь»?
48. Приведите основное рекуррентное соотношение (уравнение Беллмана).
49. Приведите уравнение Беллмана для непрерывных динамических систем.
50. Как связаны уравнение Беллмана и уравнение Гамильтона-Якоби?
51. Дайте геометрическую интерпретацию решения уравнения Беллмана (случай двух переменных).
52. Сформулируйте и приведите общий алгоритм решения задачи синтеза оптимального управления линейной непрерывной системой с квадратичным функционалом методом динамического программирования.
53. Что понимают под многошаговыми процессы управления?
54. В чем заключается метод динамического программирования в задачах управления дискретными системами?
55. Выведите уравнение Беллмана для дискретных систем.
56. Сформулируйте задачу синтеза управления для линейной дискретной системы, оптимизируемой по квадратичному функционалу.
57. В чем заключается концепция возмущенно-невозмущенного движения? Приведите решение задачи синтеза приближенно-оптимального управления.
58. Приведите основные задачи и методы параметрической оптимизации.
59. Сформулируйте необходимое и достаточное условия локального экстремума функции многих переменных.
60. В чем заключается метод Ньютона и его модификации?
61. Как применяются градиентные методы в задачах безусловной оптимизации?
62. Что понимают под градиентным спуском?
63. Объясните суть градиентных методов с постоянным шагом.
64. В чем заключается метод наискорейшего спуска?
65. В чем заключается метод сопряженных градиентов?
66. Что понимается под методом покоординатного спуска?
67. Приведите основные методы оптимизации функции при наличии ограничений.
68. В чем заключаются методы возможных направлений?
69. Что такое проективный градиентный метод?
70. Приведите примеры методов, использующих штрафные функции.
71. Приведите общий алгоритм решения двухточечной краевой задачи с помощью модифицированного метода Ньютона.

Упражнения

1. Показать, что ряд Тейлора функции $f(x)$, полученный в разложении в окрестности точки x^* с точностью до членов второго порядка малости, имеет вид

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^{\mathrm{T}}(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^{\mathrm{T}} H_f(x^*)(x - x^*).$$

2. Показать, что $\dfrac{\partial f(x)}{\partial r} = \nabla f^{\mathrm{T}}(x) \cdot r$.

3. Показать, что для дифференцируемой функции $f(x)$ определение выпуклости эквивалентно следующему: функция $f(x)$ выпукла в том и только в том случае, если для любых $x^1 \in X$, $x^2 \in X$ имеет место условие $f(x^2) \geq f(x^1) + \nabla f^{\mathrm{T}}(x^1)(x^2 - x^1)$.

4. Показать, что условие $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial r} = \nabla f^{\mathrm{T}}(x^*) \cdot r \leq 0$ является достаточным условием достижения вогнутой функции $f(x)$ в точке своего максимального значения.

5. Показать, что если $g(x)$ - выпуклая функция, то множество, определенное условием $g(x) \leq b$, где b - константа, будет выпуклым.

6. Показать, что в задаче минимизации функции $f(x)$ при ограничении $g_i(x) \leq 0$, $x_j \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ необходимые условия оптимальности принимают вид

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} x_j^* = 0; \quad \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \lambda_i^* = 0; \quad x_j^* \geq 0; \quad \lambda_i^* \geq 0; \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}.$$

7. Показать, что множество допустимых x, задаваемое системой неравенств $g_i(x) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$, выпукло, если функции $g_i(x)$ выпуклы.

8. Показать, что наличие седловой точки у функции Лагранжа $F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*)$ для всех $x \geq 0$, $\lambda \geq 0$, или, что то же самое, $\min\limits_{x \geq 0} \max\limits_{\lambda \geq 0} F(x, \lambda) = \max\limits_{\lambda \geq 0} \min\limits_{x \geq 0} F(x, \lambda)$ является, как и в задачах на условный экстремум, достаточным условием достижения функцией $f(x)$ точке x^* минимального значения при условии $g(x) \leq 0$, $x \geq 0$.

9. Показать, что в общем случае при любых $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$ имеет место неравенство $\max\limits_{\lambda} \min\limits_{x} F(x, \lambda) = \min\limits_{x} \max\limits_{\lambda} F(x, \lambda)$.

10. Показать, что для задачи минимизации функции $f(x)$ при условиях $g(x) \leq 0$, $x \geq 0$ прямая задача состоит в отыскании $P(x^*) = \min\limits_{x \geq 0} P(x)$, где $P(x) = \max\limits_{\lambda \geq 0} F(x, \lambda)$.

11. Показать, что решение двойственной задачи, заключающейся в отыскании $h(\lambda^*) = \max\limits_{\lambda \geq 0} h(\lambda)$, где $h(\lambda) = \min\limits_{x \geq 0} F(x, \lambda)$, в общем случае дает лишь оценку снизу для

решения задачи минимизации $f(x)$ при условии $g(x) \le 0$, $x \ge 0$, т.е.
$h(\lambda^*) = \max\limits_{\lambda \ge 0} \min\limits_{x \ge 0} F(x, \lambda) \le f(x^*) = \min\limits_{g(x) \ge 0,\, x \ge 0} f(x)$.

12. Показать, что в случае выпуклых функций $f(x)$ и $g_j(x)$ решения прямой и двойственной задач (если они существуют) совпадают.

13. Построить линии уровня для целевых функций:
а) $f(x) = x_1^2 + 16x_2^2$;
б) $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$;
в) $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$;
г) $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$.

14. Осуществить по отношению к функции $f(x) = x_1^2 + 16x_2^2$ переход к новым переменным таким образом, чтобы сходимость градиентных методов увеличилась.

15. Решить задачу минимизации функции $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 1$ методом сопряженных градиентов, приняв в качестве начальной точку x^0 с координатами $x_1^0 = x_2^0 = 1$. Построить траекторию поиска.

16. Изобразить на плоскости x_1, x_2 траекторию поиска минимума функции $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ различными методами поиска.

17. Сравнить качественно траектории поиска минимума функции $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ различными методами случайного поиска, задавая различные параметры соответствующих алгоритмов.

18. Показать, каким образом происходит изменение траекторий поиска минимума функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos 18x_1 - \cos 18x_2$ методом случайного поиска с направляющим конусом при изменении параметров ψ, $h_{раб}$, считая, что m достаточно велико.

19. Показать, что для задачи $\max c^{\mathrm{T}} x$ при условиях $Ax \le b$; $x \ge 0$ двойственная задача имеет вид $\min b^{\mathrm{T}} \lambda$ при условиях $A^{\mathrm{T}} x \ge c$, $\lambda \ge 0$.

20. Показать, что имеет место следующая связь между двумя задачами линейного программирования $\max c^{\mathrm{T}} x = \min b^{\mathrm{T}} \lambda$, $Ax = b$, $x \ge 0$, $A^{\mathrm{T}} \lambda \ge c$.

21. Доказать справедливость соотношения $\min\limits_{x \in X,\, y \in Y} f(x, y) = \min\limits_{x \in X} \left\{ \min\limits_{y \in Y} f(x, y) \right\}$.

22. Используя метод динамического программирования, показать, что алгоритм решения задачи $\min \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ при условиях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = \overline{1, m}$, $x_j \ge 0$, x_j - целые числа, $j = \overline{1, n}$ сводится к следующему рекуррентному соотношению:
$R_k(\xi_k^1, \xi_k^2, \ldots, \xi_k^m) = \min\limits_{0 \le x_k \le \delta_k} \left\{ f_k(x_k) + R_{k+1}(\xi_{k+1}^1, \xi_{k+1}^2, \ldots, \xi_{k+1}^m) \right\}$,
$\xi_{k+1}^1 = \xi_k^1 - a_{ij} x_k$, $\delta_k = \min\limits_{i_k} [\xi_k^1 / a_{ik}]$.

23. Решить задачу о разбиении отрезка величиной $b = 4$ на три части так, чтобы произведение их величин было максимальным.

24. Показать, что критерий оптимальности более общего вида (задача Больца) $J = \int_0^T f_0(x,u)dt + F[x(T)]$ может быть сведен к функции конечного состояния $J = \tilde{F}\left(\tilde{x}(T)\right) = x_0(T) + F[x(T)]$ по отношению к расширенному вектору $\tilde{x}^{\mathrm{T}} = \left(x_0, x^{\mathrm{T}}\right)$, где компонента x_0 определяется с помощью дифференциального уравнения $\dot{x}_0 = f_0(x,u)$ при граничном условии $x_0(0) = 0$.

25. Показать, что математическая модель неавтономной системы $\dot{x} = f(x,u,t)$, т.е. системы зависящей явно от времени, может быть сведена к автономной введением дополнительной переменной x_{n+1}, удовлетворяющей уравнению $\dot{x}_{n+1} = 1$ при граничном условии $x_{n+1}(0) = 0$.

26. Показать, что задача максимизации критерия J эквивалентна задаче минимизации критерия $-J$.

27. Показать, что критерий оптимальности вида $J = \sum_{i=1}^{N} f_i^0(x_i, u_i) + F(x_{N+1})$ может быть сведен к функции конечного состояния $J = \tilde{F}\left(\tilde{x}_{N+1}\right) = x_{N+1}^0 + F[x_{N+1}]$ по отношению к расширенному вектору $\tilde{x}^{\mathrm{T}} = \left(x_0, x^{\mathrm{T}}\right)$, где x_{N+1}^0 определяется с помощью уравнения $x_{i+1}^0 = x_i^0 + f_i^0(x_i, u_i)$ при граничном условии $x_1^0 = 0$.

28. Показать, что производная $\frac{\partial J(u)}{\partial r}$ функции $J(u)$ по любому направлению r в точке u, определяемая соотношением

$$\frac{\partial J(u)}{\partial r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u + \varepsilon r) - J(u)}{\varepsilon},$$

вычисляется по формуле $\frac{\partial J(u)}{\partial r} = \frac{\partial J(u)^{\mathrm{T}}}{\partial r} r$.

29. Показать, что производная вектор-функции $f(y(x))$ векторных аргументов y и x по вектору x может быть в матричном виде представлена следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначены матрицы соответствующих размерностей, сформированные по правилу $\frac{\partial f}{\partial x} = \left\| \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right\|$.

30. Решить задачу программирования оптимального управления двумерной системой
$x_{i+1} = x_i + 2u_i$;
$y_{i+1} = y_i - x_i^2 + u_i^2$, $i = \overline{1, N}$
из условия обращения в минимум критерия $J = -y_{N+1}$ при ограничениях $|u_i| \le 5$ и граничном условии $x_1 = 3$, $y_1 = 0$, полагая $N = 2$.
Показать, что применение принципа минимума (максимума) в данной задаче приводит к неправильному результату. Почему?

31. Показать, что в задаче управления системой $\dot{x} = f(x,u)$ из условия минимума критерия $J = \int_0^T f_0(x,u)dt + F[x(T)]$ (задача Больца) необходимые условия оптимальности
$H(\psi, x, u) = \min\limits_{\tilde{u} \in U} H(\psi, x, u)$, где $H(\psi, x, u) = \psi^{\mathrm{T}} f(x,u)$;
$\dot{x} = \dfrac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi}$; $x(0) = x_0$;
$\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x}$; $\psi(T) = \dfrac{\partial F[x(t)]}{\partial x}$;
сохраняются с точностью до определения гамильтониана, который теперь принимает следующий вид:
$H(\psi, x, u) = f_0(x,u) + \psi^{\mathrm{T}} f(x,u)$.

32. Показать, что в задаче оптимизации управления системой $\dot{x} = f(x,u)$ из условия минимума критерия $J = F[x(T)]$ при дополнительном ограничении на вектор конечного состояния вида $g[x(T)] = 0$ необходимые условия оптимальности
$H(\psi, x, u) = \min\limits_{\tilde{u} \in U} H(\psi, x, u)$, где $H(\psi, x, u) = \psi^{\mathrm{T}} f(x,u)$;
$\dot{x} = \dfrac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi}$; $x(0) = x_0$;
$\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x}$; $\psi(T) = \dfrac{\partial F[x(t)]}{\partial x}$;
сохраняются с точностью до определения вектора $\psi(T)$, который имеет вид
$\psi(T) = \dfrac{\partial F[x(T)]}{\partial x} + \dfrac{\partial g[x(T)]}{\partial x}\lambda$.
Здесь λ - вектор множителей Лагранжа, удовлетворяющий условию $g[x(T)] = 0$.

33. Показать, что в задаче оптимизации системы $\dot{x} = f(x,u)$ с критерием $J = \int_0^T f_0(x,u)dt$ (задача Лагранжа) краевые условия, связанные с компонентами сопряженного вектора $\psi(T)$ имеют вид:
$\psi_j(T) = 0$, если $x_j(T)$ свободно;
$\psi_j(T)$ свободно, если $x_j(T)$ задано.

34. Показать, что гамильтониан на оптимальной траектории постоянен, т.е. для всех $t \in [0, T]$
$H(\psi, x, u) = const$.

35. Показать, что если время окончания управления T свободно, то гамильтониан на оптимальной траектории тождественно равен нулю:
$H(\psi, x, u) = 0$ для всех $t \in [0, T]$.

36. Найти оптимальную программу управления $u(t)$, которая обеспечивает перевод системы общего вида $\dot{x} = Ax + Bu$ из состояния $x(0)$ в состояние $x(T)$ при минимальном значении критерия $J = \int_0^T \left(x^{\mathrm{T}} Q x + u^{\mathrm{T}} W u\right) dt$, где x, u - векторы; A, B, Q, W - заданные матрицы, зависящие от времени.
Возможно ли существование особого управления в данной задаче? При любой ли матрице W существует оптимальное управление?

37. Сформулировать необходимые условия оптимальности в задаче управления системой $\dot{x} = f(x,u)$, $u \in U$, $t \in [0,T]$, $x(0) = x_0$ при дополнительном ограничении $p(x,u) = 0$ из условия максимума критерия $J = F[x(T)]$.

38. Показать, что в задаче управления системой $\dot{x} = f(x,u)$, $u \in U$, $t \in [0,T]$, $x(0) = x_0$ при дополнительном ограничении $g(x) = 0$ с минимумом критерия $J = \int_0^T f_0(x,u)dt + F[x(T)]$ необходимые условия оптимальности

$$H = \psi^{\mathrm{T}} f(x,u);$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial u^1}\right)^{-1}\frac{\partial H}{\partial u^1};$$

$$\psi(T) = \frac{\partial F(t)}{\partial x}$$

сохраняются с точностью до определения гамильтониана, который теперь принимает вид $H = f_0(x,u) + \psi^T f(x,u)$.

39. Показать, что наличие дополнительных ограничений на фазовый вектор в момент $t = T$ вида $\varphi[x(T)] = 0$ приводит к изменению в необходимых условиях оптимальности лишь краевого условия на сопряженный вектор $\psi(T)$, которое теперь принимает вид

$$\psi(T) = \frac{\partial F[x(t)]}{\partial x} + \frac{\partial \varphi[x(t)]}{\partial x}\lambda,$$

где λ - вектор множителей Лагранжа.

40. Убедиться в справедливости метода поэтапной оптимизации:
а) показать, что для любых $x \in X(x)$, $y \in Y(y)$ имеет место равенство

$$\min_{x \in X,\, y \in Y} \varphi(x,y) = \min_{x \in X}\min_{y \in Y} \varphi(x,y);$$

б) получить аналог соотношения $\min_{x \in X,\, y \in Y} \varphi(x,y) = \min_{x \in X}\min_{y \in Y} \varphi(x,y)$ для случая, когда на x и y накладывается смешанное ограничение вида $(x,y) \in Z(x,y)$;
в) получить соотношение $R_i(x_i) = \min_{u_i \in U_i,\, u_j \in U_j} \underline{\min}_{j=i+1,N} F(x_{N+1})$.

41. Показать, что для задачи управления системой $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1, N}$ с минимизацией критерия $J = \sum_{i=1}^{N} f_i^0(x_i, u_i) + F(x_{N+1})$ достаточные условия оптимальности могут быть представлены в виде рекуррентного соотношения

$$R_i(x_i) = \min_{u_i \in U_i}\left\{f_i^0(x_i, u_i) + R_{i+1}[x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)]\right\}$$

при граничном условии $R_{N+1} = F(x_{N+1})$.

42. Убедиться в том, что ограничения, накладываемые на фазовый вектор вида $x_i \in X_i$, не изменяют структуры достаточных условий оптимальности.

43. Решить задачу выбора оптимального алгоритма однопараметрической коррекции, принимая в качестве модели скалярное уравнение

$$x_{i+1} = x_i + B_i u_i,\ i = \overline{1, N}.$$

Рассмотреть следующие варианты критериев оптимальности:

1) $J = x_{N+1}^2$;

2) $J = |x_{N+1}|$;

3) $J = \alpha \sum_{i=1}^{N} |u_i| + x_{N+1}^2$;

4) $J = \alpha \sum_{i=1}^{N} u_i^2 + x_{N+1}^2$.

Сравнить между собой получаемые алгоритмы управления.

44. Решить задачу выбора оптимального алгоритма управления линейной системой $x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i$ из условия обращения в минимум критерия

$$J = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^T Q_i x_i + u_i^T W_i u_i\right) + x_{N+1}^T \lambda x_{N+1}.$$

45.Показать, что для задачи управления системой

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ t \in [0, T]$$

с критерием оптимальности более общего вида

$$J = \int f^0(x, u, t)\,dt + F[x(T)]$$

достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана принимают вид

$$-\frac{\partial R(x,t)}{\partial t} = \min_{u \in U}\left\{ f^0(x,u,t) + \left[\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}\right]^T f(x,u,t)\right\}$$

с прежним граничным условием

$$R(x, T) = F[x, T].$$

46. Показать, что для задачи синтеза оптимального управления $u(x,t)$, переводящего систему $\dot{x} = f(x,u,t)$, $t \in [0, T]$ в заданное (непосредственно или косвенно) конечное состояние $x(T)$ за минимальное время T, т.е. для задачи синтеза оптимального по быстродействию управления системой, уравнение Беллмана принимает вид

$$-1 = \min_{u \in U} \frac{\partial T(x)^T}{\partial x} f(x, u, t),$$

где через $T(x)$ обозначено минимальное время перевода системы из текущего состояния x в состояние $x(T)$.

47.Показать, что при использовании критерия вида

$$J=\int_0^T\left(x^TQx+u^TWu\right)dt+x(T)^T\lambda x(T)$$

алгоритм оптимального управления системой $\dot{x}=Ax+Bu$ имеет по-прежнему структуру $u=-W^{-1}B^T\Lambda x=-Lx$.
Изменение претерпевает лишь уравнение $-\dot{\Lambda}=\Lambda A+A^T\Lambda-\Lambda BW^{-1}B^T\Lambda$ для матрицы Λ. Получить это уравнение.

48. Решить задачу синтеза оптимального по быстродействию управления угловой скоростью летательного аппарата, принимая в качестве математической модели скалярное уравнение $\dot{\omega}=u \quad |u|\le u_{\max}$ и считая, что $\omega(T)=0$.

49. Исследовать задачу синтеза оптимального по быстродействию управления летательным аппаратом, принимая в качестве модели уравнения
$\dot{\varphi}=\omega, \quad \dot{\omega}=u, \quad |u|\le u_{\max}$,
где φ – угол разворота; u – угловая скорость летательного аппарата.

Показать, что уравнению Беллмана в данном случае удовлетворяет следующая функция будущих потерь:

$$T(\varphi,\omega)=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{1}{2}\omega^2+\varphi}+\omega, & \varphi\ge\dfrac{\omega|\omega|}{2};\\ 2\sqrt{\dfrac{1}{2}\omega^2+\varphi}-\omega, & \varphi<\dfrac{\omega|\omega|}{2},\end{cases}$$

а следовательно, оптимальный закон управления имеет вид

$$u=-sign\left(\varphi+\frac{\omega|\omega|}{2}\right).$$

50. Решить задачу синтеза оптимального управления летательным аппаратом, принимая в качестве математической модели уравнения
$\dot{x}_1=x_2;$
$\dot{x}_2=-\alpha x_2+bu, \quad |u|\le u_{\max}$,
(где параметры x_1, x_2 определяют угловое отклонение аппарата от заданного направления и угловую скорость; u – управляющее воздействие; a, b, $u_{\max}$ - заданные величины (для простоты можно принять $a=1, b=1,$ $u_{\max}$ =1)), а в качестве критерия оптимальности – величину

$$J=\int_0^\infty\left(x_1^2+x_2^2+u^2\right)dt.$$

Литература

1. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
2. Беллман З., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
3. Брайсон А., Хо-Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Высшая школа, 1979.
5. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
6. Лебедев А.А. Введение в анализ и синтез систем. – М.: Изд-во МАИ, 2001.
7. Моисеев Н.Н., Иванов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.