ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА

МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к курсовой работе по математике

Самара 2006

Составитель: Е.П. Ростова.

УДК 51(075)

Методы высшей математики: Метод. указания к курсовой работе по математике/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Е.П. Ростова.* Самара, 2006. 39 с.

Методические указания содержат методическое обеспечение курсовой работы по математике, посвященной изучению дифференциальных уравнений, элементов векторного анализа, криволинейных и повторных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов вечернего отделения ИЭТ СГАУ для специальности 160301 – авиационные двигатели и энергетические установки, рабочая программа которых включает курсовую работу в 3-м семестре.

Работа подготовлена на кафедре общеинженерной подготовки института энергетики и транспорта.

Табл. 1. Ил. 5.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П.Королева.

Рецензент: ст.преп. Карпилова О.М.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1.1 Решение уравнений третьего порядка с действительными и комплексными корнями

В основе решения задачи 1.1 данной курсовой работы лежит ***теорема о разложении многочлена на линейные множители*** (Пискунов, т.1, гл. VII, §6) [1]:

Всякий многочлен n-ой степени разлагается на n линейных множителей вида $(x - a)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.

Следствие (Пискунов, т.1, гл. VII, §7) [1]:

Всякий многочлен n-ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

В задаче 1.1 требуется найти все корни уравнения третьего порядка и записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Напомним, какие существуют формы записи комплексных чисел.

Комплексным числом z называется выражение $z=a+ib$, где a и b – действительные числа; i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$; a называется действительной или вещественной частью, b – мнимой частью числа z. Обозначают их следующим образом: $a=\text{Re } z$, $b=\text{Im } z$.

Комплексное число $z=a+ib$ изображается на плоскости $x0y$ в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Соответствие между точками комплексной плоскости и комплексными числами взаимно однозначно. Точкам комплексной плоскости, лежащим на оси $0x$, соответствуют действительные числа (b=0). Точки, лежащие на оси $0y$, изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае a=0. Поэтому ось $0y$ на комплексной плоскости называют осью мнимых чисел или мнимой осью, а ось $0x$ – действительной осью.

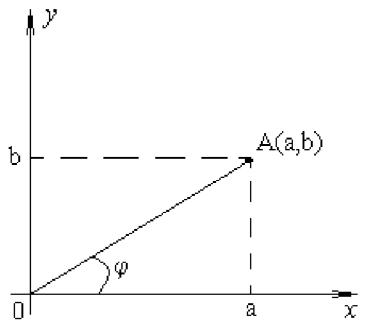


Рис. 1. Изображение комплексного числа $z=a+ib$.

Число $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ называют ***модулем комплексного числа*** $z=a+ib$. Модуль числа z равен расстоянию от начала координат до точки A, изображающей это число.

Всякое решение системы уравнений $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ называется ***аргументом комплексного числа*** $z=a+ib \neq 0$. Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом Arg z. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось $0x$ до совпадения с радиус-вектором $\overrightarrow{OA}$ точки A. При этом $\varphi>0$, если поворот совершается против часовой стрелки, и $\varphi<0$, если поворот совершается по часовой стрелке. Значение Arg z, удовлетворяющее условию $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$, называется главным значением аргумента и обозначается символом arg z.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение Arg z, удовлетворяющее условию $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа z:
$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Формулы Эйлера $e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi + i\sin\varphi$ преобразуют тригонометрическую форму комплексного числа в ***показательную***: $z=re^{i\varphi}$.

Итак, комплексное число можно записать следующим образом:

алгебраическая форма $z=a+ib$,

тригонометрическая форма $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

показательная форма $z=re^{i\varphi}$.

Образец решения задачи 1.1

Задача 1.1. Найти все корни уравнения $(z-9i)(z^2+10\sqrt{3}z+100)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение

Левая часть уравнения – многочлен третьей степени, поэтому уравнение имеет ровно три корня.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один сомножитель равен нулю. Приравняем к нулю каждую из скобок: $z-9i=0$ или $z^2+10\sqrt{3}z+100=0$. Решим первое из полученных уравнений: $z-9i=0$.

$z_1=9i$ – это алгебраическая запись. Здесь $\operatorname{Re} z_1=0$, $\operatorname{Im} z_1=9$. Найдем модуль этого комплексного числа: $r_1=|z_1|=\sqrt{0^2+9^2}=\sqrt{81}=9$. Далее определим аргумент. Т. к. $\operatorname{Re} z_1=0$, то z_1 – чисто мнимое число, следовательно, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ (см. Таблица 1 приложения).

Значит, тригонометрическая запись числа будет иметь вид:
$z_1=9(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. Показательная форма записи: $z_1=9e^{i\pi/2}$.

Решим второе уравнение $z^2+10\sqrt{3}z+100=0$.

Вычислим дискриминант $D=(10\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot100=300-400=-100$.

$\sqrt{D}=\pm10i$. Тогда корни $z_2=\frac{-10\sqrt{3}+10i}{2}=-5\sqrt{3}+5i$ и $z_3=\frac{-10\sqrt{3}-10i}{2}=-5\sqrt{3}-5i$.

Рассмотрим каждый из них. Для второго корня $\operatorname{Re} z_2=-5\sqrt{3}$ и $\operatorname{Im} z_2=5$. Модуль второго корня $r_2=|z_2|=\sqrt{(-5\sqrt{3})^2+5^2}=\sqrt{100}=10$. Чтобы найти аргумент z_2 решим систему уравнений $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{-5\sqrt{3}}{10},\\ \sin\varphi=\frac{5}{10}.\end{cases}$ Решением данной системы будет $\varphi_2=\frac{5\pi}{6}$ (см. Таблица 1 приложения). Тригонометрическая запись: $z_2=10(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$. Показательная запись: $z_2=10e^{i5\pi/6}$.

Для третьего корня аналогично: $\operatorname{Re} z_3 = -5\sqrt{3}$ и $\operatorname{Im} z_3 = -5$. Модуль третьего корня $r_3 = |z_3| = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2+(-5)^2}=\sqrt{100}=10$. Аргумент φ_3 найдем из системы $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{-5\sqrt{3}}{10},\\ \sin\varphi=\frac{-5}{10}.\end{cases}$ В результате решения получим $\varphi_3=-\frac{5\pi}{6}$ (см. Таблица 1 приложения). Тогда тригонометрическая запись: $z_3=10(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right))$, показательная запись: $z_3=10e^{-i5\pi/6}$.

Замечание: следует отметить, что корни z_2 и z_3 являются комплексно-сопряженными ($\operatorname{Re} z_2=\operatorname{Re} z_3$, $\operatorname{Im} z_2=-\operatorname{Im} z_3$). Модули комплексно-сопряженных чисел равны: $r_2=r_3$. Для аргументов $\arg z_2=-\arg z_3$.

Ответ: алгебраическая форма записи: $z_1=9i$, $z_2=-5\sqrt{3}+5i$, $z_3=-5\sqrt{3}-5i$;

тригонометрическая форма записи: $z_1=9(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$,

$z_2=10(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$, $z_3=10(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right))$;

показательная форма записи: $z_1=9e^{i\pi/2}$, $z_2=10e^{i5\pi/6}$, $z_3=10e^{-i5\pi/6}$.

1.2. Указания к решению задачи 1.2

Задача 1.2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения.

Задача 1.2 выполняется с использованием средств табличного процессора Excel. Подробное описание решения задачи 1.2 дано в методических указаниях к лабораторным работам «Численные методы решения задач по математике с использованием табличного процессора EXCEL» Лабораторная работа №4.

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение дифференциального уравнения (Пискунов, т.2, гл. XIII, §2, стр. 16, определение 1) [1]:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения.

2.1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида $f(x)dx = \varphi(y)dy$ называются ***дифференциальными уравнениями с разделенными переменными.*** Дифференциальные уравнения с разделенными переменными решаются путем интегрирования правой и левой частей: $\int f(x)dx = \int \varphi(y)dy$.

Дифференциальные уравнения вида $f_1(x)\varphi_1(y)dx=f_2(x)\varphi_2(y)dy$ называются ***дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.*** Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными приводятся к предыдущему виду путем деления правой и левой частей на $\varphi_1(y)f_2(x)$, а далее решаются путем интегрирования правой и левой частей: $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$.

Образец решения задачи 2.1

Задача 2.1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y' = \frac{\cos^2 x}{y}$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его, зная, что $y' = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x}{y}$. Разделим переменные: $ydy=\cos^2 xdx$. Проинтегрируем правую и левую части: $\int ydy = \int \cos^2 xdx$ (см. Приложение). Получим:
$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$. Отсюда $y = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sin(2x) + C}$.

Ответ: $y = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sin(2x) + C}$.

2.2. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

В задаче под номером 2.2. в различных вариантах даны дифференциальные уравнения первого порядка следующих видов: однородные относительно x и y, линейные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.

Рассмотрим каждый из этих видов.

Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x,y)$ называются ***однородными относительно x и y***, если $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y. Дифференциальные уравнения однородные относительно

x и y решаются с помощью замены $z=\frac{y}{x}$ или $y=zx$, где $z=z(x)$. Этой заменой однородные дифференциальные уравнения сводятся к уравнению с разделяющимися переменными, решение которых было описано выше.

Замечание: функция $f(x, y)$ называется однородной порядка k относительно переменных x, y, если при любом $\lambda \in R$ выполняется соотношение $f(\lambda x, \lambda y)= \lambda^k f(x, y)$.

Образец решения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy=0$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого преобразуем его: $xydy = -(x^2 + 2xy)dx$. Далее разделим левую и правую части на $xydx$ для того, чтобы слева осталось $\frac{dy}{dx}=y'$: $y' = -\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Покажем, что функция $f(x, y) = -\frac{x^2+2xy}{xy}$ является однородной функцией нулевого порядка: $f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x \lambda y}{\lambda x \lambda y} = -\frac{\lambda^2 (x^2+2xy)}{\lambda^2 xy} = -\frac{x^2+2xy}{xy} = f(x, y)$.

Следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решаем его при помощи замены $z=\frac{y}{x}$ или $y=zx$, где $z=z(x)$. Тогда $y' = z'x + z$. Уравнение примет вид: $z'x + z=-\frac{x^2+2xzx}{xzx}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Упростим правую часть $z'x + z=-\frac{1}{z}+2$ и перенесем z вправо: $z'x = -z-\frac{1}{z}+2$. Правую часть уравнения приведем к общему знаменателю: $z'x = -\frac{z^2+1-2z}{z}$ и распишем $z' = \frac{dz}{dx}$:

$\frac{dz}{dx}x=-\frac{z^2+1-2z}{z}$. Разделим переменные $\frac{z}{(z-1)^2}dz=-\frac{dx}{x}$ и проинтегрируем правую и левую части $\int\frac{z}{(z-1)^2}dz=-\int\frac{dx}{x}$. Получим $\ln|z-1|-\frac{1}{z-1}=-\ln|x|+C$ (см. Приложение). Вернемся к первоначальным переменным, подставив $z=\frac{y}{x}$:

$\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|-\frac{1}{\frac{y}{x}-1}=-\ln|x|+C$ или $\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|-\frac{x}{y-x}=-\ln|x|+C$.

Ответ: $\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|-\frac{x}{y-x}=-\ln|x|+C$.

Дифференциальные уравнения вида $y'+f(x)y=\varphi(x)$ называются ***линейными дифференциальными уравнениями первого порядка***. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка решаются следующим образом:

1) делаем замену $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$;

2) составляем систему уравнений $\begin{cases} v'+vf(x)=0, \\ u'v=\varphi(x) \end{cases}$;

3) решаем первое уравнение системы, находим функцию $v(x)$;

4) подставляем полученное значение $v(x)$ во второе уравнение системы и решаем его, находим $u(x)$;

5) записываем ответ как произведение двух функций $y=u(x)v(x)$.

Замечание: функция $v(x)$ записывается без постоянной интегрирования, а функция $u(x)$ с постоянной интегрирования.

Образец решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(2x-2)y'=x+2y-3$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого преобразуем его, разделив правую и левую части на $(2x-2)$.

$y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$, или $y' - \frac{2}{2x-2}y = \frac{x-3}{2x-2}$. Это линейное дифференциальное уравнение, т. к. оно имеет вид $y' + f(x)y = \varphi(x)$.

Линейные дифференциальные уравнения решаются следующим образом:

1) делаем замену $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$. Тогда $y' = u'v+uv'$;

2) подставляем замену в уравнение: $u'v+uv' - \frac{2}{2x-2}\,uv = \frac{x-3}{2x-2}$;

3) преобразуем полученное уравнение: $u'v+u\left(v' - \frac{1}{x-1}v\right) = \frac{x-3}{2x-2}$;

4) записываем систему уравнений: $\begin{cases} v' - \frac{1}{x-1}v = 0, \\ u'v = \frac{x-3}{2x-2}; \end{cases}$

5) решаем первое уравнение системы и находим v. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале выделим производную: $v' = \frac{1}{x-1}v$. Затем запишем иначе v': $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-1}$. Далее разделим переменные: $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-1}$. Проинтегрировав правую и левую части $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x-1}$, получим: $\ln|v| = \ln|x-1|$ (см. Приложение). Следует отметить, что при отыскании функции v не записывают постоянную интегрирования. Поэтому получаем $v=(x-1)$;

6) подставляем полученную функцию $v=(x-1)$ во второе уравнение системы: $u'(x-1) = \frac{x-3}{2(x-1)}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную: $u' = \frac{x-3}{2(x-1)^2}$. Распишем u': $\frac{du}{dx} = \frac{x-3}{2(x-1)^2}$. Затем разделим переменные $du = \frac{x-3}{2(x-1)^2}dx$ и проинтегрируем правую и левую части: $\int du = \int \frac{x-3}{2(x-1)^2}dx$. В результате интегрирования получаем:

$u=\int\frac{x-1}{2(x-1)^2}dx-2\int\frac{dx}{2(x-1)^2}=\int\frac{dx}{2(x-1)}-\int(x-1)^{-2}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$ (см. Приложение);

7) выпишем полученную функцию: $y=uv=\left(\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C\right)(x-1)$.

Ответ: $y=\left(\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C\right)(x-1)$.

Дифференциальные уравнения вида $y'+f(x)y=\varphi(x)y^n$ ($n\neq 0$, $n\neq 1$) называются ***уравнениями Бернулли***. Уравнения Бернулли решаются тем же способом, что и линейные дифференциальные уравнения.

1) делаем замену $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$;

2) составляем систему уравнений $\begin{cases} v'+vf(x)=0, \\ u'v=\varphi(x)u^n v^n; \end{cases}$

3) решаем первое уравнение системы, находим функцию $v(x)$;

4) подставляем полученное значение $v(x)$ во второе уравнение системы и решаем его, находим $u(x)$;

5) записываем ответ как произведение двух функций: $y=u(x)v(x)$.

Замечание: как и в предыдущем случае, функция $v(x)$ записывается без постоянной интегрирования, а функция $u(x)$ с постоянной интегрирования.

Образец решения уравнений Бернулли

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Это уравнение Бернулли, т. к. имеет вид $y'+f(x)y=\varphi(x)y^n$ ($n\neq 0$, $n\neq 1$). Решаем это уравнение следующим образом:

1) делаем замену $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$: $u'v+uv'+\frac{uv}{x}=x^2u^4v^4$;

2) преобразуем выражение $u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=x^2u^4v^4$;

3) составляем систему уравнений $\begin{cases} v'+\frac{v}{x}=0, \\ u'v=x^2\cdot u^4v^4; \end{cases}$

4) решаем первое уравнение системы и находим v. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале выделим производную: $v'=-\frac{v}{x}$. Затем запишем иначе v': $\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$. Далее разделим переменные: $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав правую и левую части $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$, получим: $\ln|v|=-\ln|x|$ (см. Приложение). Следует отметить, что при отыскании функции v не записывают постоянную интегрирования. Поэтому получаем $v=\frac{1}{x}$;

5) подставляем полученную функцию $v=\frac{1}{x}$ во второе уравнение системы: $u'\frac{1}{x}=x^2u^4\frac{1}{x^4}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную: $u'=\frac{u^4}{x}$. Распишем u': $\frac{du}{dx}=\frac{u^4}{x}$. Затем разделим переменные: $\frac{du}{u^4}=\frac{dx}{x}$ и проинтегрируем правую и левую части: $\int\frac{du}{u^4}=\int\frac{dx}{x}$. В результате интегрирования получаем: $\frac{u^{-3}}{-3}=\ln|x|+C$ (см. Приложение). Отсюда выражаем $u(x)$: $u=\sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln|x|+C)}}$.

6) выпишем полученную функцию $y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln|x|+C)}}$.

Ответ: $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln|x|+C)}}$.

Дифференциальные уравнения вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называются ***уравнениями в полных дифференциалах***, если $M(x,y)'_y= N(x,y)'_x$. Уравнение в полных дифференциалах решается двумя способами.

Первый способ: 1) находим интеграл $u=\int M(x,y)dx$, причем постоянную интегрирования записываем в виде неизвестной функции $\varphi(y)$;

2) дифференцируем полученную функцию u'_y и приравниваем к $N(x, y)$, полученное уравнение решаем и находим $\varphi(y)$;

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$.

Второй способ: 1) находим интеграл $u=\int N(x,y)dy$, причем постоянную интегрирования записываем в виде неизвестной функции $\psi(x)$;

2) дифференцируем полученную функцию u'_x и приравниваем к $M(x, y)$, полученное уравнение решаем и находим $\psi(x)$;

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$.

Образец решения уравнений в полных дифференциалах

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y+e^x \sin y)dx+(x+e^x \cos y)dy=0$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого выделим $M(x,y)= y+e^x \sin y$ и $N(x,y)= x+e^x \cos y$ и продифференцируем $M(x,y)'_y=1+e^x \cos y$, $N(x,y)'_x=1+e^x \cos y$. Видно, что $M(x,y)'_y=N(x,y)'_x$, значит это уравнение в полных дифференциалах.

Первый способ:

1) находим интеграл $u=\int M(x,y)dx=\int (y+e^x \sin y)dx = yx+e^x \sin y+\varphi(y)$;

2) дифференцируем полученную функцию:

$$u'_y=(yx+e^x \sin y+\varphi(y))'_y = x+e^x \cos y+\varphi'_y$$

и приравниваем к $N(x, y)$: $x+e^x \cos y+\varphi'_y= x+e^x \cos y$. Полученное уравнение решаем и находим $\varphi(y)$: $\varphi'_y=0$. Значит, $\varphi(y)=C$.

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$: $yx+e^x \sin y=C$.

Второй способ:

1) находим интеграл: $u = \int N(x, y)dy = \int (x + e^x \cos y)dy = xy + e^x \sin y + \psi(x)$;

2) дифференцируем полученную функцию:

$$u'_x = (xy + e^x \sin y + \psi(x))'_x = y + e^x \sin y + \psi'_x$$

и приравниваем к $M(x, y)$: $y + e^x \sin y + \psi'_x = y + e^x \sin y$. Полученное уравнение решаем и находим $\psi(x)$: $\psi'_x = 0$. Значит, $\psi(x) = C$.

3) записываем ответ в виде $u(x, y) = C$: $xy + e^x \sin y = C$.

Ответ: $xy + e^x \sin y = C$.

2.3. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***дифференциальными уравнениями высших порядков***.

Рассмотрим некоторые дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка, и методы их решения.

а) ***Уравнения, допускающие понижение порядка,*** – уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Уравнения этого вида решаются путем n-кратного интегрирования. В результате каждого интегрирования порядок уравнения понижается на единицу.

б) ***Уравнения, допускающие понижение порядка, не содержащие явно независимую переменную x***, – уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$. Данные уравнения решаются заменой $y' = p$, где $p = p(y)$, при помощи которой порядок понижается на единицу.

в) ***Уравнения, допускающие понижение порядка, не содержащие явно искомую функцию y(x) и ее первые производные до (k–1)-го порядка включительно*** – уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$. Такие уравнения решаются введением новой неизвестной функции $z(x) = y^{(k)}(x)$, что позволяет понизить порядок на k.

Образец решение задачи 2.3

Задача 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y''+2xy'=x$.

Решение

Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, не содержащее явно искомую функцию y.

1) В записи уравнения отсутствует y, значит, делаем замену $y'=z(x)$, тогда $y''=z'$.

2) Подставляем замену в уравнение: $(1+x^2)z'+2xz=x$. Полученное уравнение преобразуем: $z'+\frac{2x}{1+x^2}z=\frac{x}{1+x^2}$. Получили линейное дифференциальное уравнение. Решаем его, как и в предыдущем номере 2.2, заменой $z=uv$, тогда $z'=u'v+uv'$.

3) Подставим замену в уравнение: $u'v+uv'+\frac{2x}{1+x^2}\ uv=\frac{x}{1+x^2}$ и преобразуем его: $u'v+u\left(v'+\frac{2x}{1+x^2}v\right)=\frac{x}{1+x^2}$.

4) Составим систему уравнений: $\begin{cases} v'+\frac{2x}{1+x^2}v=0, \\ u'v=\frac{x}{1+x^2}. \end{cases}$

5) Решим сначала первое уравнение системы $v'+\frac{2x}{1+x^2}v=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную $v'=-\frac{2x}{1+x^2}v$ и распишем ее $\frac{dv}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}v$. Разделим переменные $\frac{dv}{v}=-\frac{2x}{1+x^2}dx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{2x}{1+x^2}dx$. В результате получим: $\ln|v|=-\ln|1+x^2|$ (см. Приложение), т. е. $v=\frac{1}{1+x^2}$.

6) Подставим полученную функцию $v=\dfrac{1}{1+x^2}$ во второе уравнение системы $u'\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x}{1+x^2}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим u': $u'=\dfrac{x(1+x^2)}{1+x^2}=x$ и запишем ее иначе $\dfrac{du}{dx}=x$. Разделим переменные $du=xdx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int du=\int xdx$. Получаем $u=\dfrac{x^2}{2}+C_1=\dfrac{x^2+C_1}{2}$ (см. Приложение).

7) Запишем найденную функцию $z=uv=\dfrac{x^2+C_1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}$.

8) Вернемся к искомой функции y, используя замену $y'=z$:

$y'=\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Распишем y': $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}$ и разделим переменные $dy=\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}dx$. Проинтегрируем правую и левую части $\int dy=\int\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}dx$. Для вычисления интеграла $\int\dfrac{x^2+C_1}{2(1+x^2)}dx$ в числителе выделим (x^2+1). Отметим, что стоящая в числителе константа C_1 – это некоторая постоянная величина. Поэтому выражение x^2+C_1 можно записать в виде x^2+C_1+1. Смысл от этого не нарушился, и, в то же время, выделился нужный нам многочлен (x^2+1).

$y=\int\dfrac{x^2+1}{2(1+x^2)}dx+\int\dfrac{C_1}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int dx+C_1\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}x+C_1arctg(x)+C_2$ (см. Приложение).

Ответ: $y=\dfrac{1}{2}x+C_1arctg(x)+C_2$.

2.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида

Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+...+a_{n-1} y' +a_n y=0 \ (a_i \in R)$$

называются ***линейными однородными дифференциальными уравнениями*** с постоянными коэффициентами. Описание решения уравнений данного вида:

1) составляем характеристическое уравнение

$\lambda^n+a_1 \lambda^{n-1}+a_2 \lambda^{n-2}+...+a_{n-1} \lambda+a_n=0$, решив которое находим корни λ_1, λ_2, … λ_n;

2) записываем ответ в виде $y(x)=C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)+...+ C_n y_n(x)$,

где $y_1(x)$, $y_2(x)$... $y_n(x)$ – фундаментальная система решений, которая записывается следующим образом:

если λ – действительный простой корень, то ему соответствует одно решение: $y=e^{\lambda x}$;

если λ – действительный корень кратности k, то ему соответствует k решений: $y_1=e^{\lambda x}, y_2=x\,e^{\lambda x}, y_3=x^2e^{\lambda x}...y_k=x^{k-1}e^{\lambda x}$;

если $\lambda=\alpha \pm i\beta$ – пара простых комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют два решения: $y_1=e^{\alpha x}\cos \beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin \beta x$;

если $\lambda=\alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряженных корней кратности k, им соответствуют $2k$ решений:

$y_1=e^{\alpha x}\cos \beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin \beta x$,

$y_3=x\,e^{\alpha x}\cos \beta x$, $y_4=x\,e^{\alpha x}\sin \beta x$,

....

$y_{2k-1}=x^{k-1}\,e^{\alpha x}\cos \beta x$, $y_{2k}= x^{k-1}\,e^{\alpha x}\sin \beta x$.

Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+...+a_{n-1} y' +a_n y=f(x) \ (a_i \in R)$$

называются ***линейными неоднородными дифференциальными уравнениями*** с постоянными коэффициентами.

Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x)$ вида

$$f(x)= e^{\alpha x}(T_n(x)\cos \beta x + R_m(x)\sin \beta x),$$

где α и β – постоянные, $T_n(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно с постоянными действительными коэффициентами, то это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и ***правой частью специального вида.***

Если же правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами не соответствует описанному виду, то говорят, что задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и ***правой частью произвольного вида***.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, как уже отмечалось выше, могут иметь правую часть либо специального вида, либо произвольного.

Рассмотрим ***решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида*** $f(x)=e^{\alpha x}(T_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x)$:

1) составим линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному линейному неоднородному

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$, и решим его.

Получим решение $y^0(x)$;

2) далее записываем частное решение исходного неоднородного уравнения. Вид частного решения зависит от правой части и от корней характеристического уравнения, полученных в пункте 1:

если $f(x)=e^{\alpha x}T_n(x)=e^{\alpha x}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)$, то частное решение $y^*(x)=x^p\cdot e^{\alpha x}(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)$,

где $p=0$, если α – не является корнем характеристического уравнения;

$p=k$, если α – является корнем характеристического уравнения кратности k.

если $f(x)=e^{\alpha x}(T_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x)$, то частное решение

$$y^*(x)=x^p\cdot e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x+P_s(x)\sin\beta x),$$

где $p=0$, если $\alpha+i\beta$– не является корнем характеристического уравнения;

$p=k$, если $\alpha+i\beta$ – является корнем характеристического уравнения кратности k;

$Q_s(x)$ и $P_s(x)$ – многочлены с неопределнными коэффициентами степени s, где $s=\max\{n, m\}$.

3) частное решение $y^*(x)$ подставляем в исходное неоднородное уравнение и находим неизвестные коэффициенты частного решения;

4) ответ записываем в виде суммы $Y(x)=y^0(x)+y^*(x)$.

Образец решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с правой частью специального вида

Задача 2.4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.

Решение

Определим вид дифференциального уравнения. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью специального вида.

1) Составим соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + 2y' + 5y = 0$ и решим его.

2) Для того, чтобы решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$, надо составить его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

3) Найдем λ, решив квадратное уравнение. Дискриминант $D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -16$. Тогда $\sqrt{D} = \pm 4i$ и $\lambda_1 = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$,

$\lambda_2 = \dfrac{-2-4i}{2} = -1-2i$.

4) Запишем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$: $y = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x)$.

5) Теперь запишем частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения. Правая часть $f(x) = 10\cos x$,

т. е. $f(x) = e^{\alpha x}(T_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$.

В записи правой части $f(x)$ явно отсутствует $e^{\alpha x}$, значит считаем, что $e^{\alpha x} = 1$, тогда $\alpha = 0$. $\beta = 1$, т. к. $f(x) = 10\cos(1x)$. При $\cos x$ стоит многочлен $T_n(x) = 10$ – это многочлен нулевой степени $n = 0$. Слагаемое с $\sin x$ отсутствует, значит считаем, что многочлен $R_m(x) = 0$, т. е. также многочлен нулевой степени $m = 0$.

Частное решение будем искать в виде $y^* = x^p e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + P_s(x)\sin\beta x)$. В данном примере $p = 0$, т. к. $\alpha + i\beta = 0 + i\cdot 1 = i$ не является корнем характеристического уравнения. s=max$\{n, m\}$=max$\{0, 0\}$=0. С учетом выше сказанного, запишем $y^*=a\cos x + b\sin x$ и найдем a и b.

6) Вычислим $y^{*\prime} = -a\sin x + b\cos x$, $y^{*\prime\prime} = -a\cos x - b\sin x$ и подставим их в изначальное уравнение:

$(-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 10\cos x$.

7) Раскроем скобки:

$-a\cos x - b\sin x - 2a\sin x + 2b\cos x + 5a\cos x + 5b\sin x = 10\cos x$

и приведем подобные $(-a+2b+5a)\cos x + (-b-2a+5b)\sin x = 10\cos x$.

8) Приравняв коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ справа и слева, получим систему уравнений: $\begin{cases} -a+2b+5a=10, \\ -b-2a+5b=0. \end{cases}$ В результате решения системы, получим $a=2$, $b=1$. Тогда $y^*=2\cos x + \sin x$.

9) Запишем решение исходного уравнения, состоящее из решения соответствующего ему однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения:

$y = C_1e^{-x}\cos(2x) + C_2e^{-x}\sin(2x) + 2\cos x + \sin x$.

Ответ: $y = C_1e^{-x}\cos(2x) + C_2e^{-x}\sin(2x) + 2\cos x + \sin x$.

2.5. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью произвольного вида

Решение данных уравнений осуществляется с помощью ***метода вариации произвольных постоянных***:

1) составим линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному линейному неоднородному

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ и решим его. Получим решение $y^0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$. Далее будем считать, что $C_1, C_2, \ldots C_n$ не постоянные величины, а функции, зависящие от x, тогда

$y^0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$;

2) составим систему $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ .... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения. В частности, для уравнений второго порядка система будет иметь вид: $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$

Из системы находим $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$, из которых путем интегрирования получаем $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$;

3) ответ записываем в виде $Y(x)= C_1(x)y_1(x)+ C_2(x)y_2(x)+...+ C_n(x)y_n(x)$.

Образец решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с правой частью произвольного вида

Задача 2.5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$.

Решение

Сначала определим вид дифференциального уравнения. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью произвольного вида.

1) Составим соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' - 3y'+2y=0$ и решим его.

2) Для того, чтобы решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 3y'+2y=0$, надо составить его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda+2=0$.

3) Найдем λ, решив квадратное уравнение. Дискриминант $D=(-3)^2 - 4\cdot1\cdot2=9 - 8=1$. Тогда $\sqrt{D}=1$ и $\lambda_1=\frac{3+1}{2}=2$, $\lambda_2=\frac{3-1}{2}=1$.

4) Запишем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$.

5) Далее будем считать, что C_1 и C_2 не постоянные величины, а функции, зависящие от x, т. е. $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, и запишем систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases} C_1' e^{x} + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^{x} + C_2' \cdot 2e^{2x} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}. \end{cases}$

6) Решим полученную систему. Для этого из первого уравнения выразим C_1' и подставим во второе уравнение. $\begin{cases} C_1' = -C_2' e^{x}, \\ -C_2' e^{2x} + C_2' \cdot 2e^{2x} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}. \end{cases}$ Преобразуем второе уравнение $C_2' e^{2x} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$. Выразим $C_2' = \dfrac{1}{e^{x}(1+e^{-x})} = \dfrac{1}{e^{x}+1}$. Подставим полученное выражение в первое уравнение $C_1' = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

7) Получили два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными $C_1' = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ и $C_2' = \dfrac{1}{e^{x}+1}$. Решим их.

8) В $C_1' = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ распишем C_1': $\dfrac{dC_1}{dx} = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$. Разделим переменные $dC_1' = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int dC_1 = -\int \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$. Получим $C_1 = -\ln(e^{x}+1) + K_1$ (см. Приложение).

9) В $C_2' = \dfrac{1}{e^{x}+1}$ распишем C_2': $\dfrac{dC_2}{dx} = \dfrac{1}{e^{x}+1}$. Разделим переменные $dC_2 = \dfrac{dx}{e^{x}+1}$ и проинтегрируем правую и левую части $\int dC_2 = \int \dfrac{dx}{e^{x}+1}$. Получим

$$C_2 = \int \frac{dx}{e^{x}+1} = \left[\begin{array}{c} e^{x}+1 = t \\ x = \ln|t-1|, dx = \dfrac{dt}{t-1} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln\left| \frac{t-1}{t} \right| + K_2 = \ln\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1} \right) + K_2$$

(см. Приложение).

10) Подставим полученные значения C_1 и C_2 в общее решение $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ однородного дифференциального уравнения:

$$y = (-\ln(e^{x}+1) + K_1)\, e^{x} + \left(\ln\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1} \right) + K_2\right) e^{2x}.$$

Ответ: $y=(-\ln(e^x+1)+K_1)\,e^x+\left(\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)+K_2\right)e^{2x}$.

2.6. Указания к решению задачи 2.6

Задача 2.6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения 2.2 при начальном условии $y(2)=0$ и сравнить это решение с точным.

Решение

Решение данной задачи состоит из двух этапов. Во-первых, надо определить точное решение уравнения задачи 2.2 при заданном начальном условии. Во-вторых, надо используя средства табличного процессора Excel методом Эйлера найти приближенное решение того же уравнения задачи 2.2 при том же начальном условии.

В качестве примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение задачи 2.2.

Рассмотрим первую часть решения задачи. Из решения уравнения задачи 2.2. $(2x-2)y'=x+2y-3$ имеем общее решение дифференциального уравнения: $y=\left(\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C\right)(x-1)$. Для нахождения неизвестной константы C воспользуемся начальным условием $y(2)=0$. Это означает, что при $x=2$ функция y принимает значение, равное 0. Подставим 2 и 0 вместо соответственно x и y в общее решение:

$0=\left(\frac{1}{2}\ln|2-1|+\frac{1}{2-1}+C\right)(2-1)$. Решим полученное уравнение $0=(1+C)$ и получим $C=-1$. Тогда точное решение дифференциального уравнения $(2x-2)y'=x+2y-3$ при начальном условии $y(2)=0$ будет

$y=\left(\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-1\right)(x-1)$.

Во второй части решения с помощью табличного процессора Excel методом Эйлера требуется построить приближенное решение дифференциального уравнения задачи 2.2 $(2x-2)y'=x+2y-3$, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=0$. Подробное описание решения дано в методических указаниях к лабораторным работам «Численные методы решения задач по математике с использованием табличного процессора EXCEL». Лабораторная работа № 5.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Векторный анализ – это раздел векторного исчисления, в котором изучаются средствами математического анализа векторные и скалярные функции одного или нескольких аргументов.

Определение скалярного поля (Пискунов, т.1, гл. VIII, §13, стр. 272) [1]:

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D, в которой задана функция $u=u(x, y, z)$. В этом случае говорят, что в области D задано скалярное поле.

Определение векторного поля:

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D, в каждой точке которой определен вектор $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. В этом случае говорят, что в области D задано векторное поле.

Геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x, y)=C$ в пространстве двух измерений, и поверхности уровня $u(x, y, z)=C$ в пространстве трех измерений.

Геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. ***Векторная линия*** – это линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. ***Векторная трубка*** – это поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Скалярное поле имеет следующие числовые характеристики: производная по направлению и градиент.

3.1. Вычисление производной скалярного поля по направлению

Производная скалярного поля u(x, y, z) по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции $u(x, y, z)$ в направлении $\vec{l}$ и вычисляется по формуле: $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные функции $u(x, y, z)$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Образец решения задачи 3.1

Задача 3.1. Найти производную скалярного поля $u=e^x\sqrt{z}+y^3x^2+\ln(yz)$ в точке M_0 (0,1,4) по направлению к точке M_1 (0,4,0).

Решение

При решении данной задачи воспользуемся формулой для производной скалярного поля $u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$: $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

1) Найдем частные производные функции $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sqrt{z} + 2xy^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2x^2 + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^x}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{z}.$$

2) Вычислим значения частных производных в точке M_0. Для этого подставим вместо x, y и z соответствующие координаты точки, т. е. 0, 1, 4.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = e^0\sqrt{4} + 2\cdot 0\cdot 4^3 = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 3\cdot 1^2\cdot 0^2 + \frac{1}{1} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \frac{e^0}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3) Теперь найдем вектор $\vec{l}$. В данной задаче направление задается вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$. Значит для того чтобы найти координаты вектора $\vec{l}$ надо из координат точки M_1 вычесть соответствующие координаты точки M_0. Получим:
$\vec{l} = \{0, 3, -4\}$

4) Далее найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l}$. Для этого вычислим модуль вектора $\vec{l}$: $|\vec{l}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ и разделим покоординатно вектор $\vec{l}$ на $|\vec{l}| = 5$. Получим: $\cos\alpha = \frac{0}{5} = 0$, $\cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\cos\gamma = -\frac{4}{5} = -0{,}8$.

5) Подставим полученные значения в формулу производной по направлению: $\frac{\partial u}{\partial l} = 2\cdot 0 + 1\cdot 0{,}6 + 0{,}5\cdot(-0{,}8) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = 0{,}2$.

3.2. Вычисление градиента скалярного поля

Градиент скалярного поля u(x, y, z) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – это вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в точке M_0 в сторону возрастания функции $u(x, y, z)$ в этой точке. Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ обозначается $\operatorname{grad} u$ или ∇u и равен $\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Образец решения задачи 3.2

Задача 3.2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \cos(xy) + \sin(yz)$ в точке $M\,(0, 2, \pi)$.

Решение

Градиентом называется вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в т. М в сторону возрастания функции $u(x, y, z)$ в той же точке.

При нахождении градиента скалярного поля пользуются следующей формулой:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

1) Вычислим частные производные функции $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(xy)\cdot y\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin(xy)\cdot x + \cos(yz)\cdot z\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} = \cos(yz)\cdot y\,.$$

2) Найдем значения частных производных в точке M. Для этого в частные производные вместо x, y и z подставим соответствующие координаты точки M, т. е. 0, 2 и π:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = -\sin(0\cdot 2)\cdot 2 = 0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -\sin(0\cdot 2)\cdot 0 + \cos(2\cdot\pi)\cdot\pi = \pi\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \cos(2\cdot\pi)\cdot 2 = 2\,.$$

3) Запишем полученные значения в формулу градиента $\left.\nabla u\right|_M = 0\vec{i} + \pi\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ: $\left.\nabla u\right|_M = \{0, \pi, 2\}$

3.3. Вычисление дивергенции векторного поля

Дивергенция векторного поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ есть следующая сумма: $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Если в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)=0$, то говорят, что в этой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ векторное поле $\vec{F}$ является ***соленоидальным***.

Образец решения задачи 3.3

Задача 3.3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = zx^2\vec{i} - y^5\vec{j} + zy^2\vec{k}$ соленоидальным.

Решение

Векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$ называется соленоидальным, если $\mathrm{div}\vec{F} = 0$.

Для того чтобы выяснить является ли векторное поле $\vec{F}$ соленоидальным, вычислим дивергенцию данного векторного поля. Для этого воспользуемся формулой дивергенции: $\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, где $\vec{F} = \{P, Q, R\}$.

1) В данном примере $P=zx^2$, $Q= - y^5$, $R=zy^2$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xz$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -5y^4$, $\frac{\partial R}{\partial z} = y^2$.

2) Просуммируем получившиеся частные производные и получим $\mathrm{div}\vec{F} = 2xz - 5y^4 + y^2 \neq 0$. Значит, рассматриваемое векторное поле не является соленоидальным.

Ответ: Векторное поле $\vec{F} = zx^2\vec{i} - y^5\vec{j} + zy^2\vec{k}$ не является соленоидальным.

3.4. Вычисление ротора векторного поля

Ротор векторного поля $\vec{F}$ обозначается $\mathrm{rot}\vec{F}$ и вычисляется по формуле:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Если в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\mathrm{rot}\vec{F}(M_0)=0$, то говорят, что в этой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ векторное поле $\vec{F}$ является ***потенциальным***.

Образец решения задачи 3.4

Задача 3.4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^5\vec{i} + y^2\vec{j} - z^3\vec{k}$ потенциальным.

Решение

Векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$ является потенциальным, если $\operatorname{rot}\vec{F}=0$.

Для того чтобы найти $\operatorname{rot}\vec{F}$ воспользуемся следующей формулой:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

1) В данном примере $P=x^5$, $Q=y^2$, $R=-z^3$. Тогда $\dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0, \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0, \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0,$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$. Значит, $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ и рассматриваемое векторное поля является потенциальным.

Ответ: Векторное поле $\vec{F} = x^5\vec{i} + y^2\vec{j} - z^3\vec{k}$ является потенциальным.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В данном разделе даны задачи на вычисление криволинейного интеграла по координатам (криволинейного интеграла II рода), двойного интеграла по заданной области D и тройного интеграла по заданной области V.

4.1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Определение криволинейного интеграла по координатам (криволинейный интеграл II рода) можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XV.

Введем некоторые обозначения.

$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ – ***полный криволинейный интеграл в плоскости*** от $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по направленной дуге AB.

$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz$ – ***полный криволинейный интеграл в пространстве*** от $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ по направленной пространственной дуге AB.

Физический смысл криволинейного интеграла II рода

(Пискунов Н.С., т2, гл XV, § 3, стр. 216) [1]: Работа, совершаемая силой $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ вдоль линии $L = MN$, *равна криволинейному интегралу*

$A = \int\limits_{M}^{N} Pdx + Qdy + Rdz$.

Основные свойства криволинейного интеграла II рода:

1) Криволинейный интеграл II рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy.$$

2) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} Pdx + \int\limits_{AB} Qdy$.

3) Разобьем кривую $L = AB$ точкой C на части L_1 и L_2, тогда

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$$

Сведение криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу:

1) для параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$:

$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_{t_2}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$, здесь точка A имеет координаты $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ и точка B $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$;

2) для функции $y=f(x)$, $x \in [a, b]$: $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f_x']dx$, здесь точка A имеет координаты $(a, f(a))$ и точка B $(b, f(b))$.

Образец решения задачи 4.1

Задача 4.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $(y \geq 0)$, от $M(3, 0)$ до $N(-3, 0)$.

Решение

Как было отмечено выше, искомая работа равна криволинейному интегралу $A = \int_M^N Pdx + Qdy + Rdz$. В данном случае $P = x^2 - y^2$, $Q = x^2 + y^2$, $R = 0$.

Значит, нужно вычислить криволинейный интеграл $\int_M^N (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$.

Для того чтобы перейти от криволинейного интеграла к определенному, надо выразить $y(x)$ из $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ с учетом условия $(y \geq 0)$. Получим $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$. Далее найдем $y' = \frac{2}{3} \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{2x}{3\sqrt{9 - x^2}}$.

Подставим полученные результаты в интеграл, заменив при этом пределы интегрирования на абсциссы точек M и N:

$$\int_M^N (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = \int_3^{-3} \left(x^2 - 4 + \frac{4}{9}x^2 \right) dx + \left(x^2 + 4 - \frac{4}{9}x^2 \right)\left(-\frac{2x}{3\sqrt{9 - x^2}} \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(\frac{13}{9}x^2 - 4 - \frac{10x^3}{27\sqrt{9-x^2}} - \frac{8x}{3\sqrt{9-x^2}}\right)dx = \left(\frac{13}{27}x^3 - 4x - \frac{10}{81}(9-x^2)^{3/2} + \frac{18}{3}\sqrt{9-x^2}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 2.$$

Ответ: $A = 2$.

4.2. Вычисление двойного интеграла

Определение двойного интеграла можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XIV.

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D обозначается

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Основные свойства двойного интеграла:

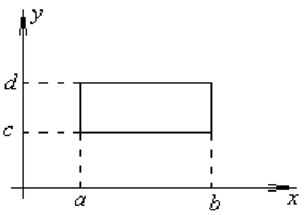
1) $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y)dxdy$;

2) $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$, где c – постоянная;

3) Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

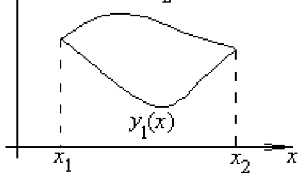
Сведение двойного интеграла к повторному интегралу:



1) для прямоугольной области R:

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{cases} \quad \iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx;$$

Рис. 2. Прямоугольная область R.



2) для произвольной области D:

$$\begin{cases} x_1 \le x \le x_2, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y(x))dy\right)dx.$$

Рис. 3. Произвольная область D.

4.3. Вычисление тройного интеграла

Определение тройного интеграла можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XIV.

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Сведение тройного интеграла к трехкратному интегралу для произвольной области V: $\begin{cases} x_1 \le x \le x_2, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

Замечание: если область интегрирования V является цилиндром или конусом, либо ее проекция на ось z=0 задается в полярной системе координат, то используются цилиндрические координаты: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$ и тогда

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D'} f(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho,\varphi,z)dz.$$

Если же область V является шаром или его частью, то применяются сферические координаты: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ причем, $\begin{cases} 0 \le \rho < \infty, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D'} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Образец решения задачи 4.3

Задача 4.3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V 8y^2ze^{-xyz}dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: x=2, y= –1, z=2, x=0, y=0, z=0.

Решение

Формула сведение тройного интеграла к трехкратному для данной области: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$

1) Изобразим область V.

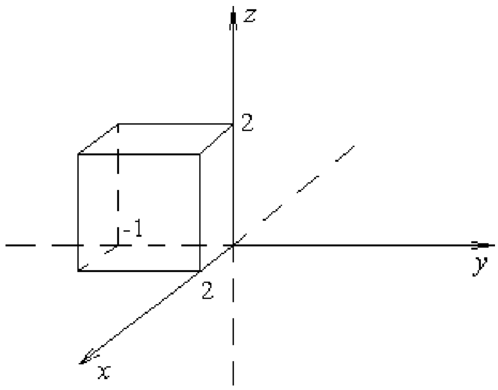


Рис. 5. Область V.

2) Из рисунка видно, что пределы интегрирования по z это 0 и 2, по y – это –1 и 0, по x – это 0 и 2.

3) Сведем исходный тройной интеграл к трехкратному и вычислим его:

$$\iiint\limits_V 8y^2ze^{-xyz}dxdydz = \int\limits_0^2\left(\int\limits_{-1}^0\left(\int\limits_0^2 8y^2ze^{-xyz}dx\right)dy\right)dz = \int\limits_0^2\left(\int\limits_{-1}^0\left((-8y^2ze^{-xyz})\Big|_{x=0}^{x=2}\right)dy\right)dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^0\left(\int\limits_0^2(-8y^2ze^{-2yz} + 8y^2z)dz\right)dy = \int\limits_{-1}^0\left(\left(4yze^{-2yz} + 2e^{-2yz} + 4y^2z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^0\left(8ye^{-4y} + 2e^{-4y} + 16y^2 - 2\right)dy = \left(-2ye^{-4y} - e^{-4y} + \frac{16}{3}y^3 - 2y\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=0} =$$

$$= -1 - 2e^4 + e^4 + \frac{16}{3} - 2 = \frac{7}{3} - e^4.$$

Ответ: $\iiint\limits_V 8y^2 ze^{-xyz}\,dxdydz = \frac{7}{3} - e^4.$

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 2 т., 1985.

Приложение

Таблица интегралов

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \qquad \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm A}\right| + C \qquad \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Таблица значений тригонометрических функций Таблица 1

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Радианы	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	- 1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	- 1	$-\sqrt{3}$	-∞

Градусы	210	225	240	270	300	315	330	360
Радианы	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
Sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Учебное издание

МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к курсовой работе

Составитель: Е.П. Ростова

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева
443086 Самара, Московское шоссе, 34