САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

САМАРА 1994

Составитель А. А. Дегтярев

УДК 681.51.03

Методы исследования наблюдаемости динамических систем: Метод. указания /Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. А. А. Дегтярев. Самара, 1994. 20 с.

Предназначены для организации контролируемой самостоятельной работы студентов по специальности 01.02 (прикладная математика).

Содержат краткие теоретические сведения, задачи и библиографический список по следующим разделам современной теории управления: пространство состояний динамической системы; наблюдаемость динамических систем в пространстве состояний.

Подготовлены на кафедре технической кибернетики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева

Рецензент проф. С. А. Прохоров

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ, ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ, УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Говоря о задаче управления некоторой физической системой, естественно предположить, что этой системе присуща динамика, т. е. набор физических параметров, характеризующих систему, зависит от времени.

Предположим, что систему характеризует набор параметров $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, каждый из которых является функцией времени. Будем называть такую систему динамической [1].

Объединим параметры $x_i(t)$; $i = \overline{1,n}$ в вектор

$\bar{x}(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right]^T$,

где T - символ транспонирования.

Вектор-функцию $\bar{x}(t)$ будем называть вектором состояния системы, если динамика этого вектора при $t > t_0$ полностью определяется его значением при $t = t_0$ и значениями функций, характеризующих внешние воздействия на систему, при $t \geq t_0$.

Значение вектора состояния $\bar{x}(t)$, соответствующее моменту времени $t > t_0$, будем называть состоянием системы в момент t, а значение $\bar{x}(t_0)$ - начальным состоянием системы.

Множество всех возможных состояний системы назовем пространством состояний и будем обозначать его через X.

Уравнение, описывающее динамику вектора состояния для $t > t_0$ при заданном начальном состоянии, будем называть уравнением состояния системы.

Уравнение состояния может иметь вид обыкновенного дифференциального уравнения, дифференциального уравнения в частных производных, интегрального уравнения, разностного уравнения, системы уравнений одного или нескольких названных типов.

Здесь мы будем рассматривать динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями 1-го порядка.

Приведем примеры уравнений состояния [1].

Пример 1. *Детерминированная непрерывная динамическая система.*

Уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \ t \rangle t_0; \tag{1}$$

$\bar{x}(t) \in X, \ \bar{u}(t) \in U \ \forall t \rangle t_0$.

Начальное условие

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \tag{2}$$

Здесь $\bar{u}(t)$ - вектор управляющих воздействий размерности m,

U- пространство управляющих воздействий.

$f(\bar{x}, \bar{u}, t)$ - вектор-функция размерности n. Предполагается, что функция $f(\bar{x}, \bar{u}, t)$ принадлежит классу функций, гарантирующему существование и единственность решения уравнения (1) при условии (2).

Постановка задачи управления наряду с уравнением (1) и условием (2) может содержать соотношения, отражающие ограничения на вектор состояния и вектор управления.

Большое практическое значение имеет частный случай уравнения (1), когда функция f имеет линейный вид

$$f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + \bar{w}(t), \tag{3}$$

где $A(t), B(t)$ - матричные функции времени размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно;

$\bar{w}(t)$ - вектор-функция внешних воздействий.

Если матрицы A и B - числовые, т. е. их элементы - константы, то такую линейную детерминированную систему называют стационарной.

Использование детерминированного описания физического процесса оправдано тогда, когда случайные воздействия на процесс пренебрежимо малы в сравнении с неслучайными.

Пример 2. Стохастическая непрерывная динамическая система.

Уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t)\bar{u}(t), t) + g(\bar{x}(t), t)\,\bar{\xi}(t);$$

$$t \rangle t_0; \tag{4}$$

$\bar{x}(t) \in X, \bar{u}(t) \in U \ \ \forall \ t \rangle t_0$.

Начальное условие $\bar{x}(t_0) = x_0$.

Здесь в отличие от предшествующей модели учитываются случайные воздействия на систему, характеризуемые вектором $\bar{\xi}(t)$. Предполагается, что $\bar{\xi}(t)$ - r-мерный случайный процесс типа белого шума с моментами:

$M\{\bar{\xi}(t)\} = 0$; $R\xi(t_1, t_2) = M\{\bar{\xi}(t_1)\bar{\xi}^T(t_2)\} = V(t_1)\delta(t_1 - t_2)$; $V(t_1)$ - матричная функция времени размером $r \times r$; $\delta(t)$ - δ-функция Дирака; f и g - неслучайные векторная и матричная функции времени.

Наиболее изученной к настоящему времени является линейная стохастическая система, уравнение состояния которой имеет вид

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + C(t)\bar{\xi}(t), \tag{5}$$

где $A(t), B(t), C(t)$ - неслучайные матричные функции времени.

Если матрицы A, B, C -числовые, а случайный процесс $\bar{\xi}(t)$ является стационарным, то и сама система называется стационарной.

Пример 3. *Детерминированная дискретная динамическая система.*

Такие системы описываются разностными уравнениями вида

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, \bar{u}_k, k), \tag{6}$$

где $\bar{x}_k$ - обозначение вектора состояния в дискретный момент времени t_k.

Начальное условие для уравнения (6) имеет вид

$$\bar{x}_0 = \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \text{ -const.} \tag{7}$$

Пример 4. *Стохастическая дискретная динамическая система.*

Уравнение состояния имеет вид

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, \bar{u}_k, k) + g(\bar{x}_k, k)\,\bar{\eta}_k; \tag{8}$$

$$\bar{x}_0 = \bar{\alpha},$$

где $\bar{\eta}_k$ – l-мерный дискретный белый шум с моментами

$$M\{\bar{\eta}_k\} = 0;\ R_{ij} = M\{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j^T\} = V_i\,\delta_{ij};$$

V_i - дисперсионная матрица случайного вектора $\bar{\eta}_i$; δ_{ij} - дельта-функция Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } i \ne j; \\ 1, \text{если } i = j. \end{cases}$

Приведенные примеры уравнений состояния наиболее часто встречаются на практике, хотя и не исчерпывают все возможные варианты [2 – 6].

Если математическую модель динамической системы удается представить единым векторно-матричным уравнением состояния, например, одного из вышеперечисленных типов, то это открывает возможность использования типовых методов исследования и решения задачи управления.

Одним из приемов, используемых для записи математической модели динамической системы в форме уравнения состояния с соответствующим начальным условием, является расширение пространства состояний. Рассмотрим пример.

Пусть динамика объекта, подверженного воздействию внешних сил случайного характера, описывается уравнением

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + g(\bar{x}(t), t)\,\bar{\xi}(t) \tag{9}$$

с начальным условием $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$,

где $\bar{\xi}(t)$ - случайный процесс.

Предположим, что $\bar{\xi}(t)$ не является белым шумом, а описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = f_1(\bar{\xi}(t), t) + \bar{\xi}_1(t) \tag{10}$$

с начальным условием $\bar{\xi}(t_0) = \bar{\xi}_0$,

где $\bar{\xi}_1(t)$ - белый шум, $\bar{\xi}_0$ - случайный вектор. Требуется записать модель динамики объекта в форме уравнения состояния вида (4).

Для решения задачи определим вектор состояний следующим образом:

$$\bar{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\xi}(t) \end{bmatrix},$$

а также введем обозначения

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} f + g\bar{\xi} \\ f_1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{x}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{\xi}_0 \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (9), (10) легко записывается единым уравнением состояния

$$\frac{d\bar{\bar{x}}}{dt} = \tilde{f}(\bar{\bar{x}}(t), \bar{u}(t), t) + \bar{\bar{\xi}}(t) \tag{11}$$

с начальным условием

$$\bar{\bar{x}}(t_0) = \bar{\bar{x}}_0. \tag{12}$$

Приведем различные виды задач к разд. 1.

Задача 1. Является ли вектор $\bar{x} = [x_1, x_2]^T$ вектором состояния динамической системы, описываемой уравнениями:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + u_1; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + u_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1(0) = \alpha_1; \\ x_2(0) = \alpha_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + u_1; \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 + x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1(0) = \alpha_1; \\ x_2(0) = \alpha_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt}(0) = \alpha_3. \end{cases}$

Если нет, то указать вектор состояния и записать модель в виде единого векторно-матричного уравнения состояния с начальным условием.

Задача 2. Перечислить переменные, которые в совокупности определяют состояние следующей системы:

а) $\dfrac{d^3y}{dt^3} = 2\dfrac{dy}{dt} + y + u;$

б) $\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + a(t)x_2 = u_1; \\ \dfrac{dx_2}{dt} + b(t)x_1 + c(t)x_2 = u_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 + u; \\ \dfrac{dx_2}{dt} + \dfrac{dx_3}{dt} = x_1; \\ \dfrac{dx_3}{dt} + 2\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$

Записать уравнение состояния. в векторно-матричном виде

Задача 3. Представить дискретную модель уравнением состояния, если это возможно:

а) $\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = 2x_k + \varphi_k u_k,\ k = 0,1,2,\ldots;$

б) $\begin{cases} \dfrac{x_{k+1,i} - x_{k,i}}{\tau} = \dfrac{x_{k,i+1} - 2x_{k,i} + x_{k,i-1}}{h^2} + u_{k,i}; \\ \qquad k = 0,1,2,\ldots;\ i = \overline{1, I-1}; \\ x_{0,i} = \psi_i,\ i = \overline{0, I}; \\ \left.\begin{aligned} x_{k,0} &= \alpha_k \\ x_{k,I} &= \beta_k \end{aligned}\right\},\ k = 1,2,\ldots; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x_{k+1,i} - x_{k,i}}{\tau} = \dfrac{x_{k+1,i+1} - 2x_{k+1,i} + x_{k+1,i-1}}{h^2} + u_{k,i}; \\ \qquad k = 0,1,2,\ldots;\quad i = \overline{1, I-1}; \\ x_{0,i} = \psi_i,\quad i = \overline{0, I}; \\ x_{k,0} = \alpha_k,\quad x_{k,I} = \beta_k,\quad k = 1,2,\ldots; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\tau^2} - x_k = u_k;\quad k = 1,2,\ldots. \\ x_0 = a; \\ x_{100} = b. \end{cases}$

2. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Наряду с уравнением состояния, важную роль в теории управления играет уравнение наблюдения, которое отражает связь между результатами измерений и значениями вектора состояния.

Мы будем рассматривать уравнение наблюдения в виде

$$\bar{z}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \tag{13}$$

где $\bar{z}(t)$ - вектор размерности l.

Определение. Непрерывную динамическую систему называют вполне наблюдаемой на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если по значениям $\bar{z}(t)$ и $\bar{u}(t)$ на этом отрезке можно однозначно определить (восстановить) состояние $\bar{x}(t_0)$.

Если состояние $\bar{x}(t_0)$ определить однозначно не удается, то говорят о частичной наблюдаемости.

Рассмотрим также другое определение наблюдаемости динамической системы, связанное с возможностью измерять как значения $\bar{z}(t)$, так и значения производных $d^i\bar{z}(t)/dt^i$ при $i=\overline{1,S}$ [1].

Определение. Непрерывную динамическую систему называют вполне наблюдаемой в момент времени t при измерении S производных, если по значениям $d^iz(t)/dt^i$ и, $d^iu(t)/dt^i$, $i=\overline{0,S}$ можно однозначно определить вектор состояния $x(t)$.

Теперь рассмотрим дискретную систему. Для такой системы уравнение наблюдения записывается в виде

$$\bar{z}_k = h(\bar{x}_k, \bar{u}_k, k). \qquad (14)$$

Определение. Дискретная динамическая система называется вполне наблюдаемой при S последовательных измерениях, если по значениям $\bar{z}_k$ и $\bar{u}_k$, $k=\overline{k_0, k_0+S-1}$ можно однозначно определить состояние $\bar{x}_{k_0}$.

Свойство наблюдаемости динамической системы является весьма важным с практической точки зрения, ибо управлять любой системой можно лишь тогда, когда обеспечена возможность получения информации о состоянии системы в процессе движения, т. е. существует обратная связь.

Для исследования наблюдаемости системы используют критерии наблюдаемости.

2.1. Локальный критерий полной наблюдаемости в момент t непрерывной динамической системы

Пусть динамическая система описывается уравнением состояния (1), а закон наблюдения за состоянием системы имеет вид (13).

Предположим, что наряду с функцией $\bar{z}(t)$ имеется возможность измерять производные $\frac{d^i\bar{z}(t)}{dt^i}$ до порядка S включительно.

Считая функцию $h(\bar{x},\bar{u},t)$ дифференцируемой по своим аргументам, найдем выражение для полной производной

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \overset{(1)}{=} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} f(\bar{x},\bar{u},t) + \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

Определим оператор

$$Lh = \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} f + \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (15)$$

Дифференцируя последовательно уравнение наблюдения (13) S раз и используя обозначение (15), получим систему уравнений

$$\begin{cases} h(\bar{x},\bar{u},t) = \bar{z}; \\ Lh(\bar{x},\bar{u},t) = \dfrac{d\bar{z}}{dt}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L^S h(\bar{x},\bar{u},t) = \dfrac{d^S\bar{z}}{dt^S}. \end{cases} \qquad (16)$$

Очевидно, что требование полной наблюдаемости в момент t равносильно требованию единственности решения системы (16) относительно состояния $\bar{x}(t)$ при условии, что функция $\bar{u}(t)$ известна.*) К сожалению, пока не существует необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости систем нелинейных уравнений общего вида. Однако известно локальное

*) Проблема существования решения системы уравнений (16) здесь не возникает, т. к. значения $\bar{z}(t)$, $\frac{d\bar{z}(t)}{dt},\dots,\frac{d^S\bar{z}(t)}{dt^S}$ - есть точные косвенные измерения состояния $\bar{x}(t)$ и, следовательно, это состояние всегда является одним из решений указанной системы.

необходимое и достаточное условие, которое заключается в выполнении следующего равенства [1]:

$$rang\left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}h\right)^T, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}Lh\right)^T, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}L^S h\right)^T\right]_{\bar{x}^*} = n, \tag{17}$$

где $\bar{x}^*$ - центр локализации

Локальность условия (17) заключается в том, что выполнение этого условия гарантирует однозначную разрешимость системы (16) относительно $\bar{x}(t)$ лишь в достаточно малой окрестности точки $\left[(\bar{z}^*)^T, \left(\frac{d\bar{z}^*}{dt}\right)^T, \dots, \left(\frac{d^S\bar{z}^*}{dt^S}\right)^T\right]^T$, где $\bar{z}^* = h(\bar{x}^*, \bar{u}, t)$, $\bar{u}(t)$ - известное управление.

Теперь рассмотрим вопрос практического применения критерия (17) для исследования наблюдаемости системы.

Если размерность вектора $\bar{z}(t)$, а следовательно, вектор-функции $h(\bar{x}, \bar{u}, t)$ не меньше n, т. е. $l \geq n$ то сначала следует проверить условие $rang\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}}h\right]^T_{\bar{x}^*} = n$. В случае невыполнения этого условия, а также если $l < n$, необходимо использовать возможность измерения (или вычисления) $\frac{dz(t)}{dt}$ для получения дополнительной информации о состоянии системы. В этом случае для решения проблемы наблюдаемости нужно провести проверку условия $rang\left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}h\right)^T, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}Lh\right)^T\right]_{\bar{x}^*} = n$. Если это условие выполняется, то делается вывод о полной локальной наблюдаемости динамической системы в момент t при измерении производной первого порядка. В противном случае используется возможность получения дополнительной информации о состоянии системы при измерении (вычислении)

наряду с первой, еще и второй производной $\frac{d^2\bar{z}(t)}{dt^2}$. При этом локальный критерий наблюдаемости (17) будет, очевидно, выглядеть следующим образом:

$$rang\left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}h\right)^T, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}Lh\right)^T, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}L^2 h\right)^T\right]_{\bar{x}^*} = n;$$

Действуя таким образом, мы либо докажем полную наблюдаемость системы (в локальном смысле) при измерении производных $\frac{d^i\bar{z}(t)}{dt^i}$ до некоторого порядка i ($i \leq S$), либо система окажется лишь частично наблюдаемой при выбранном способе наблюдения.

Следует отметить целесообразность соблюдения условия $S \leq n - 1$, ибо последующее увеличение порядка производных $\frac{d^i\bar{z}(t)}{dt^i}$ $(i > n-1)$ не позволит получить дополнительной информации о состоянии системы [1,2].

Практическое использование критерия (17) возможно лишь при условии достаточной гладкости функций $h(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $f(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $\bar{u}(t)$.

2.2. Критерий Калмана полной наблюдаемости в момент t линейной непрерывной стационарной системы

Критерий, который будет здесь получен, носит нелокальный характер.

Пусть уравнение состояния системы и уравнение наблюдения имеют вид:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + \bar{w}(t); \tag{18}$$

$$\bar{z}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) + \bar{v}(t), \tag{19}$$

где A, B, C, D - числовые матрицы;

$\bar{w}(t), \bar{v}(t)$ - неслучайные вектор-функции, обладающие необходимой степенью гладкости.

Предположим, что, во-первых, имеется возможность измерения (вычисления) производных $\frac{d^i \bar{z}(t)}{dt^i}$, $i = \overline{1,S}$. Во-вторых, вектор управления $\bar{u}(t)$ и его производные необходимого порядка известны.

Перепишем уравнение наблюдения (19) в виде

$$C\bar{x} = \bar{z}(t) - D\bar{u}(t) - \bar{v}(t). \tag{20}$$

Последнее уравнение запишем как

$$C\bar{x} = \bar{\eta}_0(t), \tag{21}$$

где $\bar{\eta}_0(t) = \bar{z}(t) - D\bar{u}(t) - \bar{v}(t)$.

Если продифференцировать уравнение (21) по t и использовать уравнение состояния (18), то получим

$$C\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{\eta}_0(t)}{dt} \Leftrightarrow C(A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{w}) = \frac{d\bar{\eta}_0(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow CA\bar{x} = \frac{d\bar{\eta}_0(t)}{dt} - CB\bar{u}(t) - C\bar{w}(t).$$

Последнее уравнение запишем короче как

$$CA\bar{x} = \bar{\eta}_1(t), \tag{22}$$

где $\bar{\eta}_1(t) = \frac{d\bar{\eta}_0(t)}{dt} - CB\bar{u}(t) - C\bar{w}(t)$.

Проводя последующие дифференцирования и действуя аналогично предыдущему, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^S \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_0 \\ \bar{\eta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_S \end{bmatrix} \tag{23}$$

Эта система имеет по крайней мере одно решение - ее состояние $\bar{x}(t)$ в момент t. Но здесь принципиально важным является свойство единственности решения. Из линейной

алгебры хорошо известно [7], что необходимым и достаточным условием единственности решения системы уравнений (23) является равенство

$$rang \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^S \end{bmatrix} = n. \tag{24}$$

Важно заметить, что при $S \geq n$ следует пользоваться критерием (24) с заменой S на $n-1$, ибо добавление клеток CA^n, CA^{n+1} и т. д. к матрице $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ не приведет к изменению ее ранга.

Покажем это. Пусть $\psi(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A. Поскольку матрица A имеет размерность $n \times n$, то многочлен имеет степень n. Известно [7], что матрица A обращает в тождество матричное уравнение

$$\psi(\Lambda) = 0,$$

т. е. $\psi(A) \equiv 0$, или $a_1 E + a_2 A + \ldots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n \equiv 0$.

Тогда можно записать

$$A^n \equiv -(a_1 E + a_2 A + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}). \tag{25}$$

Из последнего тождества следует, что матрица A^n линейно выражается через матрицы E, A, A^2, ..., A^{n-1}. Если умножить тождество (25) на A, то легко убеждаемся, что матрица A^{n+1} также может быть представлена линейной комбинацией матриц

$E, A, \ldots, A^{n-1}$. Очевидно, что последнее относится ко всем матрицам A^j, $j \geq n$. Но тогда действительно

$$rang\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \\ CA^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^j \end{bmatrix} = rangC\begin{bmatrix} E \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A^{n-1} \\ A^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A^j \end{bmatrix} = rangC\begin{bmatrix} E \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A^{n-1} \end{bmatrix} = rang\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

При практическом применении критерия (24) сначала следует проверить условие $rang\, C = n$ и, если оно не выполняется, то перейти к проверке условия $rang\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = n$ и т. д. В конце концов, если на некотором этапе условие критерия выполняется, то можно утверждать, что система вполне наблюдаема в момент t. В противном случае, т. е. если $rang\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} < n$, то система будет лишь частично наблюдаемой.

Следует отметить, что критерий (24) является также и критерием полной наблюдаемости на отрезке $[t_0, t_1]$ для линейных стационарных систем. Доказательство этого факта можно найти, например, в работе [2].

Критерий (24) справедлив и для дискретных систем вида

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + B\bar{u}_k + \bar{w}_k, \tag{26}$$

$k = k_0, k_0 + 1, \ldots$

при законе наблюдения

$$\bar{z}_k = C\bar{x}_k + D\bar{u}_k + \bar{v}_k. \tag{27}$$

Ниже в одной из задач предложено провести доказательство этого факта.

Приведем различные виды задач к разд. 2.

Задача 1. Является ли система вполне наблюдаемой в момент t, если ее движение описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + u, \end{cases}$$

а закон наблюдения имеет вид

а) $z = x_2$;   б) $z = x_1 + x_2$.

Предполагается возможным вычисление производной $\dfrac{dz(t)}{dt}$.

Задача 2. Динамика объекта описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = |x_2| + u; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Предполагая возможным измерение производной $\dfrac{dz(t)}{dt}$, провести исследование наблюдаемости динамического объекта при следующих законах наблюдения:

а) $z = x_2^2$;   б) $z = x_1$.

Задача 3. Исследовать наблюдаемость динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1^2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + u \end{cases}$$

при следующих законах наблюдения:

а) $z = x_1$; б) $\begin{cases} z_1 = x_1; \\ z_2 = x_2. \end{cases}$

Есть ли необходимость вычисления производных $\frac{d\bar{z}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}$ и т. д. для получения дополнительной информации о состоянии $\bar{x}(t)$?

Задача 4. До какого порядка должны измеряться производные $\frac{d^i\bar{z}}{dt^i}$, чтобы система

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + u_2(t); \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 + u_1(t); \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 \end{cases}$$

была вполне наблюдаемой, если уравнение наблюдения имеет следующий вид:

а) $z = x_1$; б) $z = x_2 + x_3$; в) $\begin{cases} z_1 = x_2; \\ z_2 = x_3. \end{cases}$

Задача 5. Провести исследование наблюдаемости динамической системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + u_1(t); \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + u_2(t) \end{cases}$$

при следующих законах наблюдения:

а) $z = x_1$; б) $z = x_2$ в) $z = x_1 + x_2$; г) $\begin{cases} z_1 = x_2; \\ z_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$

Задача 6. Является ли система

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + 2x_1 + 2x_2 = u(t); \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0 \end{cases}$$

полностью наблюдаемой при законе наблюдения

а) $z = x_2$; б) $z = \frac{dx_2}{dt}$.

Задача 7. Развитие динамического процесса описывается следующей системой уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} = x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = x_1 + u(t); \\ \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = x_1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 2x_2 + u(t); \\ \frac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$

Для получения информации о состоянии системы имеется прибор, позволяющий проводить измерение одной из компонент вектора состояния. Какую компоненту следует измерять, чтобы обеспечить полную наблюдаемость системы?

Задача 8. Доказать, что критерий (24) справедлив для дискретных систем вида (26) при законе наблюдения (27).

Задача 9. Исследовать наблюдаемость дискретной системы

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k); \\ x_2(k+1) = x_1(k+1) - x_2(k), \end{cases}$$

если имеется возможность наблюдать компоненту а) $x_1(k)$; б) $x_2(k)$.

Задача 10. Какое количество последовательных замеров следует производить, чтобы гарантировать однозначное восстановление вектора состояния системы

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u_1(k); \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(k); \\ x_3(k+1) = x_3(k) + x_2(k), \end{cases}$$

если: а) измеряется величина $x_1(k)$;

б) измеряется величина $x_2(k)$;

в) измеряется сумма $x_1(k) + x_3(k)$.

Библиографический список

1. Справочник по теории автоматического управления /Под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1987.

2. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.

3. *Солодовников В. В.* Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1985.

4. *Иванов В. А., Ющенко А. С.* Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука, 1983.

5. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Наука, 1982.

6. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.

7. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Составитель Д е г т я р е в Александр Александрович

Редактор Т. И. К у з н е ц о в а
Техн. редактор Г. А. У с а ч е в а
Корректор Т. И. Щ е л о к о в а

Лицензия ЛР № 020301 от 28.11.91.

Подписано в печать 30.06.94. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 1,2. Усл.кр.-отт. 1,3. Уч.-изд.л. 1,25.
Тираж 80 экз. Заказ 243. Арт. С-45мр/94.

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.