ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

САМАРА 2006

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*Методические указания
к курсовой работе по математике*

САМАРА 2006

Составитель *Ю.Л. Файницкий*

УДК 517.1 (075)

Методы математического анализа: Метод. указания к курсовой работе по математике /Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Ю.Л. Файницкий*. Самара, 2006. - 32 с.

Методические указания содержат материалы, обеспечивающие выполнение курсовой работы по математике. Работа посвящена изучению основных методов математического анализа: точного и приближенного решения дифференциальных уравнений, исследования сходимости числовых и функциональных рядов, вычисления кратных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 160201, 220305, 150301 факультета летательных аппаратов СГАУ, рабочей программой которых предусматривается выполнение курсовой работы в третьем семестре.

Печатаются по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензент Н. Л. Аксенова

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

При выполнении курсовой работы необходимо не только изучить основы теории и верно выполнить все выкладки, но и грамотно оформить работу. Настоящие методические указания содержат сведения о структуре курсовой работы и основных моментах правил ее оформления.

Студенту, приступающему к выполнению работы, следует в первую очередь ознакомиться с ее содержанием. С этой целью достаточно просмотреть четвертый раздел данных методических указаний. Согласно приведенным здесь сведениям курсовая работа состоит из расчетов, которые проводятся в аналитической или численной форме, и изучения и повторения соответствующих положений и соотношений математического анализа. Необходимые теоретические материалы содержатся в первом и четвертом разделах настоящих указаний.

Далее необходимо тщательно изучить правила оформления работы: запись заголовков, нумерацию разделов, формул, оформление рисунков и таблиц и т.п. (второй и третий разделы указаний). Практика показывает что студент, который не уделяет этому достаточного внимания, вынужден перерабатывать те или другие материалы курсовой работы, что приводит к значительным потерям времени.

Выполнив раздел работы в черновом виде, после проверки его преподавателем необходимо записать данный материал окончательно в чистовой форме. Когда все разделы будут выполнены и работа оформлена в полном объеме, она может быть представлена к защите.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

1. Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение первой степени относительно искомой функции и ее производной, то есть соотношение вида

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

2. Определение. Уравнением Бернулли называется соотношение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $n \neq 0, n \neq 1$

3. Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $u(x,y)$, что

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

4. Определение. Если требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x,y),$$

удовлетворяющее заданному начальному условию

$$y(x_0) = y_0,$$

то говорят, что необходимо решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

5. Определение. Если требуется найти решение уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то говорят, что необходимо решить задачу Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.

6. Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным интегрированием его частей:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \ \ y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$$

и т.д.

7. Дифференциальное уравнение

$$F(x, y', y'') = 0$$

не содержит искомой функции y. Порядок уравнения понижается путем ведения новой искомой функции:

$$y' = p(x), \ \ y'' = p'(x).$$

8. Дифференциальное уравнение

$$F(y, y', y'') = 0$$

не содержит независимой переменной x. Порядок уравнения понижается путём введения новой искомой функции:

$$y' = p(y), \ \ y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

9. Порядок дифференциального уравнения

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

понижается на k единиц путем введения функции

$$y^{(k)} = z(x).$$

10. Теорема. Если функции

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, то линейная комбинация указанных решений

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

является общим решением уравнения (1).

11. Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнени

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (2).

12. Определение. Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

13. Определение. Экстремалями функционала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

называются интегральные кривые уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

14. Теорема. Обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

15. Теорема (первый признак сравнения рядов). Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \quad (4)$$

Тогда, если $u_n \le v_n$ при $n = 1, 2\ldots$ и ряд (4) сходится, то ряд (3) тоже сходится. Если же $u_n \ge v_n$ и ряд (4) расходится, то и ряд (3) расходится.

16. <u>Теорема</u> (второй признак сравнения рядов). Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{6}$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \neq 0 .$$

Тогда или оба ряда (5) и (6) сходятся, или оба эти ряда расходятся.

17. <u>Теорема</u> (признак Даламбера). Пусть задан числовой ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7}$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l .$$

Тогда ряд (7) сходится, если $l<1$, и расходится, если $l>1$. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $l=1$.

18. <u>Теорема</u> (радикальный признак сходимости ряда). Пусть задан числовой ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{8}$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l .$$

Тогда ряд (8) сходится, если $l<1$, и расходится, если $l>1$. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $l=1$.

19. <u>Теорема</u> (интегральный признак сходимости). Пусть задан числовой ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots , \tag{9}$$

где последовательность

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

не возрастает, то есть

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$$

Предположим также, что существует функция $f(x)$, непрерывная и не возрастающая на промежутке $[1,+\infty)$, такая, что

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ \dots,\ f(n)=u_n,\dots$$

Тогда ряд (9) сходится, если сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Если данный интеграл расходится, то расходится и ряд (9).

20. Определение. Знакочередующимся называется числовой ряд

$$u_1-u_2+u_3-\dots+(-1)^{n+1}u_n+\dots,$$

где числа

$$u_1,u_2,u_3,\dots,u_n,\dots$$

положительны.

21. Теорема (признак Лейбница). Пусть задан знакочередующийся ряд

$$u_1-u_2+u_3-\dots+(-1)^{n+1}u_n+\dots, \tag{10}$$

где последовательность положительных чисел

$$u_1,u_2,\dots,u_n,\dots$$

убывает, то есть

$$u_1>u_2>\dots>u_n>\dots$$

Если при этом

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0,$$

то ряд (10) сходится, а его сумма не превышает первого члена данного ряда.

22. Определение. Пусть задан числовой ряд

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots \tag{11}$$

Если при этом сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots, \tag{12}$$

то ряд (11) называется абсолютно сходящимся. Если ряд (11) сходится, а ряд (12) расходится, то ряд (11) называется условно или неабсолютно сходящимся.

23. Теорема (Абеля). Если степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (13)$$

сходится в некоторой точке x_0, то он абсолютно сходится во всякой точке x такой, что $|x| < |x_0|$. Если ряд (13) расходится в точке x_0, то этот ряд расходится при всяком x таком, что $|x| > |x_0|$.

24. Определение. Степенной ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки α.

2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Работа выполняется
   - на листах бумаги формата А4;
   - без рамки;
   - на одной стороне листа;
   - перьевой или шариковой ручкой, черными или фиолетовыми чернилами.
2. Расстояние между символами двух следующих друг за другом строк не менее 6 – 8 мм.
3. Размер левого поля 35 мм, правого – 10 мм, верхнего и нижнего – по 20 мм. Для всех размеров указаны минимальные значения; можно сделать несколько больше.
4. Страницы нумеруются, начиная с титульного листа. На этом листе номер не ставится. Номера страниц проставляются в правом верхнем углу.
5. Номера страниц предварительно помечаются карандашом. Окончательно нумерация страниц оформляется, когда работа сшита и готова к защите.
6. Исправление текста может производиться подчисткой, закраской или заклеиванием. Зачеркивание и запись поверх написанного не допускаются.

7. Сокращения слов в курсовой работе не допускаются, кроме т.д., т.п.
8. В конце заголовка точка не ставится.
9. Текст разбивается на абзацы. Каждый из них начинается с красной строки (отступа на три - четыре символа).
10. Задачи и их решения записываются в порядке, предусмотренном заданием.
11. Условия задач приводятся в форме, точно совпадающей с их записью в задании.
12. Перед формулировкой задачи приводится одно из теоретических утверждений, необходимых для решения. Соответствующий теоретический материал содержится в первом и четвертом разделах настоящих методических указаний.
13. Каждое из утверждений, упомянутых в предыдущем пункте, приводится не более одного раза.
14. Записи располагаются последовательно одним столбцом.
15. Каждое соотношение занимает отдельную строку или несколько строк за исключением случая, когда соотношение очень коротко.
16. Каждая фраза, в том числе уравнение или иное соотношение, заканчивается знаком препинания, например,

$$A = B;\ C \neq D;$$

$$E > F\ .$$

Между идущими подряд формулами ставят точку с запятой.

17. Нельзя разрывать равенство. При необходимости следует ввести обозначение:

$$\ldots\ldots\ldots = A\ .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A = \ldots\ldots\ldots$$

(только при необходимости!).

18. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте.
19. Номера формул располагаются у правого края страницы, слева от поля.
20. Нумерация формул единая для всей работы.
21. Каждый раздел начинается с новой страницы.
22. Нумерация разделов и задач должна совпадать с нумерацией в задании.

23. К моменту защиты работа должна быть сшита по левому краю (*металлическими скрепками, нитками и т.п.*). Можно использовать скоросшиватель с прозрачной обложкой.

3. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ТАБЛИЦ И РИСУНКОВ

1. Таблицы нумеруются последовательно внутри каждого раздела: **таблица** 3.1, **таблица** 3.2, ... Номер и затем наименование таблицы записываются над ней.
2. Рисунки нумеруются последовательно в пределах раздела: рис. 3.1, рис. 3.2, ...
3. Если на рисунке приводятся расчетные данные, то строится масштабная сетка. Оси дополнительно не изображаются, стрелок нет.
4. Фигура должна занимать возможно большую часть сетки. Клетки должны быть близки к квадратным. Число клеток по *горизонтали и по вертикали – не более 6 - 8, лучше 4 - 5*.
5. Сетка строится тонкими линиями. Зависимости и фигуры - более толстыми.
6. Строить рисунки и таблицы следует карандашом, можно на миллиметровке.
7. Если рисунок или таблица приведены на отдельном листе, то этот лист нумеруется в обычном порядке.
8. Рисунки и таблицы размещаются в тексте не ранее, чем они впервые упоминаются; *можно несколько позже*.
9. Значения переменных, указываемые у осей, должны быть достаточно "круглыми". Не следует брать такие значения, как 0.1211, 0.2422, 0.3633 и т.п. Можно указать, например, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 ... или 0.25, 0.50, 0.75 ...

4. СТРУКТУРА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Этот раздел содержит макет работы (с. 12 – 30). Пояснения здесь приводятся курсивом. В разделе имеются примеры оформления записей, рисунков и таблиц. Эти примеры следует принять за образец.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА"

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Курсовая работа

Студент гр. 1201 Иванов А.А.

Преподаватель Петров И.И.

САМАРА 2006

Первая страница работы – ее титульный лист . Эта страница не нумеруется.

2

Кафедра высшей математики

Задание на курсовую работу
студенту гр. 1201 Иванову А.А.

Вариант №

1. Содержание задания.

1.1. Применить методы математического анализа к решению указанных задач.

2. Исходные данные.

2.1. Задание кафедры.

3. Перечень и объем графических и текстовых документов.

3.1. Текст работы: 20 - 30 листов А4.

4. Календарный план выполнения работы.

Содержание работы по этапам	Объем этапа в % к общему объему работы	Сроки окончания	Фактическое выполнение
Выдача задания			
Этап 1	25		
Выполнение раздела 1			
Этап 2	45		
Выполнение раздела 2			
Выполнение раздела 3			
Этап 3	20		
Выполнение раздела 4			
Защита работы	10		

Вторая страница – задание кафедры. С этой страницы начинается нумерация.

Курсовая работа: 30 с., 10 рис., 2 табл., 5 источников

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД, ЧИСЛОВОЙ РЯД, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ РЯД, РЯД ТЕЙЛОРА, ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ, ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ, ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Выполнены решение дифференциальных уравнений в аналитической форме, приближенное решение задачи Коши методом Эйлера и путем разложения в ряд Тейлора, исследование сходимости числовых и функциональных рядов, вычисление двойных и тройных интегралов.

На этой странице размещаются библиографические данные, ключевые слова и автореферат.

Внимание! Ключевые слова записываются БОЛЬШИМИ (ПРОПИСНЫМИ) буквами.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Дифференциальные уравнения

Выполнить некоторый пункт задания означает записать соответствующее теоретическое положение, условие задачи, ее решение и ответ. В качестве примера приводятся задачи 1.1 и 1.7.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

1.1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{\operatorname{arctg} x} = \left(y^2 + 1\right)xdx .$$

Решение.

$$\frac{dy}{\operatorname{arctg}x} = \left(y^2 + 1\right)xdx \ ;$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = x\operatorname{arctg}xdx \ ;$$

$$\operatorname{arctg}y = \int x\operatorname{arctg}xdx + C \ ;$$

$$\int x\mathrm{actg}xdx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}x;\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C .$$

Ответ:

$$\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x\right) + C.$$

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если его можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.2. Решить уравнение

Далее следует условие, решение и ответ задачи 1.2. Аналогично выполняются пункты 1.3 – 1.6.

Определение. Системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

1.7. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases}$$

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Решение.

$$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}(1-\lambda)\alpha_1 \;-\; 5\alpha_2 = 0\,, \\ -\alpha_1 + (-3-\lambda)\alpha_2 = 0\,.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$\lambda^2+2\lambda-8=0;$$
$$\lambda_1=2;\ \lambda_2=-4.$$
$$\lambda_1=2:$$

$$\begin{cases}-\alpha_1-5\alpha_2=0, \\ -\alpha_1-5\alpha_2=0.\end{cases}$$

$$\alpha_{11}=5;\ \alpha_{21}=-1.$$
$$\lambda_2=-4:$$

$$\begin{cases}-5\alpha_1-5\alpha_2=0, \\ -\alpha_1+\alpha_2=0.\end{cases}$$

$$\alpha_{12}=1;\ \alpha_{22}=1.$$

$$Y=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};$$

Ответ :

$$\begin{cases}x=5C_1e^{2t}+C_2e^{-4t}, \\ y=-C_1e^{2t}+C_2e^{-4t}.\end{cases}$$

Далее выполняется пункт 1.8.

(С новой страницы)

2. Исследование числовых и функциональных рядов

Теорема (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 .$$

2.1. Исследовать на сходимость ряд

Далее следует условие задачи 2.1, ее решение и ответ. Затем выполняются пункты 2.2 – 2.6.

(С новой страницы)

3. Приближенное решение задачи Коши

Согласно методу Эйлера приближенное решение задачи Коши

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

отыскивается по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ \Delta y_i = f(x_i, y_i)\Delta x,\ i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

3.1. Методом Эйлера решить задачу Коши

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0{,}5.$$

Число шагов $n = 20$. Вычисления выполнять с точностью до 0,0001.

Решение приведено в таблице 3.1, график искомой функции – на рис. 3.1.

Определение. Степенной ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

3.2. Методом разложения в ряд Тейлора решить задачу Коши

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0{,}5) = 0.$$

Найти четыре члена разложения, построить таблицу решения.

Решение.

Приводится решение задачи 3.2.

Значения искомой функции приведены в таблице 3.2, ее график – на рис. 3.1.

Таблица 3.1

Решение задачи Коши методом Эйлера

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	Δy_i
0	0	0.5000	0.2500	0.0125
1	0.05	0.5125	0.2652	0.0133
2	0.1	0.5258	0.2864	0.0143
3	0.15	0.5401	0.3142	0.0157
4	0.2	0.5558	0.3489	0.0174
5	0.25	0.5732	0.3911	0.0196
6	0.3	0.5928	0.4414	0.0221
7	0.35	0.6149	0.5006	0.0250
8	0.4	0.6399	0.5695	0.0285
9	0.45	0.6684	0.6492	0.0325
10	0.5	0.7008	0.7411	0.0371
11	0.55	0.7379	0.8470	0.0423
12	0.6	0.7802	0.9687	0.0484
13	0.65	0.8287	1.1092	0.0555
14	0.7	0.8841	1.2717	0.0636
15	0.75	0.9477	1.4606	0.0730
16	0.8	1.0207	1.6819	0.0841
17	0.85	1.1048	1.9432	0.0972
18	0.9	1.2020	2.2548	0.1127
19	0.95	1.3147	2.6310	0.1316
20	1	1.4463		

Таблица 3.2

Решение задачи Коши методом разложения в ряд

i	x_i	y_i
0	0	0.5000
1	0.05	0.5129
2	0.1	0.5266
3	0.15	0.5416
4	0.2	0.5582
5	0.25	0.5765
6	0.3	0.5969
7	0.35	0.6198
8	0.4	0.6453
9	0.45	0.6739
10	0.5	0.7057
11	0.55	0.7412
12	0.6	0.7805
13	0.65	0.8240
14	0.7	0.8720
15	0.75	0.9248
16	0.8	0.9827
17	0.85	1.0459
18	0.9	1.1148
19	0.95	1.1897
20	1	1.2708

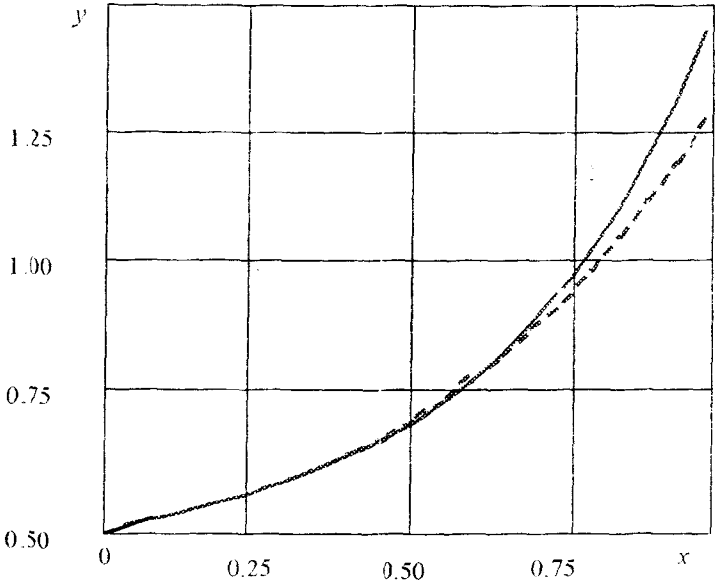

Рис. 3.1. Интегральные кривые:

——— по методу Эйлера; — — - разложением в ряд

(С новой страницы)

4. Кратные интегралы

Определение. Переход от формулы

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{14}$$

(рис. 4.1) к формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{15}$$

(рис. 4.2) называется изменением порядка интегрирования в двойном интеграле.

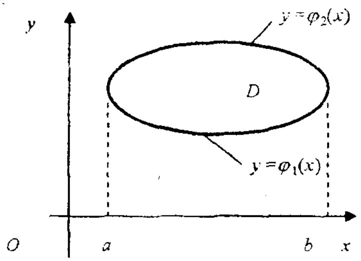

Рис. 4.1. Область интегрирования (к формуле (14))

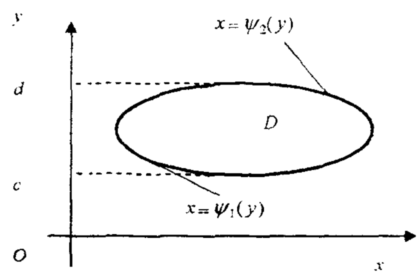

Рис. 4.2. Область интегрирования (к формуле (15))

4.1. Изменить порядок интегрирования при вычислении величины

$$\int_0^1 dy \int_0^y f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx.$$

Решение.

Область интегрирования изображена на рис. 4.3.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy.$$

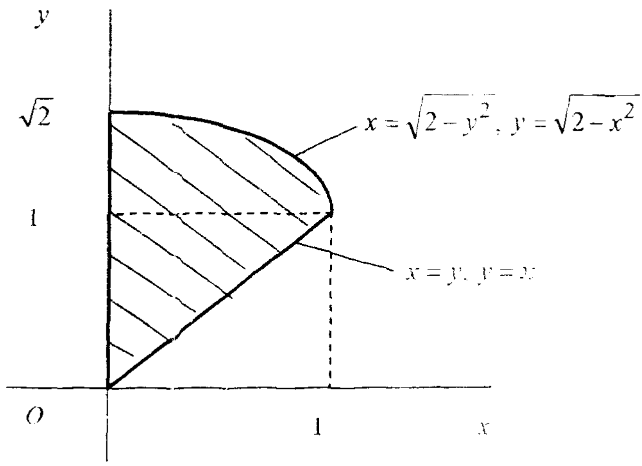

Рис. 4.3. Область интегрирования (к задаче 4.1)

Ответ: $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy$.

Двойной интеграл в декартовых координатах вычисляется по формуле (14).

4.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy,$$

где область D ограничена линиями

$$x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2 .$$

Решение.

Область интегрирования изображена на рис. 4.4.

$$\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^2}^{\sqrt{x}} \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(9x^2\frac{y^3}{3} + 48x^3\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 (3x^2x^{\frac{3}{2}} + 12x^3x^2 + 3x^2x^6 -$$

$$-12x^3x^8)dx = 3x^{\frac{9}{2}}\frac{2}{9} + 12\frac{x^6}{6} + 3\frac{x^9}{9} - 12\frac{x^{12}}{12}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} + 2 + \frac{1}{3} - 1 = 2 .$$

Ответ: 2.

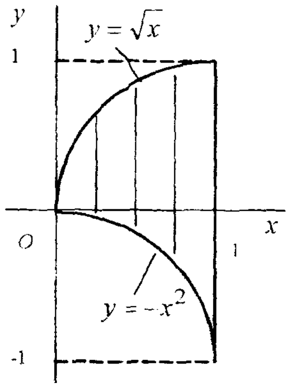

Рис. 4.4. Область интегрирования (к задаче 4.2)

Формула перехода к полярным координатам для двойного интеграла – это соотношение

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho ,$$

где D^* – прообраз области D при отображении

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

4.3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \left(\frac{21}{4} - y^2\right) dxdy ,$$

где область D ограничена линией

$$x^2 + y^2 = 2x .$$

Решение.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \ \rho = 2\cos\varphi .$$

Область интегрирования изображена на рис. 4.5.

$$\iint_D \left(\frac{21}{4} - y^2\right) dxdy = \ldots = 5\pi .$$

Ответ: 5π .

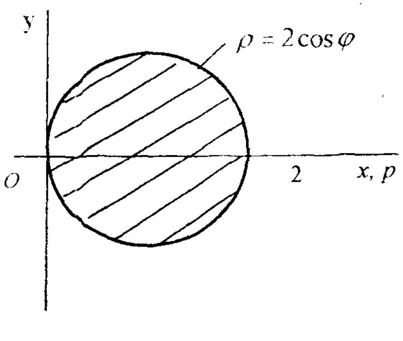

Рис. 4.5. Область интегрирования (к задаче 4.3)

В декартовых координатах тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (16)$$

(рис. 4.6, 4.7).

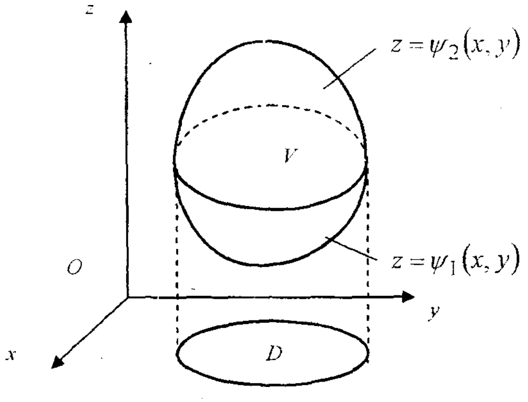

Рис. 4.6. Пространственная область (к формуле (16))

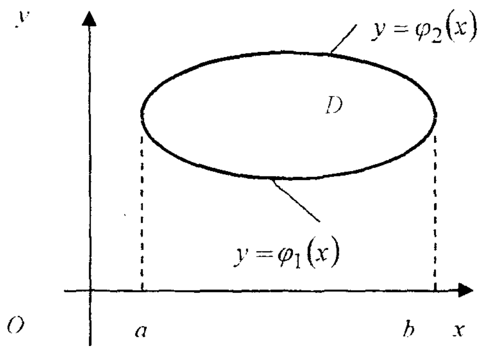

Рис. 4.7. Проекция области интегрирования (к формуле (16))

4.4. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{3}dxdydz\,,$$

где область V ограничена поверхностями

$$x=3,\ y=1,\ z=2\pi,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Решение.

Область интегрирования изображена на рис. 4.8 – 4.9.

$$\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{3}\,dxdydz=\ldots=3\,.$$

Ответ: 3.

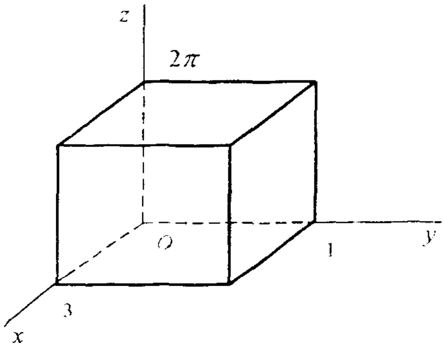

Рис. 4.8. Пространственная область интегрирования (к задаче 4.4)

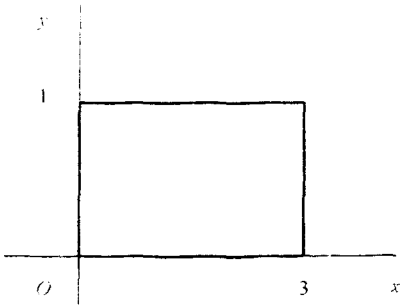

Рис. 4.9. Проекция области интегрирования (к задаче 4.4)

(С нового листа) 30

Список использованных источников

1. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. - М. : Физматлит, 1995. - 464 с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. - М. : Физматлит, 1995. - 368 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 415 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 544 с.
5. Шипачев В.С. Основы высшей математики. - М.: Высшая школа, 1998. - 479 с.

Это – последняя страница курсовой работы

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания
к курсовой работе по математике

Составитель ***Файницкий Юрий Львович***

Редактор Л. Я. Чегодаева
Компьютерная верстка О. А. Ананьев

Подписано в печать 13.03.2006 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 1,8. Усл.кр.-отт. 1,9. Уч. - изд.л. 2,0.
Тираж 200 экз. Заказ 22. Арт. С-35/2006.

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.