МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# Моделирование экспериментальных данных для решения задач распознавания образов

*Электронные методические указания*
*к лабораторной работе № 1*

**САМАРА**

**2010**

Составители: КОЛОМИЕЦ Эдуард Иванович,
МЯСНИКОВ Владислав Валерьевич

В лабораторной работе № 1 по дисциплине «Математические методы распознавания образов и понимания изображений» изучаются методы получения выборочных данных, являющихся реализациями нормально распределенных случайных векторов и бинарных случайных векторов с независимыми координатами. Эти данные предназначены для изучения в последующем различных методов и алгоритмов классификации. Дается описание среды математического программирования MathCad, в рамках которой выполняется лабораторная работа.

Методические указания предназначены для магистров направления 010400.68 “Прикладная математика и информатика”, обучающихся по программе «Математические и компьютерные методы обработки изображений и геоинформатики».

**Цель работы** - подготовка экспериментального материала для решения задач распознавания образов, получение навыков работы в среде MathCad.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

## 1.1. Моделирование случайного вектора с нормальным законом распределения

Пусть $\overline{X} = (X_0, \ldots, X_{n-1})^T$ - $n$ – мерный случайный вектор, имеющий нормальный закон распределения: $\overline{X} \sim N(\overline{M}, B)$. Это означает, что плотность вероятностей случайного вектора $\overline{X}$ имеет вид:

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|B|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{M})^T B^{-1}(\overline{x}-\overline{M})\right),$$

где $|\ldots|$ - определитель матрицы, $(\ldots)^T$ - транспонирование матрицы (вектора). Вектор $\overline{M} = (M_0, \ldots, M_{n-1})^T$ представляет собой вектор математических ожиданий координат вектора $\overline{X}$ : $M_i = MX_i$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ ; $B$ – корреляционная матрица

$$B = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & \ldots & B_{0(n-1)} \\ B_{10} & B_{11} & \ldots & B_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ B_{(n-1)0} & B_{(n-1)1} & \ldots & B_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

элементами которой являются всевозможные корреляционные моменты: $B_{ij} = M(X_i - M_i)(X_j - M_j)$, $\left(i, j = \overline{0, n-1}\right)$. Очевидно, что вектор $\overline{M}$ и матрица $B$ полностью определяют нормальный закон распределения.

Вектор $\overline{X} \sim N(\overline{M}, B)$ можно получить специальным линейным преобразованием вектора $\overline{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})^T$ , компоненты которого суть независимые случайные величины, имеющие стандартный нормальный закон распределения:

$$\xi_i \sim N(0, 1), \quad m_i = 0, \quad \sigma_i^2 = 1, \quad \left(i = \overline{0, n-1}\right).$$

Обычно предполагают, что матрица $A$ преобразования $\overline{X} = A\overline{\xi} + \overline{M}$ является треугольной, то есть

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $a_{ij}$ легко определяются рекуррентным образом. Действительно, для диагональных элементов матрицы $B$ справедливо соотношение:

$$B_{ii}=M\left[X_i-M_i\right]^2=M\left[\left(\sum_{k=0}^{i}a_{ik}\,\xi_k+M_i\right)-M_i\right]^2=M\sum_{k=0}^{i}\ \sum_{l=0}^{i}a_{ik}\,a_{il}\,\underbrace{\xi_k\xi_l}_{\delta_{kl}}=\sum_{k=0}^{i}a_{ik}^2=a_{ii}^2+\sum_{k=0}^{i-1}a_{ik}^2\ ,$$

откуда

$$a_{ii}=\sqrt{B_{ii}-\sum_{k=0}^{i-1}a_{ik}^2},\quad i=\overline{1,n-1};\qquad a_{00}=\sqrt{B_{00}}\ .$$

Для недиагональных элементов матрицы $B$ выполняется равенство:

$$B_{ij}=M\left(X_i-M_i\right)\left(X_j-M_j\right)=M\left(\sum_{k=0}^{i}a_{ik}\,\xi_k\right)\left(\sum_{l=0}^{j}a_{jl}\,\xi_l\right)=\sum_{k=0}^{i}\ \sum_{l=0}^{j}a_{ik}a_{jl}\,\underbrace{M\xi_k\xi_l}_{\delta_{kl}}\ .$$

Предполагая, что $i<j$, получаем:

$$B_{ij}==\sum_{k=0}^{i}a_{ik}\,a_{jk}\ =\sum_{k=0}^{i-1}a_{ik}a_{jk}+a_{ii}a_{ji}\ ,$$

откуда

$$a_{ji}=\frac{1}{a_{ii}}\left(B_{ij}-\sum_{k=0}^{i-1}a_{ik}a_{jk}\right),\quad 1\le i<j\le n-1;\qquad a_{j0}=\frac{B_{0j}}{a_{00}},\quad j=\overline{1,n-1};.$$

В частном случае, когда случайный вектор является двумерным ($n$=2), получаем следующие выражения для элементов матрицы преобразования:

$$a_{00}=\sqrt{B_{00}},\quad a_{21}=\frac{B_{01}}{\sqrt{B_{00}}},\quad a_{11}=\sqrt{B_{11}-\frac{B_{01}^2}{B_{00}}}$$

Заметим, что поскольку для элементов матрицы $B$ справедливо неравенство $\left|B_{ij}\right|\le\sqrt{B_{ii}\,B_{jj}}$, $\left(i,j=\overline{0,n-1}\right)$, то все коэффициенты $a_{ij}$ корректно определены в том смысле, что подкоренные выражения в приведенных соотношениях всегда неотрицательны.

### 1.2. Оценивание параметров нормального закона распределения

Если $n$-мерный случайный вектор $\overline{X}$ имеет нормальный закон распределения $N\left(\overline{M}, B\right)$, то оценки максимального правдоподобия его математического ожидания $\hat{\overline{M}}$ и корреляционной матрицы $\hat{B}$, найденные по выборке $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N$ объема $N$, выглядят следующим образом:

$$\hat{\overline{M}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i \ , \qquad \hat{B} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}_i - \hat{\overline{M}}\right)\left(\overline{x}_i - \hat{\overline{M}}\right)^T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i\overline{x}_i^T - \hat{\overline{M}}\ \hat{\overline{M}}^T \ .$$

Оценки вектора средних $\hat{\overline{M}}$ и корреляционной матрицы $\hat{B}$ можно задать и рекуррентными соотношениями, когда коррекция их значений, вычисленных по выборке объема $N$, производится с учетом появления каждого нового элемента выборки. Обозначим $\hat{\overline{M}}(N)$ и $\hat{B}(N)$ - оценки $\hat{\overline{M}}$ и $\hat{B}$, вычисленные по выборке объема $N$. Полагая на первом шаге $\hat{\overline{M}}(1) = \overline{x}_1$, имеем

$$\hat{\overline{M}}(N+1) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\overline{x}_i = \frac{1}{N+1}\left(N\,\hat{\overline{M}}(N) + \overline{x}_N\right) \ .$$

Пополнение выборки одним элементом при расчете оценки корреляционной матрицы приводит к следующему выражению:

$$\hat{B}(N+1) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\overline{x}_i\overline{x}_i^T - \hat{\overline{M}}(N+1)\hat{\overline{M}}^T(N+1) =$$

$$= \frac{1}{N+1}\left(N\ \hat{B}(N) + N\,\hat{\overline{M}}(N)\hat{\overline{M}}^T(N+1) + \overline{x}_{N+1}\overline{x}_{N+1}^T\right) - \frac{1}{(N+1)^2}\left(N\,\hat{\overline{M}}(N) + \overline{x}_{N+1}\right)\left(N\,\hat{\overline{M}}(N) + \overline{x}_{N+1}\right)$$

При этом на первом шаге $\hat{B}(1) = 0$, так как $\hat{\overline{M}}(1) = \overline{x}_1$.

### 1.3. Меры близости нормальных распределений

Пусть $f_0(\overline{x})$ и $f_1(\overline{x})$ - плотности вероятностей нормально распределенного случайного вектора с параметрами:

$$f_0 \sim N\left(\overline{M}_0, B_0\right) \text{ и } f_1 \sim N\left(\overline{M}_1, B_1\right) .$$

Мерой близости распределений $f_0(\overline{x})$ и $f_1(\overline{x})$ является *расстояние Бхатачария*, вычисляемое по формуле:

$$\rho_B = \frac{1}{4}\left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right)^T \left(\frac{B_1 + B_0}{2}\right)^{-1} \left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\dfrac{B_1 + B_0}{2}\right|}{\sqrt{|B_1| \cdot |B_0|}}. \qquad (1)$$

Для случая равных корреляционных матриц $(B_1 = B_0 = B)$ в качестве меры близости распределений используют расстояние Махаланобиса между векторами средних двух нормальных распределений:

$$\rho_M\left(\overline{M}_0, \overline{M}_1\right) = \left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right)^T B^{-1}\left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right), \qquad (2)$$

которое в этой ситуации с точностью до постоянного множителя совпадает с расстоянием Бхатачария. Если компоненты случайного вектора $\overline{X}$ независимы и одинаково распределены, то есть корреляционная матрица удовлетворяет условию $B = D_X I$, где $I$ – единичная $N \times N$ матрица, а $D_X$ - дисперсия компонент случайного вектора, то близость нормальных распределений в смысле расстояния Махаланобиса и, соответственно, Бхатачария эквивалентна близости в смысле евклидова расстояния между векторами средних:

$$\rho_E\left(\overline{M}_0, \overline{M}_1\right) = \left\|\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right\|^2 = \left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right)^T\left(\overline{M}_1 - \overline{M}_0\right).$$

Использование метрик Бхатачария или Махаланобиса в общем случае предпочтительнее евклидовой, поскольку они учитывают как дисперсии отдельных компонент случайного вектора, так и их взаимные корреляции.

Расстояния Бхатачария и Махаланобиса обладают следующим важным для задач распознавания свойством.

**Утверждение.** *Расстояния Бхатачария и Махаланобиса инвариантны относительно любого невырожденного линейного преобразования случайного вектора.*

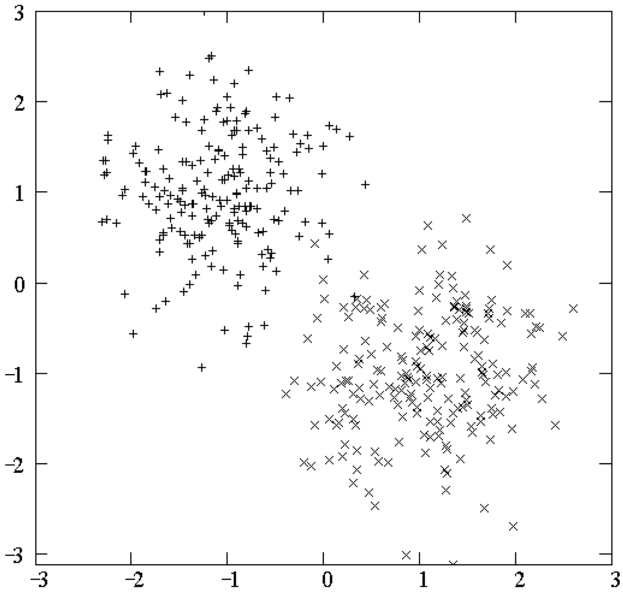
Действительно, пусть вектор $\overline{Y}$ получен в результате линейного преобразования нормально распределенного случайного вектора $\overline{X}$: $\overline{Y} = C\overline{X} + \overline{E}$, где $C$ - матрица преобразования с отличным от нуля определителем $\left(|C| \neq 0\right)$, отвечающая за поворот и масштабирование координатных осей, а $\overline{E}$ - вектор, определяющий смещения начала координат. Случайный вектор $\overline{Y}$ оказывается также распределенным нормально с параметрами:

$$\overline{M}_l^Y = C\overline{M}_l + E, \qquad B_l^Y = CB_lC^T, \quad (l = 0{,}1). \tag{3}$$

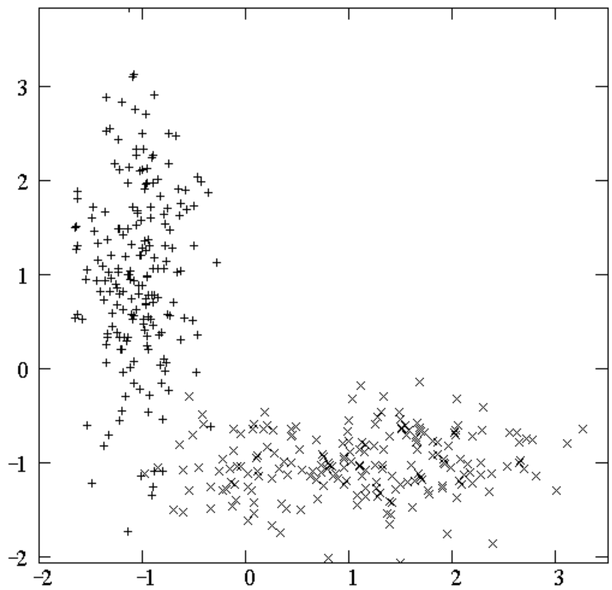
Подставляя (3) в выражения для расстояний (1) и (2) и учитывая справедливость следующих тождеств для произвольных невырожденных матриц $C$ и $B$:

$$|BC| = |B||C|, \quad (BC)^T = C^T B^T, \quad (BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1},$$

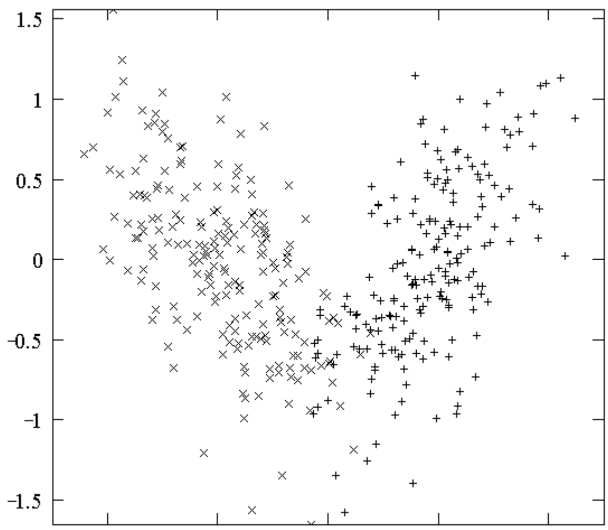
убеждаемся в справедливости приведенного утверждения.



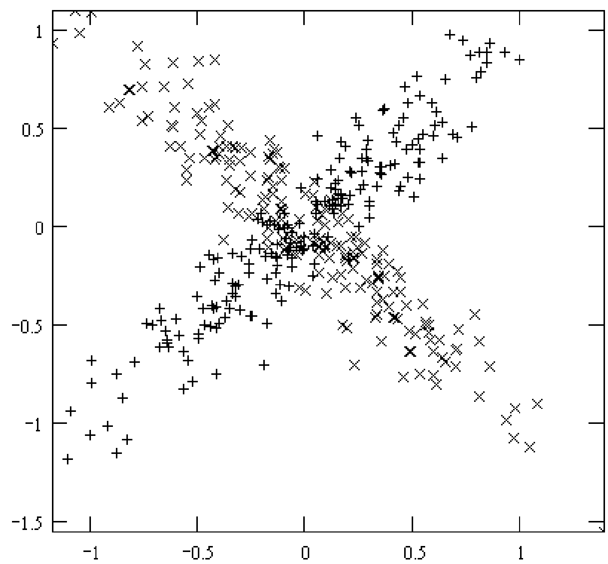

$B_0 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\rho_B = 5$, $\rho_M = 20$;




$B_0 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\rho_B = 5$, $\rho_M = 18$;




$B_0 = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\rho_B = 3.5$, $\rho_M = 14$;




$B_0 = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\rho_B = 1$, $\rho_M = 0$.

***Рис.1.*** *Примеры реализаций нормально распределенных случайных векторов*
*( $f_0$ – "×", $f_1$ – "+", a>b>0)*

### 1.4. Моделирование бинарных случайных векторов с независимыми координатами

Пусть $\overline{X} = \left(X_0, \ldots, X_{n-1}\right)^T$ - $n$ – мерный бинарный случайный вектор, компоненты которого принимают одно из двух значений $\{0,1\}$. Закон распределения бинарного случайного вектора задается совокупностью вероятностей $P\left(\overline{X} = \overline{x}\right)$ для всех возможных значений $\overline{x} = \left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right)^T$ вектора. Если координаты вектора $\overline{X}$ независимы, то распределение вероятностей записывается в виде:

$$P\left(\overline{X} = \overline{x}\right) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(X_i = x_i\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(p_i x_i + (1 - p_i)(1 - x_i)\right),$$

где $p_i = P\left(X_i = 1\right)$. Таким образом, для формирования одной реализации бинарного случайного вектора с независимыми координатами необходимо получить по одной реализации каждой из $n$ бинарных случайных величин $X_i$ $\left(i = 0, n-1\right)$.

Стандартный метод моделирования бинарной случайной величины $X$ с распределением вероятностей $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$ основан на следующих очевидных соотношениях:

$$P\{0 \le U < 1 - p\} = 1 - p, \quad P\{1 - p < U \le 1\} = p,$$

где $U$ – равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина: $U \sim R[0,1]$. Таким образом случайные величины $U$ и $X$ связаны соотношением:

$$X = [U/(1 - p)],$$

где $[\ldots]$ - целая часть числа. Следовательно, компоненты одной реализации искомого вектора могут быть получены по формуле:

$$x_i = \left[u_i/(1 - p_i)\right], \quad i = \overline{0, n-1},$$

здесь $u_i$ - независимые реализации случайной величины $U$.

# 2. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ MATHCAD

MathCad – разработанная компанией MathSoft мощная среда математического программирования, обеспечивающая пользователя всеми необходимыми средствами для быстрого и эффективного решения математических задач и позволяющая производить как традиционные численные, так и более сложные аналитические (символьные) вычисления. Несомненным преимуществом MathCad, которое обозначилось с самых первых версий продукта, по сравнению со многими другими средствами, используемыми для математических расчетов, является совмещение свойств вычислительной таблицы и интерфейса WYSIWYG (What You See Is What You Get), который принят де факто в настоящее время практически во всех программных продуктах, разработанных в операционной системе Windows. Это означает, что вычисляемые выражения, включающие и обычные числовые данные, и вектора, и матрицы набираются и выглядят в MathCad именно так, как это принято в традиционной математике. Тем самым процесс подготовки к расчетам в MathCad напоминает процесс визуального программирования, когда требуемый результат (например, процесс аналитического вывода результата, решения уравнения и др.) записывается именно в том виде, как это выглядит в математических терминах. Некоторые примеры расчетов с использованием MathCad приведены на Рис.2.

## 2.1. Рабочая среда MathCad

Внешний вид MathCad[1] как приложения Windows достаточно традиционен. Область приложения подразделена на три части (см. Рис.3), включающие в себя меню, область размещения основных панелей управления и собственно рабочую область – “worksheet”, где и располагается вводимый пользователем текст. Средства математического программирования и управления вычислениями MathCad

---

[1] Описание рабочей среды производится на примере версии MathCad 7.0 для Windows. В предыдущих версиях, в частности версии MathCad 2.50 (DOS-версия), отсутствует ряд элементов, связанных с интерфейсом и возможностями проведения аналитических расчетов. В то же время набор команд для проведения численных расчетов, требуемых в настоящей лабораторной работе, остался практически неизменным. Некоторые различия выделены в дальнейшем изложении.

сосредоточены на панелях 1-7, которые могут быть вызваны с использованием *математической панели* (III). Символ, операция, матрица, график и другие элементы математических расчетов помещаются на рабочую область путем фиксации соответствующей кнопки на одной из этих панелей. Расположение требуемого элемента задается с помощью *курсора* (V).

Альтернативой для элементов меню и панелей управления является наборы управляющих команд, вводимых с клавиатуры. Их использование позволяет существенно повысить скорость работы в MathCad 7.0, а для DOS версии MathCad является основным способом работы в данной среде. Ниже приведены основные сведения, требуемые при работе с MathCad.

*Пример 1. Решение системы линейных уравнений*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \qquad c := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ *// ввод начальных данных*

$$b := A^{-1} \cdot c$$ *// решение системы*

$$b = \begin{bmatrix} -0.429 \\ 0.857 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *// результат*

*Пример 2. Вычисление суммы ряда*

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 2.7182818$$

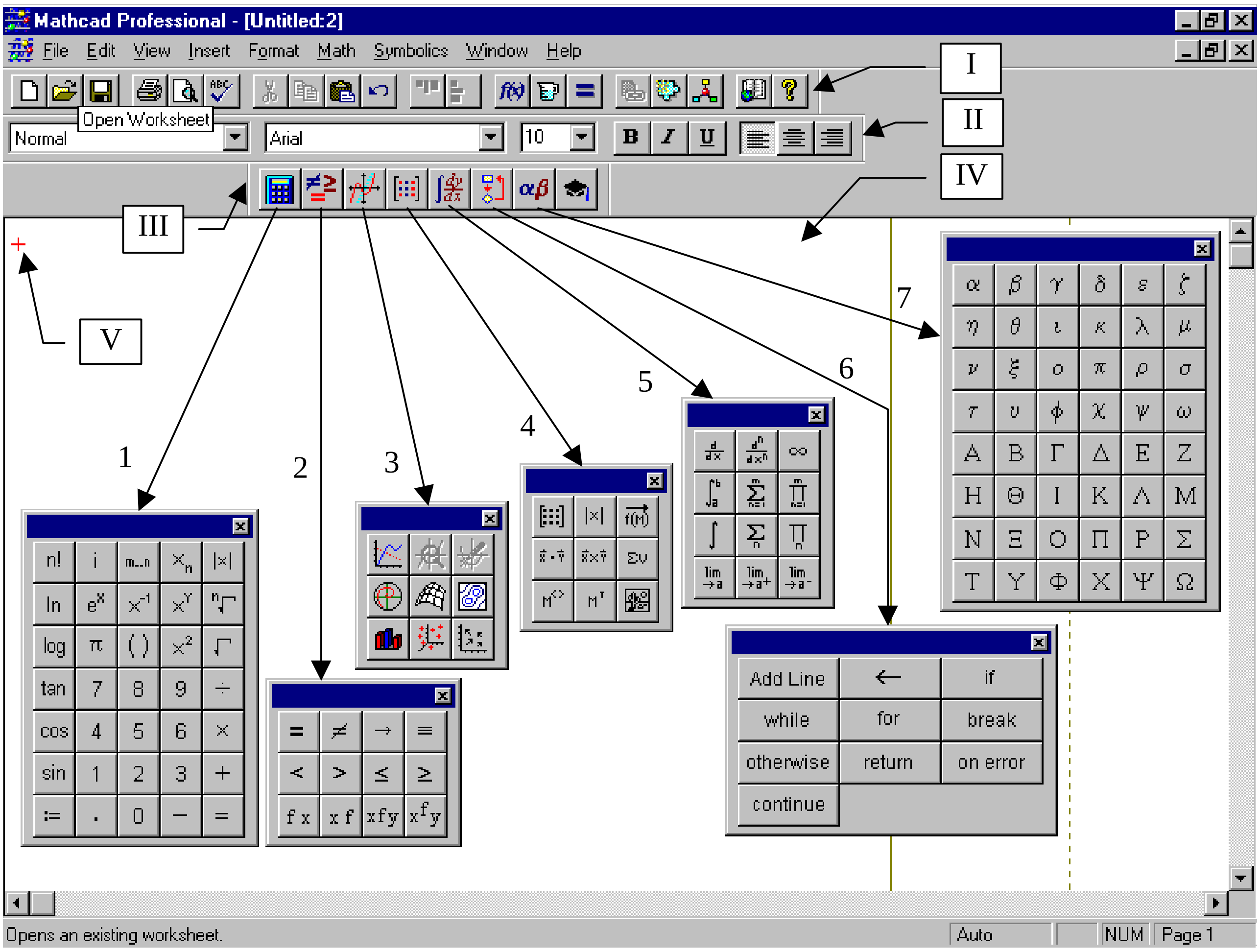
*Пример 3. Вычисление интеграла*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0.785$$

*Пример 4. Решение алгебраического уравнения второй степени в аналитическом виде*

$$x^2 + 5 \cdot x - 25 \quad \text{solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5} \\ \frac{-5}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

***Рис.2*** *Примеры математического программирования на MathCad*




*I – инструментальная панель, II – панель форматирования,*
*III – математическая панель, IV – рабочая область, V-курсор,*
*1 – панель арифметических операций, 2 – панель логических операций,*
*3 –панель графики, 4 - панель векторов и матриц, 5 – панель вычислений,*
*6 – панель программирования, 7 – панель греческих символов.*
***Рис.3** Рабочая область MathCad и элементы управления*

### 2.2. Назначение функциональных клавиш

| | |
|---|---|
| F1 | - вызов справки; |
| F2, Ctrl+C | - копировать во внутренний буфер; |
| F3, Ctrl+X | - вырезать и поместить в буфер; |
| F4, Ctrl+V | - вырезать и поместить в буфер; |
| F5, Ctrl+O | - загрузить файл; |
| F6, Ctrl+S | - сохранить файл на диске; |
| F9 | - запустить процесс вычислений; |
| Ctrl + F9 | - вставить пустую строку в месте положения курсора; |
| Ctrl + F10 | - удалить пустую строку на которой находится курсор; |

Ctrl + Home - перейти в начало программы;

Ctrl + End - перейти в конец программы;

@ или Shift + 2 - вывод на экран графика;

Ctrl + M - вставить матрицу;

Команды, используемые только в версии MathCad 2.50 (DOS)

F7 - включить режим двух окон;

F8 - переход в другое окно;

Ctrl + F7 - выключить режим двух окон;

F10 - вход в меню;

Alt + M - вставить матрицу.

### 2.3. Набор символов

Набор символов греческого алфавита в MathCad 7.0 производится посредством перевода в них соответствующих латинских символов. Перевод латинских символов в греческие и обратно осуществляется нажатием Ctrl+G в момент нахождения курсора на символе. В MathCad 2.5 (DOS) греческий символов вводится при наборе Alt + "символ", где "символ" – соответствующая греческому символу латинская литера.

Ниже приведена таблица соответствия для греческих и латинских символов.

| строчные греческие символы | | | заглавные греческие символы | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a - α | j - φ | s - σ | A - Α | J - ϑ | S - Σ |
| b - β | k - κ | t - τ | B - Β | K - Κ | T - Τ |
| c - χ | l - λ | u - υ | C - Χ | L - Λ | U - Υ |
| d - δ | m - μ | v - ϖ | D - Δ | M - Μ | V - ς |
| e - ε | n - ν | w - ω | E - Ε | N - Ν | W - Ω |
| f - φ | o - ο | x - ξ | F - Φ | O - Ο | X - Ξ |
| g - γ | p - π | y - ψ | G - Γ | P - Π | Y - Ψ |
| h - η | q - θ | z - ζ | H - Η | Q - Θ | Z - Ζ |
| i - ι | r - ρ | | I - Ι | R - Ρ | |

### 2.4. Построение математических выражений

Выражения в MathCad могут иметь одну из следующих форм:

*выражение* = … - производит вычисление значения выражения;

*переменная* := *выражение* - задание выражения для вычисления переменной;

*переменная* := *n1,n2...n3* - задание пределов изменения переменной;

*функция(арг1, арг2,...):=выражение(арг1, арг2,...)* - определение функции со списком аргументов "*арг1*", "*арг2*"и т.д.; функция задается как некоторое выражение от этих аргументов, например:

$$gauss(x, m, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

При наборе выражений используют следующие команды редактора формул MathCad.

| **оператор** | **вид на экране** | **набор** |
|---|---|---|
| пределы изменения переменной (от x до z с шагом y) | x,y...z | x,y;z |
| скобки | (x) | 'x или (x) |
| факториал | x! | x! |
| степень | $x^y$ | x^y |
| корень квадратный | $\sqrt{x}$ | \x |
| модуль, детерминант матрицы | \|A\| | \|A |
| сравнения | $x<y$ или $x>y$<br>$x\le y$ или $x\ge y$ | x<y или x>y<br>x [Alt]( y или x [Alt]( y |
| не равно | x#y | x [Alt]# y |
| приблизительное равенство | x≈y | x [Alt]= y |
| индекс | $x_i$ | x[i |
| двойной индекс | $M_{i,j}$ | M[(i,j) |
| верхний индекс | $M^{<i>}$ | M[Alt]^i |
| транспонированная матрица | $M^T$ | M[Alt]! |
| степень матрицы | $M^n$ | M^n |
| сумма элементов вектора | $\sum_i x_i$ | i$x[i |
| Произведение элементов вектора | $\prod_i x_i$ | i#x[i |

### 2.5. Обзор встроенных функции

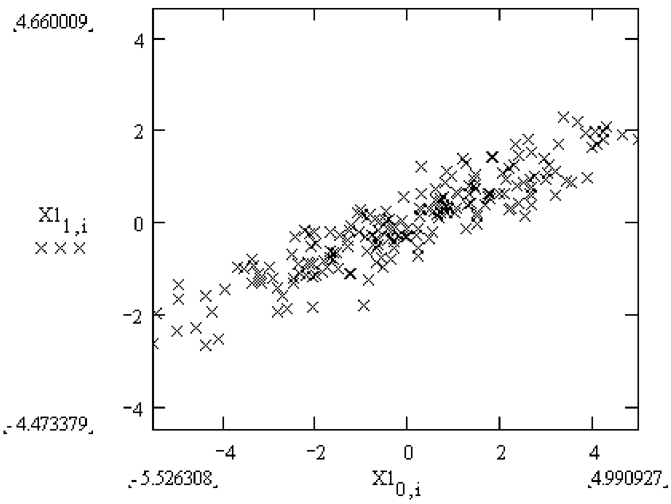
| | |
|---|---|
| *sin(z), cos(z),* | |
| *tan(z)* | - тригонометрические функции (аргумент в радианах); |
| *asin(z), acos(z),* | |
| *atan(z)* | - обратные тригонометрические функции (результат в радианах); |
| *sinh(z), asinh(z),* | |
| *cosh(z), acosh(z),* | |
| *tanh(z), atanh(z)* | - гиперболические функции; |
| *exp(z)* | - $e^z$; |
| *ln(z) (log(z))* | - натуральный (десятичный) логарифм числа *z*; |
| *erf(x)* | - - функция ошибок $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ; |
| *Г(x)* | - гамма-функция Эйлера ($-3 \le x \le 3$); |
| *rnd(x)* | - датчик случайных чисел, равномерно распределенных от 0 до *x*; |
| *Ф(x)* | - $\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ ( Alt + H ); |
| *until(x,y)* | - принимает значение *y* пока *x*≥0; |
| *if(условие,x,y)* | - принимает значение *y*, если условие равно нулю, иначе - *x*; |
| *mean(v)* | - среднее значение массива ( *v* – массив ); |
| *var(v)* | - дисперсия ( *v* - массив ); |
| *stdev(v)* | - среднеквадратическое отклонение ( *v* - массив ). |

### 2.6. Прикладная программа в MathCad

Структура программы MathCad, несмотря на существенные отличия в интерфейсе представления данных, напоминает структуру обычной прикладной программы на традиционном языке программирования: она, как правило, содержит блок инициализации, блок собственно расчетов и блок отображения результатов, каждый из которых не является обязательным. Однако в отличие от традиционных программ в MathCad отсутствует блок предварительного объявления (описания) переменных (скаляров, векторов, матриц и т.д.).

В качестве примера программы MathCad ниже приведена программа моделирования *N* значений двумерного нормально распределенного случайного вектора.

| Текст программы в MathCad | Комментарии |
|---|---|
| $M := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ | Задание параметров нормального закона распределения |
| $A_{0,0} := \sqrt{R_{0,0}} \qquad A_{0,1} := 0$<br>$A_{1,0} := \dfrac{R_{0,1}}{\sqrt{R_{0,0}}} \qquad A_{1,1} := \sqrt{R_{1,1} - \dfrac{\left(R_{0,1}\right)^2}{R_{0,0}}}$ | Определение параметров линейного преобразования |
| $A = \begin{bmatrix} 2.236 & 0 \\ 0.894 & 0.447 \end{bmatrix}$ | Отображение полученного результата для матрицы линейного преобразования |
| $n := 2 \qquad l := 0..\, n-1 \qquad k := 0..\, n-1$<br>$N := 200 \qquad i := 0..\, N-1$<br>$j := 0..11$ | Вспомогательные переменные, отвечающие за двукомпонентность вектора ($n$, $l$, $k$), число выборочных значений ($N$, $i$) и за процесс генерации стандартной нормально распределенной случайной величины ($j$). |
| $y_{l,i} := \sum_{j} \left(\mathrm{rnd}(1) - 0.5\right)$ | Генерация $N$ реализаций случайного вектора, компоненты которого – суть независимые и нормально распределенные $N(0{,}1)$ случайные величины. |
| $X_{k,i} := \sum_{l} A_{k,l} \cdot y_{l,i} + M_k$ | Генерация $N$ реализаций случайного вектора с требуемым нормальным законом распределения $N(\overline{M}, B)$. |




Графическое отображение результатов моделирования нормально распределенного случайного вектора.

## 3. ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К. Распознавание и цифровая обработка изображений. - М.: Высшая школа, 1983. - 295 с.
2. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен: Пер. с англ. - М.: Мир, 1976. - 512 с.
3. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1978. - 412с.
4. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов: Пер. с англ. - М.: Наука, 1979. - 368с.
5. MathSoft, Inc. MathCad Resource Center: The MathCad Tutorial, U.S., 1997.
6. MathSoft, Inc. MathCad Resource Center: Treasury Guide to Programming, U.S., 1997.

## 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

### 4.1. Исходные данные

- Вариант задания (предоставляется преподавателем);
- математические ожидания для трех наборов двумерных нормально распределенных случайных векторов (из соответствующего варианта задания);
- два бинарных вектора;
- исполняемый в системе MathCad файл, необходимый для выполнения лабораторной работы: Lab1.mcd (предоставляется преподавателем).

### 4.2. Общий план выполнения работы

1. Разработать алгоритм моделирования нормально распределенного случайного вектора с заданными математическим ожиданием и корреляционной матрицей.
2. Смоделировать и изобразить графически обучающие выборки объема $N=200$ для двух нормально распределенных двумерных случайных векторов с заданными математическими ожиданиями и самостоятельно подобранными равными корреляционными матрицами.
3. Смоделировать и изобразить графически обучающие выборки объема $N=200$ для трех нормально распределенных двумерных случайных векторов с заданными

математическими ожиданиями и с неравными корреляционными матрицами, которые выбрать самостоятельно.

4. На основании полученных выборок найти точечные оценки параметров нормального закона для каждого из распределений.
5. Смоделировать обучающие выборки объема $N=200$ двух бинарных случайных векторов с распределениями, которые обеспечивают вероятность изменения указанной в представителе компоненты случайного вектора равную $p = 0.3$.

### 4.3. Содержание отчета

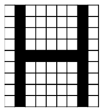
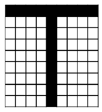
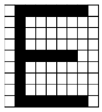
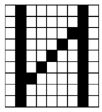
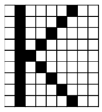
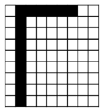
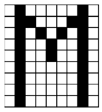
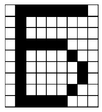
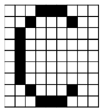
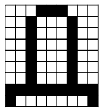
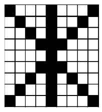
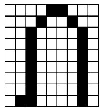
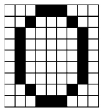
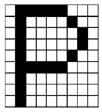
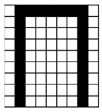
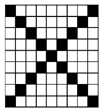
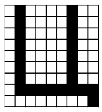
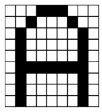
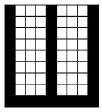
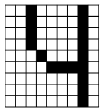
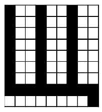
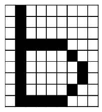
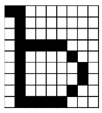
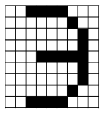
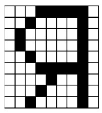
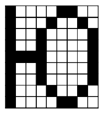
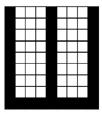
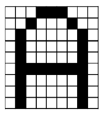
Отчет по работе должен содержать:

- исходные параметры моделируемых нормальных распределений; их оценки, полученные по обучающим выборкам, расстояния Бхатачария и Махаланобиса;
- графическое изображение значений векторов, полученных в п.2 и п.3, и имена файлов (с расширением .DAT), в которые они записаны;
- распределения бинарных случайных векторов и имена записанных файлов, содержащих их реализации (с расширением .DAT).

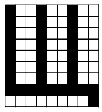
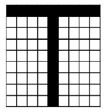
## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Алгоритм моделирования нормально распределенного случайного вектора.
2. Вид матрицы линейного преобразования, используемой для моделирования нормально распределенного случайного вектора.
3. Оценивание параметров нормального закона распределения.
4. Выражения для рекуррентного оценивания параметров нормального закона распределения.
5. Меры близости нормальных распределений.
6. Инвариантность расстояний к линейным преобразованиям.
7. Характер линейного преобразования, обеспечивающего инвариантность евклидового расстояния.
8. Алгоритм моделирования бинарного случайного вектора с независимыми координатами.
9. Отличие среды математического программирования MathCad от традиционных языков программирования.
10. Структура прикладной программы в MathCad.

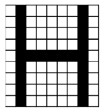
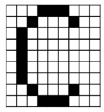
## 6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

| Вариант | Математические ожидания трех наборов нормально распределенных случайных векторов | Представители бинарных случайных векторов, □ ~ "0" , ■ ~ "1" | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 2. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 3. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 4. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 5. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 6. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 7. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 8. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 9. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 10. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 11. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 12. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 13. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$ |  |  |
| 14. | $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{M}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.$ |  |  |

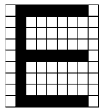
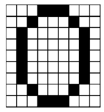
15. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

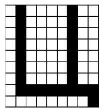
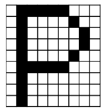
16. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

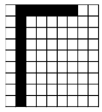
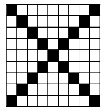
17. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

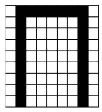
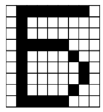
18. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

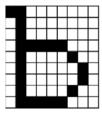
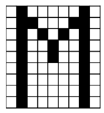
19. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

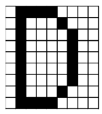
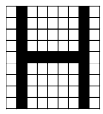
20. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

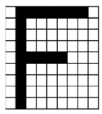
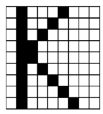
21. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

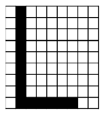
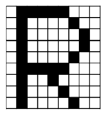
22. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

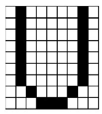
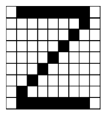
23. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

24. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

25. $\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

## СОДЕРЖАНИЕ