УДК 539.1

Составители: *Б. П. Дьяченко, А. И. Косенко*

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Молекулярно-кинетическая теория объясняет макроскопические свойства вещества в различных агрегатных состояниях на основании представлений о молекулярной структуре вещества, характере движения и взаимодействия молекул.

Простейшей является молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Идеальным называется газ, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Газ состоит из большого числа одинаковых молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.
2. Размеры молекул пренебрежимо малы по сравнению со средними расстояниями между ними.
3. Большую часть времени молекулы движутся свободно и взаимодействуют между собой или со стенками сосуда только в момент упругого соударения.

Модель идеального газа в ограниченном диапазоне температур и давлений хорошо описывает свойства реальных газов.

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Состояние идеального газа характеризуется совокупностью параметров.

Параметры состояния — это физические величины, характеризующие макроскопические свойства газов и являющиеся отражением молекулярного строения газа и процессов молекулярного взаимодействия. Основными параметрами состояния являются давление P, температура T и молярный объем V_μ.

Функция, устанавливающая связь между параметрами состояния вида $F(P, V_\mu, T) = 0$, называется уравнением состояния.

Для идеального газа уравнение состояния (уравнение Клапейрона-Менделеева) имеет вид:

$$PV_\mu = RT, \tag{1}$$

где R — универсальная газовая постоянная (в системе СИ $R = 8{,}314 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·град).

Умножив и разделив правую часть уравнения (1) на N_0 — число Авогадро, получим

$$P = n_0 kT, \tag{2}$$

где $n_0 = \frac{N_0}{V_\mu}$ — число молекул в единице объема; k — постоянная Больцмана (в системе СИ $k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ Дж/град).

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов устанавливает связь макроскопических параметров — давления и температуры с кинетической энергией молекул газа.

Для вывода этого уравнения воспользуемся схемой Больцмана.

Рассмотрим сосуд произвольной формы (рис. 1); выделим на поверхности сосуда элементарную площадку ΔS, перпендикулярную оси x.

Предположим, что в числе n молекул, заключенных в сосуде, содержится:

n_1 молекул со скоростью очень близкой к v_1 (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z});
n_2 —„— —„— —„— —„— v_2 (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z});
. . . .
n_m —„— —„— —„— —„— v_m (v_{mx}, v_{my}, v_{mz}).

Здесь v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} — составляющие скоростей молекул по осям x, y, z. При этом очевидно $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Будем называть молекулы соответственно молекулами первой, второй и т. д. групп.

Определим число молекул первой группы, попадающих на площадку ΔS за время Δt. Для этого выделим цилиндр, опирающийся на площадку ΔS, с образующей $\vec{v}_1 \Delta t$. Время Δt выберем настолько малым, чтобы число взаимных столкновений молекул в пределах этого цилиндра было пренебрежимо малым. Очевидно, все молекулы первой группы, заключенные внутри выделенного цилиндра за время Δt, попадут на стенку ΔS, так как они движутся параллельно образующей цилиндра со скоростью v_1.

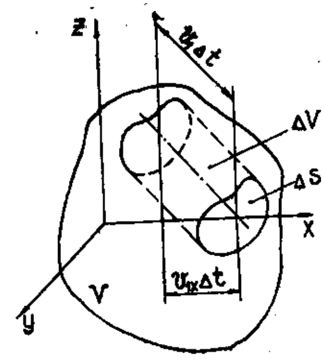

Рис. 1

Объем этого цилиндра равен $\Delta V = v_1 \Delta S \cos(x, \widehat{\ } v_1) = \Delta S v_{1x}$. Объемная плотность молекул первой группы, усредненная по всему объему $n_{01} = \frac{n_1}{V}$. Отсюда число молекул первой группы, ударяющихся о площадку ΔS, определится выражением

$$\Delta n_1 = n_{01} \Delta V = \frac{n_1}{V} \Delta S \, v_{1x} \Delta t.$$

В момент соударения молекулы со стенкой сосуда составляющая скорости v_{1x} изменит только знак, а составляющие v_{1y} и v_{1z} не изменятся, так как ось x перпендикулярна элементу ΔS и в идеальном газе удар упругий. Следовательно, при ударе молекул первой группы за время Δt элементу ΔS сообщается импульс

$$\Delta F_1 \cdot \Delta t = 2 m v_{1x} \frac{n_1}{V} \Delta S \, v_{1x} \Delta t. \tag{3}$$

Отсюда найдем силу ΔF, приложенную со стороны молекул всех групп

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{m} \Delta F_i = \frac{2 \Delta S}{V} \sum_{i=1}^{m} m n_i v_{ix}^2 . \tag{4}$$

Следовательно, давление на стенку сосуда, т. е. средняя сила, действующая со стороны молекул на стенку сосуда, отнесенная к единице поверхности стенки, будет равна

$$P = \frac{2}{V} \sum_{i=1}^{m} m n_i v_{ix}^2 . \tag{5}$$

Ввиду хаотичности движения число молекул, летящих к элементу ΔS и от него, будет одинаково. Так как молекулы, летящие от элемента ΔS, со стенкой не взаимодействуют, то выражение (5) надо разделить на два. Тогда можно записать

$$P = \frac{1}{V} mn \overline{v_x^2}, \tag{6}$$

где $\overline{v_x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_{ix}^2$ — среднее значение квадрата скоростей молекул.

Так как

$$v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2, \tag{7}$$

то получим

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}. \tag{8}$$

Величина $\sqrt{\overline{v^2}}$ называется средней квадратичной скоростью молекул. Вследствие хаотичности движения молекул отсутствуют какие-либо преобладающие направления. Поэтому

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}; \tag{9}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}. \tag{10}$$

Выражение (6), используя (10) и приняв во внимание, что $\frac{n}{V} = n_0$, можно представить в виде

$$P = \frac{1}{3} n_0 m \overline{v^2}. \tag{11}$$

Полученное уравнение называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Найдем кинетическую энергию поступательного движения молекул газа в объеме V:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{mv_i^2}{2} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n} v_i^2. \tag{12}$$

С учетом того, что

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = n\overline{v^2}, \tag{13}$$

средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы будет равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{n} = \frac{1}{2} m\overline{v^2}. \tag{14}$$

С использованием (14) перепишем (11) в виде

$$P = \frac{2}{3} n_0 \bar{\varepsilon}. \tag{15}$$

Сравнивая уравнения (2) и (11), можно получить выражение, определяющее среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{N_0 m}}. \tag{16}$$

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Положение абсолютно твердого тела относительно выбранной системы координат определяется шестью координатами: тремя линейными координатами центра масс и тремя угловыми, две из которых определяют направление выбранной оси в пространстве и одна — поворот тела относительно этой оси.

Минимальное число независимых координат, достаточное для определения положения тела в пространстве, называют числом степеней свободы. Оно равно числу возможных независимых движений тела.

Одноатомную молекулу газа можно считать материальной точкой. Многоатомные молекулы можно рассматривать как систему, состоящую из материальных точек. Если связь между атомами в молекуле жесткая, то двухатомная молекула имеет пять степеней свободы, а молекулы, состоящие из трех и более атомов, — шесть. Таким образом, многоатомные молекулы имеют три поступательных степени свободы, определяющихся числом координат центра масс при движении относительно осей координат, и три вращательных, обусловленных вращением молекулы относительно каждой из осей. Двухатомная молекула имеет три поступательных степени свободы и две вращательных. В них исключается одна вращательная степень свободы, так как бессмысленно говорить о вращении молекулы относительно оси, соединяющей две материальные точки — атомы. Одноатомная молекула имеет только три поступательных степени свободы, так как ее можно считать материальной точкой.

Из уравнений (2), (9), (11) и (14) следует, что на каждую поступательную степень свободы в среднем приходится одно и то же количество энергии

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} kT. \tag{17}$$

Можно доказать, что принцип равномерного распределения энергии верен для любых степеней свободы многоатомных молекул.

Таким образом, если молекула идеального газа имеет i поступательных и вращательных степеней свободы, то ее средняя кинетическая энергия равна

$$\bar{\varepsilon}_k = i \frac{kT}{2} \tag{18}$$

и средняя кинетическая энергия одного моля газа, т. е. его внутренняя энергия

$$V_\mu = \bar{\varepsilon}_k N_0 = i \frac{RT}{2}.$$

Если многоатомная молекула не жесткая, то имеют место колебания атомов около положения равновесия. Энергия внутримолекулярного движения при высоких температурах вносит существенный вклад во внутреннюю энергию газа.

Колебания атомов происходят с малыми амплитудами и их можно приближенно считать гармоническими. Известно, что для гармонического осциллятора средние значения кинетической и потенциальной энергии равны. Поэтому, с учетом принципа равномерного распределения энергии, на каждую колебательную степень свободы молекулы приходится энергия

$$\bar{\varepsilon} = kT,$$

слагающаяся из потенциальной и кинетической энергий, каждая из которых равна $\frac{1}{2} kT$.

Если молекула имеет j колебательных степеней свободы, то средняя энергия внутримолекулярного движения молекулы определится выражением

$$\bar{\varepsilon}_\beta = jkT. \tag{19}$$

Из соотношений (18) и (19) следует, что внутренняя энергия одного моля реального газа при высоких температурах в первом приближении равна

$$U_\mu \approx \left(\frac{i}{2} + j\right) kT. \tag{20}$$

ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГАЗА

Теплоемкостью тела называют физическую величину, равную отношению количества тепла, сообщаемого телу, к изменению его температуры

$$c = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Различают удельную теплоемкость — теплоемкость, отнесенную к единице массы

$$c = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}, \tag{21}$$

и молярную — теплоемкость, отнесенную к одному молю газа

$$C_\mu = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT}, \tag{22}$$

где $\nu = \frac{M}{\mu}$ — число молей в массе газа M; δQ — сообщенная газу теплота.

Из (21) и (22) следует, что

$$C_\mu = \mu c.$$

Теплоемкости зависят от вида процесса, в котором телу сообщается теплота.

Используя первый закон термодинамики, записанный для одного моля газа

$$\delta Q_\mu = dU_\mu + \delta A_\mu = dU_\mu + p dV_\mu, \tag{23}$$

из (22) получим

$$C_\mu = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial T}\right)_n + p \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T}\right)_n, \tag{24}$$

где производные берутся для данного процесса.

Определим теплоемкость в изохорическом процессе ($V = \mathrm{const}$). Так как $dV_\mu = 0$, то из (23) и (24) следует

$$C_V = \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial T}\right)_{V = \mathrm{const}} = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial T}\right)_{V = \mathrm{const}}. \tag{25}$$

Используя (20), найдем

$$C_V = \left(\frac{i}{2} + j\right) R. \tag{26}$$

Из (24) и (25) следует, что теплоемкость газа для произвольного термодинамического процесса определяется выражением

$$C = C_V + p \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T}\right)_n. \tag{27}$$

Определим теплоемкость в изобарическом процессе ($p =$ const)

$$C_p = C_V + p\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T}\right)_{p\,=\,\mathrm{const}}. \qquad (28)$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева $PV_\mu = RT$ следует

$$\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T}\right)_{p\,=\,\mathrm{const}} = \frac{R}{p} \qquad (29)$$

и

$$C_p = C_V + R \qquad (30)$$

или после подстановки (26)

$$C_p = \left(\frac{i}{2} + j + 1\right) R. \qquad (31)$$

Уравнение (30) называется уравнением Мейера.

Во многих процессах важную роль играет отношение теплоемкости C_p к теплоемкости C_V, называемое коэффициентом Пуассона:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{2}{i + 2j} > 1. \qquad (32)$$

СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО СОУДАРЕНИЙ

Длина свободного пробега молекулы — это путь, проходимый молекулой между двумя последовательными соударениями. Так как молекулы газа движутся хаотически, то длина свободного пробега меняется произвольным образом. Поэтому обычно рассматривается средняя длина свободного пробега молекулы $\bar{\lambda}$, определяемая выражением

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i, \qquad (33)$$

где ν — число соударений; λ_i — длина свободного пробега между соударением $i-1$ и соударением i.

За секунду молекула проходит путь, численно равный среднему значению модуля скорости молекулы (средней скорости молекулы) $\bar{v}$. Если при этом происходит ν соударений молекулы с другими молекулами, то средняя длина свободного пробега будет равна

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\nu}. \qquad (34)$$

Для определения частоты соударений предположим, что движется только одна молекула, а все остальные молекулы неподвижны. Скорость движущейся молекулы относительно неподвижных равна $\bar{v}_{\text{от}}$. При соударении центры молекул сближаются до минимального расстояния, называемого эффективным диаметром молекулы d (рис. 2). Величина σ называется эффективным сечением молекулы.

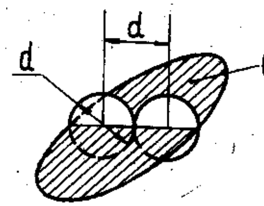

Рис. 2

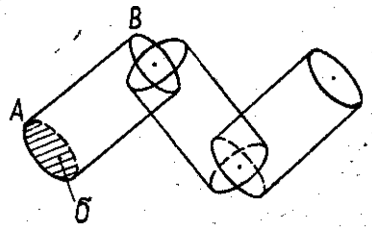

Рис. 3

При движении подвижной молекулы ее эффективное сечение опишет в пространстве цилиндрическую поверхность (рис. 3) с изломами в местах соударений. Объем, ограниченный ломаной цилиндрической поверхностью, при движении молекулы в течение одной секунды будет равен

$$V = \sigma\, \bar{v}_{\text{от}}. \qquad (35)$$

Число соударений рассматриваемой молекулы будет равно числу молекул, центры которых попадают внутрь ломаного цилиндра, т. е.

$$\nu = V n_0. \qquad (36)$$

Для нахождения скорости $\bar{v}_{\text{от}}$ рассмотрим движение двух сталкивающихся молекул A и B. Скорость молекулы A относительно молекулы B равна

$$\vec{v}_{\text{от}} = \vec{v}_A - \vec{v}_B. \qquad (37)$$

Квадрат модуля относительной скорости определится соотношением

$$v_{\text{от}}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = v_A^2 + v_B^2 - 2\, v_A\, v_B \cos(\widehat{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}). \qquad (38)$$

При усреднении обеих частей этого равенства по числу молекул в объеме газа $\overline{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B} = 0$, так как вследствие хаотичности движения молекул косинус угла между $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ может принимать положительные и отрицательные значения с равной вероятностью. Поэтому из (38) следует

$$\overline{v_{\text{от}}^2} = \overline{v_A^2} + \overline{v_B^2}. \tag{39}$$

Для однокомпонентного газа, когда все молекулы одинаковы $(\overline{v_A^2} = \overline{v_B^2})$, получим

$$\overline{v_{\text{от}}^2} = 2\,\bar{v}^2. \tag{40}$$

Принимая во внимание, что средние квадратичные скорости движения молекул пропорциональны средним арифметическим, найдем

$$\overline{v_{\text{от}}} = \sqrt{2}\,\bar{v}. \tag{41}$$

Подставляя в (34) соотношения (35), (36) и (41), после преобразований получим

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma\, n_0}. \tag{42}$$

ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Хаотическое движение молекул в газе ведет к их непрерывному перемешиванию. Вследствие этого при контакте разнородных газов происходит процесс их взаимного проникновения — диффузия. Хаотическое движение молекул обуславливает также механизмы внутреннего трения и теплопроводности в газах.

ДИФФУЗИЯ

Диффузией называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ друг в друга.

Диффузия в газах сопровождается установлением равновесного распределения концентраций компонент газов в их смеси. С кинетической точки зрения диффузия является результатом переноса массы i-й компоненты газа в смеси, обусловленного тепловым движением молекул.

Диффузия характеризуется плотностью потока вещества j, численно равного количеству диффундирующей компоненты вещества, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной направлению диффузии.

Из опыта известно, что величина диффузионного потока

какой-либо компоненты в одномерном случае определяется законом Фика

$$j = -D\frac{d\rho}{dx}, \tag{43}$$

где D — коэффициент диффузии (в системе СИ имеет размерность м²/с);

$\frac{d\rho}{dx}$ — градиент плотности компоненты.

Рассмотрим случай диффузии, когда молекулы газовых компонент имеют почти одинаковые массы и диаметры. Такой вид диффузии имеет место, например, при диффузии N_2 в CO и NO_2 в CO_2. Из равенства масс молекул следует равенство их средних скоростей, а условие равенства диаметров молекул компонент смеси предполагает независимость средних длин свободного пробега $\bar{\lambda}$ от концентрации компонент. Наиболее просто явление диффузии описывается, когда концентрация не зависит от времени и меняется только вдоль одной оси координат.

Определим для такого случая число молекул одного из двух газов, пролетающих через площадку ΔS (рис. 4), перпендикулярную оси x, вдоль которой происходит изменение концентрации газа. Выделим два слоя A и B по обе стороны от площадки ΔS, отстоящие от нее на расстоянии равном λ. В этих слоях концентрации рассматриваемого газа постоянны и равны соответственно n_0^A и n_0^B $(n_0^A < n_0^B)$.

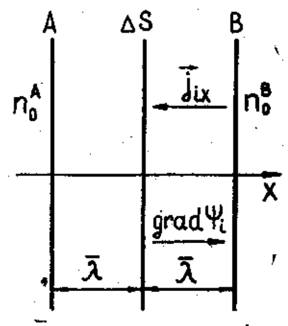

Рис. 4

Ввиду хаотичности движения молекул можно принять, что $\frac{1}{3}$ этих молекул двигается вдоль оси x, из них половина в положительном направлении, а половина — в отрицательном. Так как площадка ΔS отстоит от слоев A и B на расстоянии $\bar{\lambda}$, то все молекулы, летящие из выделенных слоев к площадке, долетят до нее без столкновений. С учетом этого, из слоя A через площадку ΔS в единицу времени пролетает число молекул n^A рассматриваемого газа, равное

$$n^A = \frac{1}{6} n_0^A\,\bar{v}\,\Delta S. \tag{44}$$

Аналогично для молекул, вылетающих из слоя B и пересекающих площадку ΔS можно записать

$$n^B = \frac{1}{6} n_0^B \bar{v} \Delta S. \tag{45}$$

Вычитая (45) из (44), получим разность между числом молекул, пролетающих через площадку ΔS из слоев A и B

$$\Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} \, (n_0^A - n_0^B) \, \Delta S. \tag{46}$$

Массу ΔM, переносимую через площадку ΔS за единицу времени в направлении положительного направления оси x, определяем выражением

$$\Delta M = m \Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} m \, (n_0^A - n_0^B) \, \Delta S. \tag{47}$$

Представим уравнение (47) в виде

$$\frac{\Delta M}{\Delta S} = \frac{1}{6} \, \bar{v} m \, 2 \bar{\lambda} \, \frac{n_0{}^A - n_0{}^B}{2 \bar{\lambda}}. \tag{48}$$

Ввиду малости расстояния $\bar{\lambda}$ можно записать

$$m \frac{n_0{}^A - n_0{}^B}{2 \bar{\lambda}} \approx - \frac{d \rho}{d x}. \tag{49}$$

Так как $\frac{\Delta M}{\Delta S} = j$, то с учетом (49) из (48) получим

$$j = - \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{d \rho}{d x}. \tag{50}$$

Сопоставив (43) и (50), найдем выражение для коэффициента диффузии

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v}. \tag{51}$$

Если молекулы газов, участвующих в процессе диффузии, имеют различные массы, то для коэффициента диффузии может быть получено соотношение

$$D = \frac{k T}{n_0 m_* \pi d_{12}^2 \sqrt{\bar{v}_1{}^2 + \bar{v}_2{}^2}}, \tag{52}$$

где T — температура газов;

$m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса молекул;

$d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$ — средний диаметр молекул;

m_1, m_2 и d_1, d_2 — масса и диаметры молекул соответственно первой и второй компонент;
$\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ — средняя скорость молекул первой и второй компонент.

ВЯЗКОСТЬ

Вязкость или внутреннее трение характеризует силу сопротивления перемещения одного слоя газа относительно другого.

Опытом установлено, что сила сопротивления, возникающая на границе двух смежных слоев газа при их относительном перемещении, определяется уравнением (закон Ньютона для сил вязкости трения):

$$F = \eta \frac{dU}{dn} \Delta S. \tag{53}$$

Здесь η — коэффициент вязкости (в системе СИ $[\eta] =$ = Н·с/м²); $\frac{dU}{dn}$ — производная, характеризующая быстроту изменения скорости упорядоченного движения в направлении нормали к поверхности, разделяющей слои; ΔS — площадь поверхности, разделяющей слои. С кинетической точки зрения возникновение вязкости объясняется процессом переноса импульса молекулами газа в направлении, перпендикулярном упорядоченному движению слоев.

Рассмотрим одномерное течение однокомпонентного газа в направлении x между двумя параллельными твердыми границами A и B, вызываемое движением поверхности B со скоростью U (рис. 5). При таком течении установится определенное распределение скоростей упорядоченного движения молекул в каждом слое газа в направлении оси x. Пусть расстояние между

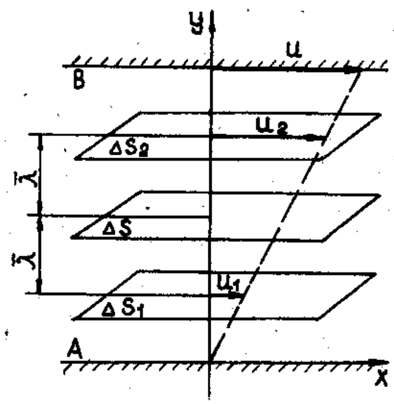

Рис. 5

поверхностями A и B значительно больше средней длины свободного пробега молекул $\bar{\lambda}$.

Определим перенос импульса через элементарную площадку ΔS, перпендикулярную оси y.

Выделим два элементарных слоя ΔS_1 и ΔS_2 по обе стороны от площадки ΔS, на расстояниях от нее, равных средней длине свободного пробега молекул. Тогда молекулы, летящие из слоев, достигнут площадки без столкновений. С учетом допущения, сделанного при рассмотрении диффузии, число молекул n_1, пролетающих через площадку ΔS из слоя ΔS_1 за время Δt будет равно:

$$n_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t. \tag{54}$$

Импульс, перенесенный молекулами, вылетающими из слоя ΔS_1 за время Δt через площадку ΔS, составит величину

$$K_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t\, m U_1, \tag{55}$$

так как среднее значение вектора скорости теплового движения молекул равно нулю.

Аналогично для импульса, переносимого молекулами из слоя ΔS_2 через площадку ΔS, можно найти:

$$K_2 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t\, m U_2, \tag{56}$$

где U_1 и U_2 — скорость упорядоченного движения в слоях ΔS_1 и ΔS_2 $(U_2 > U_1)$.

Вычитая (56) из (55), найдем импульс ΔK, переносимый через площадку ΔS:

$$\Delta K = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t\, (U_1 - U_2). \tag{57}$$

Уравнение (57) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{6} 2\bar{\lambda}\, n_0 m v \frac{(U_1 - U_2)}{2\bar{\lambda}} \Delta S. \tag{58}$$

Ввиду малости расстояния λ можно записать

$$\frac{U_1 - U_2}{2\bar{\lambda}} \approx - \frac{dU}{dx}. \tag{59}$$

Так как $n_0 m$ — плотность газа ρ, а $\frac{\Delta K}{\Delta t} = F$, то с учетом (59) можно из уравнения (58) получить

$$F = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \rho\, \bar{v} \frac{dU}{dx}. \tag{60}$$

Сопоставив (53) и (60), получим выражение для коэффициента вязкости газов

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda}\, \bar{v}. \tag{61}$$

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

С макроскопической точки зрения явление теплопроводности заключается в обмене энергией между различными частями тела, имеющими разные температуры. Опытным путем установлено, что тепловой поток в рассматриваемом направлении пропорционален и противоположно направлен градиенту температур (закон Фурье)

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}, \tag{62}$$

где q — количество тепла, протекающее в единицу времени в рассматриваемом направлении через единичную площадку, перпендикулярную этому направлению; $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры, скорость возрастания температуры в направлении теплового потока; χ — коэффициент теплопроводности (в системе СИ имеет размерность Дж/м·с·град).

С кинетической точки зрения явление теплопроводности объясняется переносом энергии молекулами вследствие их хаотического движения в неоднородном температурном поле.

Найдем коэффициент теплопроводности, основываясь на молекулярно-кинетических представлениях. Пусть температура газа меняется только в направлении x (рис. 6).

Выделим площадку ΔS, перпендикулярную оси x, и два параллельных слоя A и B, расположенных на расстояниях от площадки, равных средней длине свободного пробега молекул.

Из слоя A до площадки ΔS в соответствии с допущением, сделанным при рассмотрении диффузии, без столкновений за время Δt долетает число молекул, равное:

$$n_A = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t. \tag{63}$$

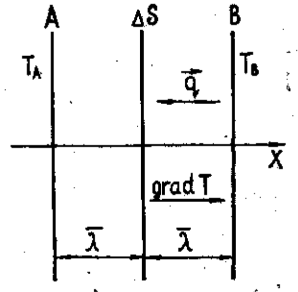

Рис. 6

Воспользовавшись (18), можно найти энергию, переносимую при этом через площадку ΔS:

$$E_A = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \frac{i}{2} k T_A, \tag{64}$$

где T_A — температура газа в слое A.

Аналогично молекулы, вылетающие из слоя B, переносят через площадку ΔS энергию, равную

$$E_B = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \frac{i}{2} k T_B, \tag{65}$$

где T_B — температура газа в слое B.

Вычитая (65) из (64), найдем количество тепла, переносимое через площадку ΔS:

$$\Delta E = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \frac{i}{2} k (T_A - T_B). \tag{66}$$

Уравнение (66) можно преобразовать к виду

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n_0 \frac{i}{2} k \bar{v}\, 2\bar{\lambda}\, \frac{T_A - T_B}{2\bar{\lambda}}. \tag{67}$$

Так как расстояние $\bar{\lambda}$ мало, то

$$\frac{T_A - T_B}{2\bar{\lambda}} \approx -\frac{dT}{dx}. \tag{68}$$

Произведение $n_0 \frac{i}{2} k$ можно преобразовать следующим образом

$$n_0 \frac{i}{2} k = \frac{n_0}{N_0} \frac{i}{2} R = n_0 m \frac{C_V}{\mu} = \rho c_V, \tag{69}$$

где C_V и c_V — соответственно, молярная и удельная теплоемкости газа.

С учетом того, что $\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = q$, а также соотношений (68) и (69), из (67) получим

$$q = -\frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} c_V \frac{dT}{dx}. \tag{70}$$

Сопоставив (70) и (62), получим выражение для коэффициента теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} c_V. \tag{71}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОСТОЯННОЙ МЕТОДОМ ОТКАЧКИ

Приборы и принадлежности: баллон измерительный, весы аналитические, набор разновесов, насос вакуумный, вакуумметр образцовый.

В данной работе для определения универсальной газовой постоянной R используется метод откачки. Для объема V измерительного баллона при температуре T, давлении P_i уравнение состояния имеет вид

$$P_i V = \frac{M_i}{\mu} R T_i, \tag{72}$$

где M_i — масса воздуха в баллоне;

$\mu = 28{,}96$ — средний молекулярный вес воздуха.

Если откачать измерительный баллон до давления P_{i+1}, то можно записать еще одно уравнение:

$$P_{i+1} V = \frac{M_{i+1}}{\mu} R T_{i+1}. \tag{73}$$

Приняв, что $T_i = T_{i+1} = T$ и, вычитая (73) из (72), получим

$$R = \frac{\mu (P_i - P_{i+1}) V}{(M_i - M_{i+1}) T}. \tag{74}$$

Уравнение (74) можно переписать в виде

$$R = \mu \frac{\Delta P_i}{T \Delta M_i} V, \tag{75}$$

где ΔP_i — изменение давления в измерительном баллоне;

ΔM_i — изменение массы воздуха в баллоне, соответствующее изменению давления ΔP_i.

В работе используется установка (рис. 7), имеющая измерительный баллон *1* с отсечным краном *2*, который резиновыми шлангами *3, 4* с помощью отсечных кранов *5* и *6* может подсоединяться к вакуумметру *7* и вакуумному насосу *8*. После откачки до заданного давления P_i измерительный баллон отсоединяется от гибкого шланга *3* и взвешивается на аналитических весах с точностью до 0,1 мг. При этом уравновешивание до единиц граммов производят разновесами из прилагаемого набора, сотые, десятые доли граммов наби-

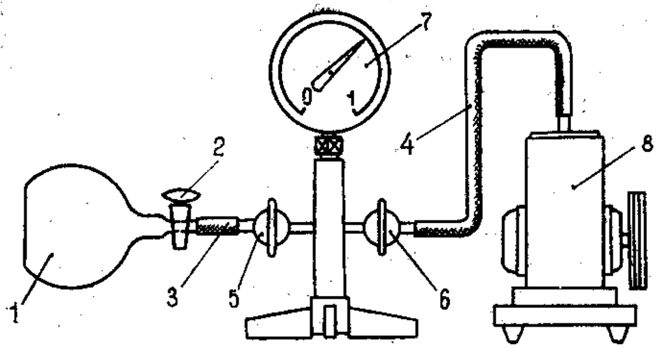

Рис. 7

рают рейтерами, встроенными в весы. Отсчет единиц и десятых долей миллиграммов производят по оптической шкале (рис. 8).

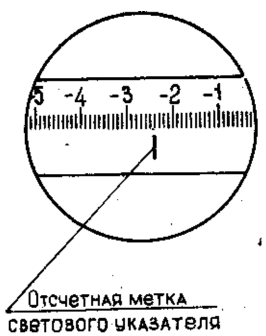

Рис. 8

Пример отсчета показаний на аналитических весах. Пусть в процессе уравновешивания баллона набрана масса уравновешивающих разновесов 195 г; масса рейтеров, встроенных в весы, 160 мг; метка светового указателя (см. рис. 8) остановилась на делении «—2,4 мг» отсчетной шкалы, что свидетельствует о том, что масса уравновешивающих разновесов и рейтеров перетяжелена на 2,4 мг.

Окончательный результат измерения массы баллона с воздухом, очевидно, равен

$$m = 195 + 0{,}160 - 0{,}0024 = 195{,}1576 \text{ г.}$$

Очевидно, что изменение массы воздуха в баллоне m определяется как разность между двумя подобными взвешиваниями, а изменение давления в баллоне будет равно:

$$\Delta P = P_i - P_{i+1}. \tag{76}$$

Порядок выполнения работы

Измерения проводятся для 5—6 различных значений давления в баллоне, уменьшающихся от атмосферного ($P = 1$) с шагом 0,05—0,10 кг/см².

1. Измерительный баллон *1* (см. рис. 7) осторожно соединить вакуумным шлангом *3* с системой откачки и открыть краны *5* и *6*, переводя их ручки в горизонтальное положение.
2. Включить вакуумный насос *8* и откачать воздух из баллона, контролируя давление по вакуумметру.
3. По достижении необходимой величины давления P_i перекрыть кран *6* и отключить насос. Через 3—5 минут произвести отсчет давления по вакуумметру.
4. Закрыть отсечный кран *2* и осторожно отсоединить измерительный баллон от системы откачки.
5. Произвести взвешивание баллона на аналитических весах.
6. Все полученные результаты занести в табл. 1. По формуле (77) вычислить величину R. Величина объема V указана на измерительном баллоне. Температуру T принять равной комнатной.

Таблица 1

n	P_i	m_i	$\Delta P_i = P_i - P_{i+1}$	$\Delta M_i = m_i - m_{i+1}$	R_i	ΔR_i	ΔR_i^2
1							
2							
3							
4							
5					$\bar{R} =$		$\sum_1^n (\Delta R_i)^2 =$

7. Вычислить среднее значение универсальной газовой постоянной $\bar{R} = \sum_1^n R_i$.
8. Определить абсолютные погрешности единичных результатов измерений $\Delta R_i = \bar{R} - R_i$ и их квадраты.

9. Вычислить среднеквадратичную погрешность измерений по формуле $S_R = \sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{n} (\Delta R_i)^2}{n(n-1)}}$.

10. Задаться доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$ и определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$.

11. Определить доверительный интервал измерения

$$\Delta R = t_{\alpha n} S_R.$$

12. Записать окончательный результат измерения универсальной газовой постоянной $R = \bar{R} \pm \Delta R$.

13. Определить относительную погрешность измерений

$$\varepsilon_R = \pm \frac{\Delta R}{R}.$$

Контрольные вопросы

1. Для какого газа справедливо уравнение Клапейрона-Менделеева?
2. В чем заключается метод определения универсальной газовой постоянной методом откачки?
3. Что такое идеальный газ?
4. Каково истолкование температуры и давления газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
5. Какие факторы влияют на точность определения универсальной газовой постоянной?
6. Какая размерность в системе СИ у давления и универсальной газовой постоянной?
7. Как связана универсальная газовая постоянная с теплоемкостью?
8. Как связана универсальная газовая постоянная с числом Авогадро и постоянной Больцмана?

Литература

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. М., «Наука», 1973, т. 1.
2. *Кикоин Н. К., Кикоин А. К.* Молекулярная физика. М., ГИФМЛ, 1963.
3. *Майсова Н. Н.* Практикум по курсу общей физики. М., «Высшая школа», 1970.

УПРАЖНЕНИЕ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ ВОЗДУХА

Приборы и принадлежности: водяной манометр, секундомер, весы, разновесы, барометр.

В данной работе для определения длины свободного пробега молекул воздуха используется метод капилляра.

Из формулы (61) для коэффициента вязкости газа можно найти

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}}. \qquad (77)$$

Плотность газа ρ и средняя скорость молекул, входящие в формулу (77), определяются, как известно, соотношениями:

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}, \qquad (78)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \qquad (79)$$

Вязкость газа η для круглых цилиндрических капилляров может быть найдена из формулы Пуазейля

$$V_c = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta p, \qquad (80)$$

где r и L — соответственно радиус и длина капилляра;
V_c — расход газа через капилляр в единицу времени;
Δp — разность давлений на концах капилляра.
Формула Пуазейля справедлива только для длинных капилляров, у которых

$$\frac{L}{r} \geqslant 400, \qquad (81)$$

и при условии ламинарности течения, т. е. при

$$\mathrm{Re} < 2300, \qquad (82)$$

где $\mathrm{Re} = \frac{V_c \cdot \rho}{\pi \eta r}$ — число Рейнольдса.

Из формулы Пуазейля можно найти

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8VL}, \qquad (83)$$

где V — объем газа, протекшего через капилляр за время τ.

Подставив (78), (79) и (83) в (77), получим соотношение, позволяющее из эксперимента определить среднюю длину свободного пробега молекул воздуха

$$\bar{\lambda}=\frac{3\pi\sqrt{\pi}\cdot r^4\sqrt{RT}\cdot\tau\cdot\Delta P}{8\sqrt{8}\;\sqrt{\mu}\;\;VLP}. \qquad (84)$$

Метод капилляра реализован в установке (рис. 9), в которой имеется вертикально установленный стеклянный баллон *1* с водой, имеющий в нижней части кран *2*. К верхней части баллона присоединен капилляр *3* и водяной манометр *4*.

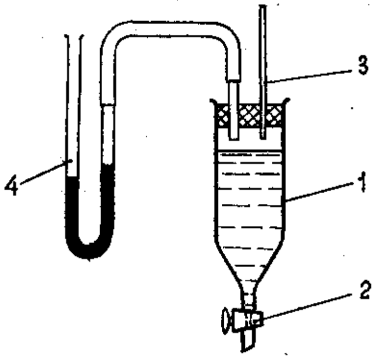

Рис. 9

При открытии крана *2* из баллона *1* начинает вытекать вода, а через капилляр *3* поступать в него воздух. Через некоторое время устанавливается равенство объемных расходов воды через кран и воздуха через капилляр. При этом перепад давлений на капилляре, измеряемый манометром *4* (см. рис. 9), становится постоянным, а вода вытекает из крана *2* не сплошной струей, а отдельными каплями.

Таким образом, установка позволяет определить объемный расход воздуха через капилляр, равный объемному расходу воды через кран и перепад давлений на капилляре. Измерив температуру, давление воздуха на входе в капилляр, длину и радиус капилляра, а также взяв из справочника средний молекулярный вес воздуха, по формуле (84) можно найти среднюю длину свободного пробега молекул воздуха.

Порядок выполнения работы

1. Измерить барометром давление воздуха.
2. Измерить термометром температуру воздуха.
3. По соотношениям (81) и (82) проверить применимость формулы (84) для используемой установки.
   Размеры капилляра указаны на установке. Вязкость и плотность воздуха взять из справочника [1].
4. Сделать заключение о пригодности установки для экспериментов с использованием формулы (84).

5. Взвесить на весах мерный стеклянный стакан, предварительно вытерев его досуха.
6. Подставить под кран *2* вспомогательный стакан. Открыть кран.
7. После того, как установится равенство объемных расходов воды и воздуха, убрать вспомогательный стакан и на его место поставить мерный стакан, одновременно включив секундомер.
8. Записать показания водяного манометра.
9. После наполнения мерного стакана закрыть кран *2* и выключить секундомер.
10. Взвесить мерный стакан с водой. Вычесть из полученного результата массу сухого стакана и найти массу m воды, вытекшей в мерный стакан. Определить объем вытекшей воды по формуле:
    $$V=\frac{m}{\rho},$$
    где ρ — плотность воды (взять из справочника [1]).
11. Повторить пункты 5—10 еще четыре раза.
12. Результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

№	V	τ	P	T	μ	$\bar{\lambda}$	$\bar{\lambda}_i$	$\Delta\bar{\lambda}_i$	$(\Delta\bar{\lambda}_i)^2$
1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
						$\bar{\lambda}_{ср}=$			$\Sigma(\Delta\lambda i)^2=$

13. По методике, изложенной в упр. 1, вычислить при доверительной вероятности 0,97 доверительный интервал.
14. Записать окончательный результат измерения средней длины свободного пробега молекул воздуха: $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_{ср}\pm\Delta\bar{\lambda}$.
15. Определить относительную погрешность измерений
    $$\varepsilon_{\bar{\lambda}}=\pm\frac{\Delta\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_{ср}}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое средняя длина свободного пробега молекул?
2. Как зависит средняя длина свободного пробега от температуры и давления?
3. Как зависит средняя длина свободного пробега от размеров молекул газа?
4. Когда устанавливается в установке для определения $\overline{\lambda}$ равенство объемных расходов втекающего в сосуд воздуха и вытекающей воды? Почему?
5. В каких условиях применимы расчетные формулы, используемые в настоящем упражнении?
6. Что называется эффективным сечением молекулы?
7. Получите формулу для определения числа столкновений молекулы в единицу времени.

Литература

1. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., «Наука», 1972.
2. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. *В. И. Ивероновой.* М., «Наука», 1967.

УПРАЖНЕНИЕ 3

ИЗМЕРЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ВОЗДУХА РОТАЦИОННЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ

Приборы и принадлежности: ротационный вискозиметр, электротахометр, вакуумный насос, вакуумметр, регулируемый источник питания электродвигателя.

Для определения вязкости воздуха используется ротационный вискозиметр с коаксиальными цилиндрами колоколообразной формы (рис. 10).

Обозначение на рис. 10: *1* — барокамера; *2* — зеркало-указатель; *3* — внутренний цилиндр; *4* — наружный цилиндр; *5* — корпус; *6* — растяжки; *7* — опора подшипниковая; *8* — муфта магнитная; *9* — электродвигатель; *10* — датчик оборотов.

При вращении цилиндра *4* на цилиндр *3* действует вращающий момент $M_{вр}$, зависящий от вязкости среды, в которой находятся цилиндры. Цилиндр *3* подвешен на растяжках *6*. Под действием $M_{вр}$ он поворачивается до тех пор, пока про-

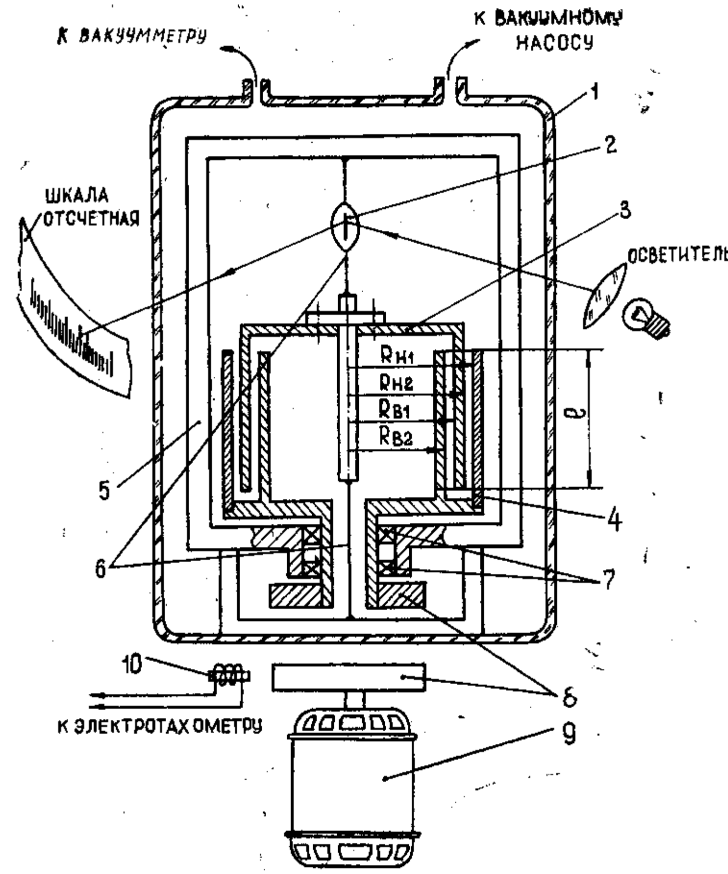

Рис. 10

тиводействующий момент, возникающий при скручивании растяжек, не уравновесит вращающий момент. Поэтому с учетом того, что противодействующий момент пропорционален углу поворота цилиндра *3*, можно записать

$$\alpha k = M^{н}_{вр} + M^{в}_{вр}\ , \tag{85}$$

где k — крутильная жесткость растяжек;

$M^{н}_{вр}$ и $M^{в}_{вр}$ — вращающие моменты соответственно на наружной и внутренней поверхности цилиндра *3*.

Обе составляющие вращающего момента определяются аналогично. Поэтому рассмотрим нахождение только момента $M_{вр}^{н}$.

По закону Ньютона на произвольном радиусе r действует сила

$$F = \eta \frac{r d\omega}{dr} 2\pi r l, \qquad (86)$$

где η — вязкость; $\frac{r d\omega}{dr}$ — градиент скорости в направлении радиуса; ω — угловая скорость; l — высота цилиндра.

Момент на радиусе r, создаваемый силой F, будет равен

$$M = 2\pi l \eta \frac{d\omega}{dr} r^3. \qquad (87)$$

Интегрируя (87), найдем

$$-\frac{M}{2r^2} = 2\pi l \eta\omega + c, \qquad (88)$$

где c — постоянная интегрирования.

Используя граничные условия (см. рис. 10)

$$r = R_{н1},\ \omega = \omega,$$

где ω — частота вращения цилиндра 4, и

$$r = R_{н2},\quad \omega = 0,$$

а также учитывая, что момент на любом радиусе уравновешивается постоянным внешним крутящим моментом, после преобразований получим

$$M_{вр}^{н} = 4\pi l \omega \frac{R_{н1}^2 \cdot R_{н2}^2}{R_{н2}^2 - R_{н1}^2}. \qquad (89)$$

Аналогично найдем

$$M_{вр}^{в} = 4\pi l \omega \frac{R_{в1}^2 \cdot R_{в}^2}{R_{в2}^2 - R_{в1}^2}. \qquad (90)$$

Подставляя уравнение (89) и (90) в (85), после преобразований будем иметь

$$\eta = \frac{\alpha}{\omega z}, \qquad (91)$$

где $z = \frac{4\pi l}{k}\left(\frac{R_{н1}^2 \cdot R_{н2}^2}{R_{н2}^2 - R_{н1}^2} + \frac{R_{в1}^2 \cdot R_{в2}^2}{R_{в2}^2 - R_{в1}^2}\right)$ — константа вискозиметра, определяемая геометрией прибора и материалом растяжек.

Соотношение (91) позволяет с помощью ротационного вискозиметра экспериментально определить коэффициент

вязкости, измерив частоту вращения цилиндра 4 и угол поворота цилиндра 3.

Необходимо при этом помнить, что вращающий момент создается не только на цилиндрических поверхностях колокола 3, но и на его торцах. Однако за счет уменьшения градиента скорости и площади можно сделать вращающий момент, приложенный к торцам пренебрежимо малым и, следовательно, пользоваться для расчета вязкости соотношением (91).

В конструкции используемого в работе вискозиметра (см. рис. 10) торцы имеют небольшие площади вследствие применения тонкостенных цилиндров 3 и 4 и небольшой градиент скорости из-за больших зазоров между торцами.

Основные узлы и детали вискозиметра смонтированы на раме 5, помещенной в барокамере 1, в которой вакуумным насосом может создаваться разрежение, измеряемое вакуумметром.

Цилиндр 4 может вращаться в подшипниках 7 через магнитную муфту регулируемым электродвигателем 9. Скорость вращения цилиндра измеряется электротахометром, имеющим индуктивный датчик.

Для измерения угла поворота цилиндра 3, подвешенного на растяжках 6, служит зеркало-указатель 2, осветитель и отсчетная шкала.

Описанный вискозиметр позволяет определить коэффициент вязкости воздуха при различных градиентах скорости, задаваемых частотой вращения двигателя, и при различных давлениях.

Порядок выполнения работы

1. Подключить установку к сети.
2. Включить электродвигатель и, регулируя частоту его оборотов, установить такую скорость вращения цилиндра 4, чтобы угол поворота цилиндра 3 соответствовал концу отсчетной шкалы.
3. После успокоения зеркала-указателя произвести отсчет угла его поворота и скорости вращения цилиндра 4. Полученные данные записать в табл. 3.
4. Произвести измерения еще для четырех уменьшающихся значений скорости вращения.
5. Включить вакуумный насос и откачать барокамеру. После установления показаний вакуумметра повторить п. 3 и 4.

Таблица 3

n	ω c^{-1}	α *град*	Давление в барокамере	z	η_i	$\Delta\eta_i$	$\Delta\eta_i^2$
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
					$\bar{\eta}=$		$\sum_1^n(\Delta\eta_i)^2$

6. По формуле (91) рассчитать коэффициент вязкости воздуха. Размеры колоколообразных цилиндров и крутильная жесткость растяжек указаны на установке. Результаты занести в табл. 3.
7. Сравнить значения коэффициента вязкости, полученного при различных градиентах скорости и давлениях воздуха. Сделать вывод.
8. Рассчитать погрешность определения η, считая, что основной является случайная составляющая (по методике, изложенной в упр. 1).

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл вязкости?
2. Как влияют на коэффициент вязкости газа температура, давление и градиент скорости?
3. Каково устройство ротационного вискозиметра?
4. Для чего цилиндры вискозиметра изготовлены тонкостенными?
5. Как определяется коэффициент вязкости в молекулярно-кинетической теории газов?
6. Как зависит вязкость газов от размеров молекул?
7. Назовите единицу вязкости в системе единиц СИ.
8. С помощью чего изменяется в установке градиент скорости?
9. Какие силы действуют на цилиндр вискозиметра, находящийся во вращающемся цилиндре?
10. Как определить константу z вискозиметра?

Литература

1. *Белкин И. М., Виноградов Г. В., Леонов А. И.* Ротационные приборы. М., «Машиностроение», 1968.

УПРАЖНЕНИЕ 4

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЗДУХА

Цель работы — исследование зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от температуры.

Для измерения теплопроводности воздуха используется метод нагретой нити. В этом методе исследуемый газ находится в цилиндрической трубке, по оси которой натянута проволока, служащая одновременно источником тепла и термометром сопротивления. Наружная поверхность трубки поддерживается при постоянной температуре, а через проволоку пропускается электрический ток. Если принять, что тепло идет от проволоки через газ только по радиусу, то изотермическими поверхностями в газе будут цилиндрические поверхности с общей осью — осью проволоки.

Плотность теплового потока через изотермическую поверхность радиуса r равна

$$q = \frac{W}{2\pi r L} = -\varkappa\frac{dT}{dr}, \qquad (92)$$

где $W = IU$ — тепловая мощность, выделяемая током на проволоке длиной L. Уравнение (92) можно записать, разделяя переменные, в виде

$$dT = -\frac{W}{2\pi\varkappa L}\,\frac{dr}{r} = -\frac{W}{2\pi\varkappa L}\,d(\ln r). \qquad (93)$$

Интегрируя (93), получим

$$T = -\frac{W}{2\pi\varkappa L}\ln r + c. \qquad (94)$$

Используя граничные условия

$$\text{при } r = r_1,\ T = T_1;$$
$$\text{при } r = r_2,\ T = T_2,$$

где T_1 и T_2 — температуры слоев газа, непосредственно прилегающих к поверхностям проволоки и трубки с соответствующими радиусами r_1 и r_2, найдем формулу для расчета коэффициента теплопроводности:

$$\varkappa = \frac{IU}{2\pi L(T_1 - T_2)}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (95)$$

Для определения χ необходимо измерить температуры T_1 и T_2 или равные им температуры поверхностей нити и трубки, а также мощность нагревателя $W = IU$ и геометрические размеры r_1, r_2, L.

При измерении теплопроводности воздуха с помощью установки, реализующей метод нагретой нити, имеется ряд источников систематических погрешностей. Рассмотрим важнейшие из них.

1. *Утечка тепла через концы проволоки.* Концы проволоки отдают тепло не только воздуху, но и местам крепления. В результате, по длине проволоки устанавливается распределение температур, показанное на рис. 11. Если взять проволоку достаточно большой длины, то, очевидно, потерями тепла в местах крепления можно будет пренебречь.

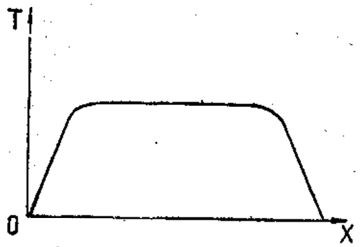

Рис. 11

2. *Конвективный перенос тепла.* Теплоотдача от проволоки может идти как за счет теплопроводности газа, определяемой тепловым движением молекул, так и за счет естественной конвекции, при которой тепло переносится движением макроскопических объемов, обусловленным разностью плотностей газа при различных температурах.

Конвекция может сильно исказить результаты измерений коэффициента теплопроводности. При малых значениях разности температур $T_1 - T_2$ конвекция практически отсутствует, но, начиная с некоторого перепада температур, ее роль в теплообмене резко возрастает [2]. Это приводит к завышенным значениям коэффициента теплопроводности, определяемым из эксперимента.

Если построить зависимость измеренных значений χ от разности температур $T_1 - T_2$, то, начиная с некоторого перепада температур $(T_1 - T_2)_{кр}$, наблюдается резкое возрастание коэффициента теплопроводности. До разности температур, не превышающей $(T_1 - T_2)_{кр}$, конвекцией можно пренебречь. При более высоких перепадах температур из-за наличия конвекции измерение коэффициента теплопроводности в данном приборе невозможно.

3. *Перенос тепла излучением.* Тепловое излучение проволоки является еще одним источником систематических ошибок. Их можно устранить введением поправок.

Тепловой поток, возникающий вследствие излучения, определяется формулой Стефана-Больцмана:

$$q = \varepsilon_{пр}\, \sigma_0\, (T_1^4 - T_2^4)\, F, \qquad (96)$$

в которой $\varepsilon_{пр}$ — степень черноты поверхности проволоки; σ_0 — постоянная Стефана-Больцмана; T_1 и T_2 — абсолютные температуры поверхности проволоки и трубки; F — площадь поверхности нити, определяемая из соотношения

$$F = 2\pi r_1 L. \qquad (97)$$

С учетом поправки (96) формула (95) принимает вид

$$\chi = \frac{IU - q}{2\pi L (T_1 - T_2)} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (98)$$

Описание установки

В состав установки входят устройство, реализующее метод нагретой нити, источник постоянного напряжения, амперметр и вольтметр.

Метод нагретой нити реализуется следующим образом (рис. 12). По оси стеклянной трубки *1* диаметром d_2, установленной вертикально, расположена металлическая проволока

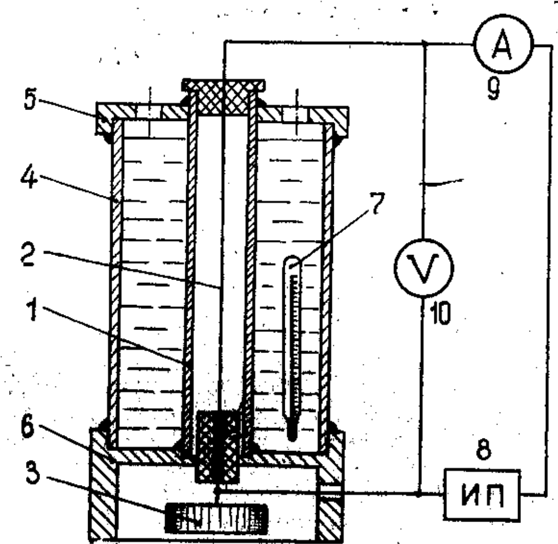

Рис. 12

2 диаметром d_1, натягиваемая грузом *3*. Внешняя стеклянная трубка *4* образует с трубкой *1* и фланцами *5* и *6* кожух для термостатирующей жидкости — воды.

Как показывают расчеты, без существенной погрешности можно принять, что температура внутренней поверхности трубки *1*, т. е. температура T_2, равна температуре воды в кожухе.

Вследствие большой теплоемкости и значительного объема воды изменение ее температуры в течение опыта незначительно.

Температура T_2 измеряется термометром *7*, расположенным в кожухе.

Проволока присоединена к источнику постоянного напряжения *8*, имеющему ступенчатую регулировку напряжения в диапазоне 0—2 В. Последовательно с проволокой включен амперметр *9*. Вольтметр *10* измеряет падение напряжения на проволоке.

Температура нити T_1 определяется косвенным путем по графику зависимости сопротивления проволоки от температуры:

$$\frac{R}{R_0} = f(T_1), \qquad (99)$$

где R — сопротивление рабочего участка проволоки при температуре T_1; R_0 — сопротивление рабочего участка при 0°C.

Сопротивление проволоки при температуре T_1 определяют по закону Ома

$$R = \frac{U}{I}. \qquad (100)$$

График зависимости $\frac{R}{R_0} = f(T_1)$, а также значения R_0, d_1, d_2, L и $\varepsilon_{пр}$ указаны на панели установки.

Порядок выполнения работы

1. Включить в сеть 220 В источник постоянного напряжения.
2. Переключатель источника напряжения поставить на минимальное напряжение и убедиться в наличии тока в цепи.
3. Измерить и записать температуру T_2.
4. Переключая регулятор напряжения последовательно на одно деление, записать на каждом из них показания вольтметра и амперметра. При этом вследствие тепловой инерции переход от одного установившегося теплового состояния к другому происходит через определенный интервал времени, увеличивающийся с ростом тока в цепи. О достижении стационарного состояния можно судить по установлению показаний амперметра и вольтметра. В табл. 4 записывают установившиеся показания приборов.

Таблица 4

n	I, дел	Цена дел, $\frac{А}{дел}$	I, А	U, дел	Цена дел, $\frac{В}{дел}$	U, В	T_2, °C	R, Ом	T_1, °C	T_1-T_2, °C	$\frac{T_1+T_2}{2}$, °C	$\varkappa$, $\frac{Вт}{м{\cdot}град}$
1												
2												
3												
4												
5												

5. Для каждого измерения вычислить сопротивление рабочего участка проволоки по формуле (100).
6. Найти по графику $\frac{R}{R_0} = f(T_1)$ температуру T_1.
7. По формуле (95) вычислить коэффициент теплопроводности воздуха.
8. Построить зависимость $\chi = f(T_1-T_2)$.
   Найти по графику $(T_1-T_2)_{кр}$ и соответствующее значение $\varkappa_{кр}$.
9. Рассчитать коэффициент теплопроводности с учетом теплового излучения по формуле (98) для $(T_1-T_2)_{кр}$. Сравнить со значением, полученным по формуле (95). Оценить значимость поправки на излучение.
10. Построить зависимость $\varkappa = f(T)$, принимая за температуру газа, к которой относится экспериментальный результат, среднюю температуру.
11. Рассчитать погрешность для 2—3 отдельных результатов измерений (по указанию преподавателя).

Формулу (95) можно представить в виде

$$\varkappa = k\frac{I\cdot U}{(T_1-T_2)},$$

где $k = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi L}$ — константа прибора, известная с высокой точностью.

Тогда относительную погрешность ε_χ определения $\varkappa$ можно рассчитать по формуле:

$$\varepsilon_\chi = \sqrt{\varepsilon_I^2 + \varepsilon_U^2 + \varepsilon_{T_1-T_2}^2}$$

Относительные погрешности измерения тока ε_i и напряжения ε_U находятся из соотношений

$$\varepsilon_I = \frac{\varepsilon_A \cdot I_A^{\max}}{I},$$

$$\varepsilon_U = \frac{\varepsilon_B \cdot U_B^{\max}}{U},$$

где ε_A и ε_B — класс точности, соответственно, амперметра и вольтметра; $I_A^{\max}$ и $U_B^{\max}$ — максимальные значения шкалы амперметра и вольтметра. Относительная погрешность $\varepsilon_{(T_1-T_2)}$ измерения разности температур (T_1-T_2) рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon_{(T_1-T_2)} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{T_1 - T_2},$$

где ΔT_2 — половина наименьшего деления шкалы термометра, а

$$\Delta T_1 = T_1\sqrt{\varepsilon^2_U + \varepsilon^2_I}.$$

Контрольные вопросы

1. Как зависит коэффициент теплопроводности от давления и температуры газа?
2. Каковы основные особенности переноса тепла в газах за счет теплопроводности?
3. Каков физический смысл коэффициента теплопроводности?
4. Как определяется в работе температура проволоки?
5. Назовите основные источники систематических погрешностей при определении коэффицента теплопроводности газа методом нагретой нити.
6. Как уменьшить влияние теплоотдачи от проволоки в местах крепления?
7. Как зависит коэффициент теплопроводности от массы молекул газа?
8. Как определить границу применимости метода нагретой нити для определения коэффициента теплопроводности газа?
9. Какие методы могут использоваться для определения температуры нити, кроме применяемого в работе?
10. Почему нить в установке располагается вертикально?

Литература

1. *Кикоин И. К., Кикоин А. К.* Молекулярная физика. М., «Наука», 1976.
2. Основы физического эксперимента. ЛПИ, 1977.
3. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975.

Составители: *Борис Павлович Дьяченко, Александр Иванович Косенко*

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Лабораторная работа

Редактор И. М. Чулкова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор С. С. Рубан

Сдано в набор 2.10.78 г. Подписано в печать 10.11.78 г.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага оберточная белая.
Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. п. л. 2,25.
Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 1500 экз. Заказ № 872. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.