МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники

Электронный лабораторный практикум

С А М А Р А

2010

УДК 629.7.017.1 (075)

Составители: **Куренков Владимир Иванович,**
Волоцуев Владимир Валерьевич

Изложены указания по проведению лабораторных работ по дисциплине «Надежность изделий и систем ракетно-космической техники», а также некоторые теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения работ.

Лабораторный предназначен для студентов специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем».

Разработан на кафедре летательных аппаратов СГАУ. Он может быть полезен молодым специалистам ракетно-космической отрасли.

Ил. 26. Табл. 27. Библиогр.: 13 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким внедрением расчета надежности в практику проектирования изделий и систем ракетно-космической техники магистрант должен иметь представление об основных положениях теории надежности, о методах расчета надежности отдельных элементов и систем, а также уметь оценивать надежность элемента или системы по экспериментальным данным.

Лабораторный предназначен для студентов специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем».

Цель настоящих методических указаний — оказать помощь обучающимся в приобретении практических навыков обработки результатов наблюдений и методах расчета, касающихся надежности изделий и систем ракетно-космической техники.

Практикум включает шесть лабораторных работ по различным темам с индивидуальными заданиями и контрольными вопросами.

В первой лабораторной работе изложены методы построения функций распределения и плотности распределения случайных величин, а также методы оценки надёжности изделий РКТ по экспериментальным данным.

Во второй лабораторной работе изложены методы оценки надёжности элементов РКТ при нормальном законе распределения случайных величин.

В третьей лабораторной работе изложена сущность методов определения доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии по выборкам случайных величин.

В четвёртой лабораторной работе изложена суть методов проверки статических гипотез, рассмотрены методы проверки гипотез при оценке резко выделяющихся членов выборки, проверки нормального вида закона распределения, проверки гипотез о равенстве двух средних и о равенстве двух дисперсий из нормально распределенных генеральных совокупностей.

В пятой лабораторной работе дано краткое описание электромеханического толкателя. Изложены некоторые сведения из теории надежности систем, касающиеся метода структурных схем и, в частности, методов расчета надежности пи последовательном и параллельном соединении элементов.

В шестой лабораторной работе изложена сущность метода оценки надежности систем безударного разделения элементов РКТ. Приведено решение задачи одной конкретной системы разделения аналитическим методом. Показано, что для сложных задач такого класса универсальным является метод статистических испытаний. Изложена сущность метода статистических испытаний на конкретном примере. Рассмотрены вопросы моделирования случайных величин на ЭВМ.

Во всех лабораторных работах приведены:

- примеры, облегчающие усвоение материала;

- задания для выполнения индивидуальных работ;

-практические рекомендации и указания по выполнению заданий;

- контрольные вопросы, необходимые для закрепления полученных навыков.

Отчет о выполнении задания по каждой лабораторной работе оформляется с указанием названия работы, фамилии студента, номера учебной группы и номера варианта задания. Отчет должен содержать решение задач с пояснениями и необходимым графическим материалом. Студенты отвечают на вопросы, задаваемые преподавателем при зачёте работы. Отметка о выполнении задания ставится в табель учета при наличии отчета, правильности решения задач и ответов на дополнительные вопросы.

При пропуске занятий по уважительной причине студент должен самостоятельно проработать данные методические указания, решить задачи и отчитаться преподавателю до начала следующего занятия.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

1 ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ НАДЁЖНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Цель занятия: уяснение физического смысла условий надёжной работы элемента или системы ракетно-космической техники, повторение понятий случайных величин, используемых для оценки надежности, законов их распределения и числовых характеристик, закрепление навыков студентов в построении функции надежности по экспериментальным данным.

С этой целью студент должен:

знать физический смысл условий надежной работы элемента или системы;

знать определение статистической функции распределения случайной величины, плотности функции распределения и их физический смысл;

уметь построить функцию распределения случайной величины по экспериментальным данным;

знать определение функции надежности и уметь построить ее по функции распределения или по функции плотности распределения случайной величины;

уметь рассчитывать простейшие числовые моменты случайных величин (математическое ожидание и дисперсию) и знать их физический смысл;

уметь разбираться, в каких случаях функция надежности совпадает по форме с функцией распределения, а в каких противоположна ей.

1.1 Некоторые сведения из математической статистики

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее какое именно.

Случайная величина наиболее полно характеризуется законом распределения (функцией распределения) или плотностью распределения.

Чтобы лучше уяснить эти понятия, сначала рассмотрим конкретный пример, а потом уже дадим определения.

Пример 1. Испытывались 8 пружин независимо друг от друга при одинаковых параметрах нагрузки. При достижении наработки определенного количества циклов они ломались. Данные об отказах этих пружин приведены в табл. 1.1. Наработка пружины до отказа (поломки) и есть случайная величина.

Таблица 1.1 - Данные об отказах пружин

Порядковый номер пружины	1	2	3	4	5	6	7	8
Наработка до отказа, тыс. циклов	300	325	245	320	400	265	190	370

Построим так называемый вариационный ряд. Вариационным рядом называется последовательность наблюдаемых значений исследуемой величины, расположенных в возрастающем порядке. Вариационный ряд представлен в табл. 2. В этой же таблице будут представлены и другие необходимые для уяснения материала величины.

Теперь дадим определение функции распределения случайной величины.

Пусть проведено N опытов (наблюдений) случайной величины X и записаны ее конкретные значения в возрастающем порядке (то есть, построен вариационный ряд):

$$X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_N .$$

где i — порядковый номер опыта из вариационного ряда.

Статистической функцией распределения $F(x)$ называют функцию, определяемую равенством

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < X_1 \\ \dfrac{i}{N} & \text{при } X_1 \leqslant x \leqslant X_N \\ 1 & \text{при } x > X_N , \end{cases} \qquad (1)$$

В табл. 1.2 приведены результаты расчета такой функции для примера с пружинами.

Таблица 1.2 - Данные обработки случайных величин

Порядковый номер отказа	Вариационый ряд, t	F(t)=i/N	/(0	R(t)
1	190	0,125	0,00227	0,875
2	245	0,250	0,00625	0,750
3	265	0,375	0,00358	0,625
4	300	0,500	0,00625	0,500
5	320	0,625	0,00500	0,375
6	325	0,750	0,00278	0,250
7	370	0,875	0,00416	0,125
8	400	1,000	—	0

Функция $P(x)$ — ступенчатая, примерный ее вид в общем случае показан на рис 1.1, а для примера с пружинами на рис. 1.2 приведен график конкретной функции распределения. Функция $F(x)$ показывает вероятность того, что случайная величина X (в следующих ожидаемых опытах) будет меньше, чем наперед заданное конкретное значение x, что записывается следующим образом

$$F(x) = P(X < x) ,$$

где Р — символ вероятности.

Например, в случае с пружинами вероятность того, что следующая пружина сломается при количестве циклов менее чем 245 тысяч — равна

0,25, а что следующая пружина сломается при количестве циклов менее чем 370 тысяч — 0,875. Забегая вперед, отметим, что вероятность поломки пружины при каком-то определенном значении циклов равна нулю.

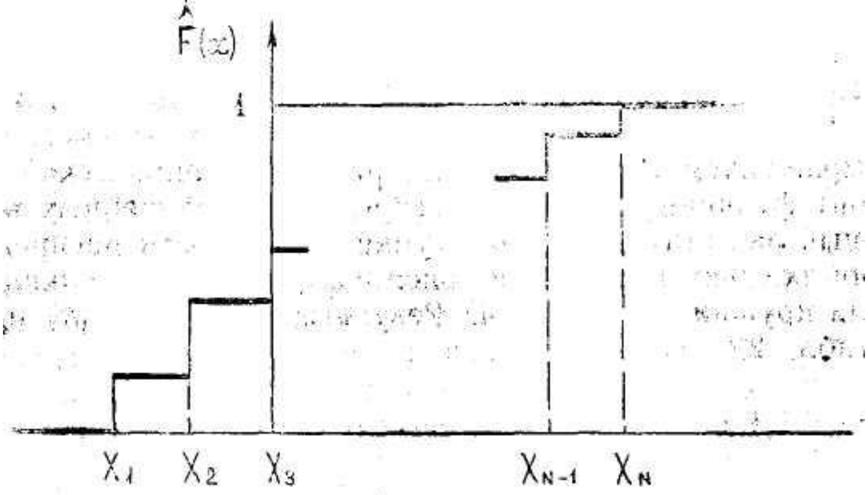
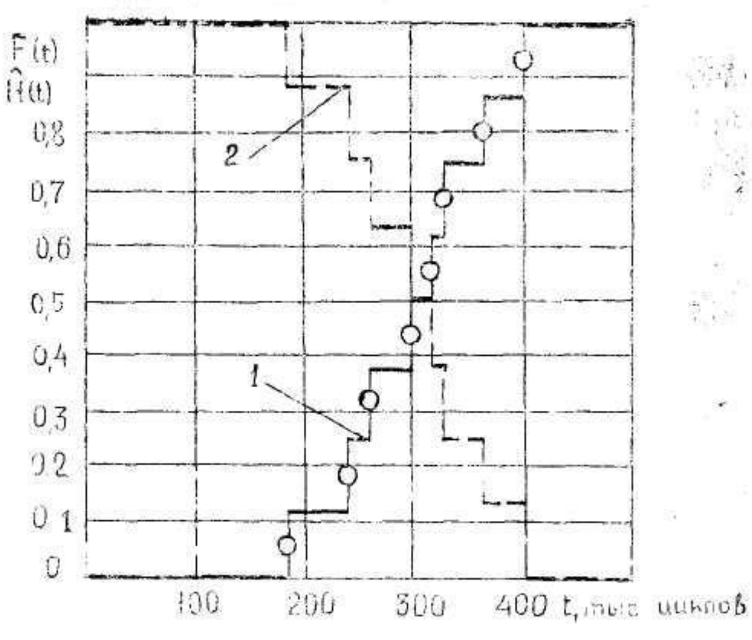


Рисунок 1.1 – Примерный вид статистической функции распределения

При увеличении количества экспериментальных точек ступеньки на графике статистической функции распределения будут мельче, и в пределе этот график стремится к непрерывной линии, то есть к непрерывной функции распределения F (x).



1 – функция F(t); 2 – функция H(t)

Рисунок 1.2 – График распределения случайной величины наработки до отказа пружины

Для уменьшения величины смещения *F(x)* при малых значениях *N* применяют обычно следующую формулу для расчета статистической функции распределения

$$F(x) = \frac{i - 0.5}{N} . \qquad (2)$$

которая также употребляется для проведения плавной (нeступенчатой) приближенной непрерывной функции распределения при небольшом *N*. Для примера с пружинами значения функции *F(x)*, рассчитанные по формуле (2), изображены на графике рис. 2 кружочками.

Кроме функции распределения часто используют функцию плотности распределения случайных величин, определяемую как производная от функции распределения. В конечных величинах плотность распределения запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{\Delta F_i(x)}{\Delta x_i} = \frac{F_{i+1}(x) - F_i(x)}{X_{i+1} - X_i} . \qquad (3)$$

Или, учитывая выражение (1), приведём формулу (3) к виду

$$P_{x1,x_N} = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N \Delta x_i} \cdot \Delta x_i = 1 .$$

Этим выражением пользуются для расчета эмпирической (статистической) функции плотности распределения случайных величин. Примерный вид статистической функции плотности распределения случайной величины показан на рис. 1.3, а конкретная функция плотности для пружин — на рис. 1.4. Результаты расчета *f(x)* приведены в табл. 2.

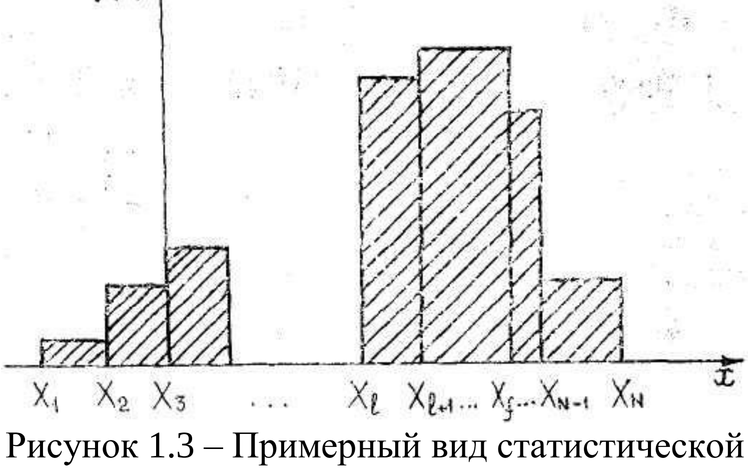


Рисунок 1.3 – Примерный вид статистической функции плотности распределения

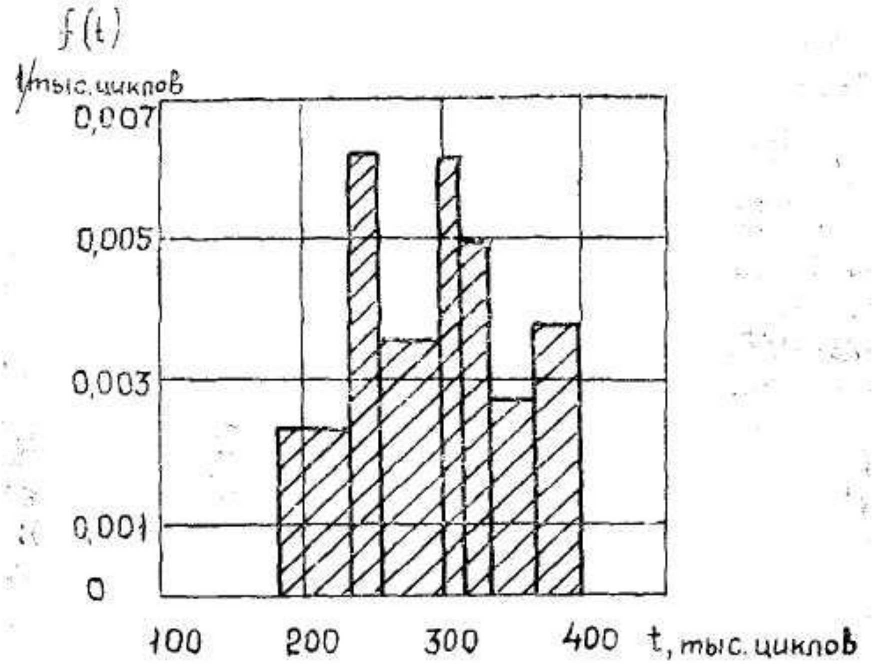


Рисунок 1.4 - График плотности вероятности отказа пружин

Площадь фигуры, ограниченная диапазоном аргумента [X_i, X_j] и графиком функции $f(x)$ (см. рис. 3), равна вероятности P_{ij} появления случайной величины X в этом диапазоне. Площадь под всем графиком $f(x)$ равна единице, то есть вероятности появления случайной величины X в диапазоне [X_1 X_N]. Действительно,

$$P_{x1,x_N} = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N \Delta x_i} \cdot \Delta x_i = 1 .$$

Менее полными характеристиками случайных величин являются числовые характеристики (моменты). Наиболее важные из них — математическое ожидание m_x и дисперсия D_x^2. Математическое ожидание и дисперсия выборки (оценки математического ожидания и дисперсии) определяются по следующим зависимостям:

$$\hat{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad ;$$

$$\hat{D}_x{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - m_x)^2}{N-1}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, а дисперсия — рассеяние результатов относительно этого среднего. Наряду с дисперсией часто пользуются средним квадратическим отклонением Dx, которое связано с дисперсией следующим соотношением

$D_x = \sqrt{D_x^2}$.

В примере с пружинами математическое ожидание поломки (в тыс. циклов) получилось

$$\hat{m}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N} = \frac{190+245+265+ \dots +400}{8} = 302 ,$$

а дисперсия

$$D_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (t_i - \hat{m}_t)^2}{N-1} = \frac{(190-302)^2+(245-302)^2+\dots+(400-302)^2}{8-1} = 4500 .$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$D_t = \sqrt{4500} \approx 67 \text{ тыс. циклов.}$$

Изложенные выше методы построения и расчета эмпирических функций *F(x), f(x)* и числовых характеристик m_x и D_x^2 случайной величины применимы при относительно небольшом количестве экпериментальных точек *N*. При большом количестве *N* вычисления становятся громоздкими, а графические построения мелкими. Поэтому идут по другому пути. Весь диапазон аргумента *x* случайной величины X разбивают на *k* интервалов (обычно равных) точками $x_1,..x_{k+1}$, подсчитывают число наблюдений m_i,-, приходящихся на интервал $[x_1,..x_{k+1}]$, и определяют частоту h_t

$$h_i = \frac{m_i}{N},$$

где *N* — общее количество наблюдений (эспериментальных точек).

Статистическая функция распределения в этом случае определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1; \\ \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{s} m_i}{N} & \text{при } x_1 < x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{при } x > x_{k+1}; \end{cases} \quad (5)$$

где *s* — номер интервала, для которого подсчитывается значение *P(x)*;

i — текущий номер интервала.

Другими словами, функция распределения численно равна отношению количества отказавших элементов нарастающим итогом к общему числу экспериментальных точек *N*, то есть

F(x)=n/N, (6)

где *n* — количество образцов, отказавших для рассматриваемого аргумента.

Функцию плотности распределения случайной величины, как и ранее, найдем следующим образом

$$\hat{f}(x) = \frac{\Delta \hat{F}(x)}{\Delta x} = \frac{\hat{F}_{s+1}(x) - \hat{F}_s(x)}{x_{s+1} - x_s} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{S+1} m_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{S} m_i}{N}}{\Delta x_s} = \frac{m_s}{\Delta x_s \cdot N}, \quad (7)$$

то есть плотность распределения в каждом интервале подсчитывается как частота h_s, отнесенная к величине интервала Δx_s.

Вид функций *P(x)* и *f(x)* такой же, как и на рис. 1 и 3, только вместо конкретных реализаций случайных величин $X_1,...,X_N$ должны стоять границы интервалов разбиения $x_1, x_2,...,x_{k+1}$.

Площадь прямоугольника высотой $f_s(x)$ и основанием Δx_s равна вероятности попадания случайной величины *X* в интервал Δx_s.

Можно показать, что вся площадь под графиком *f(x)* равна единице.

Иногда экспериментальные данные представляют в виде гистограммы, которая по форме похожа на статистическую функцию плотности распределения, но по оси ординат откладывают либо частоту h_i, либо число наблюдений m_i.

Математическое ожидание и дисперсия в случае интервального представления экспериментальных данных определяются по следующим зависимостям:

$$\left.\begin{aligned}\hat{m}_x &= \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i h_i;\\ D_x^2 &= \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \hat{m}_x)^2 \cdot h_i,\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где x_i — среднее значение i-го интервала.

Пример 2. Здесь рассмотрены вычисления в случае выборки большого объема. В табл. 1.3 приведены данные об отказах ведущих валов на 46 агрегатах, подвергшихся испытаниям. В данном конкретном испытании отказ регистрировался, когда ведущий вал изнашивался настолько, что появлялся избыточный шум. В этом примере данные сгруппированы по интервалам шириной 20 тыс. км каждый.

Таблица 1.3 - Данные об отказах ведущих валов

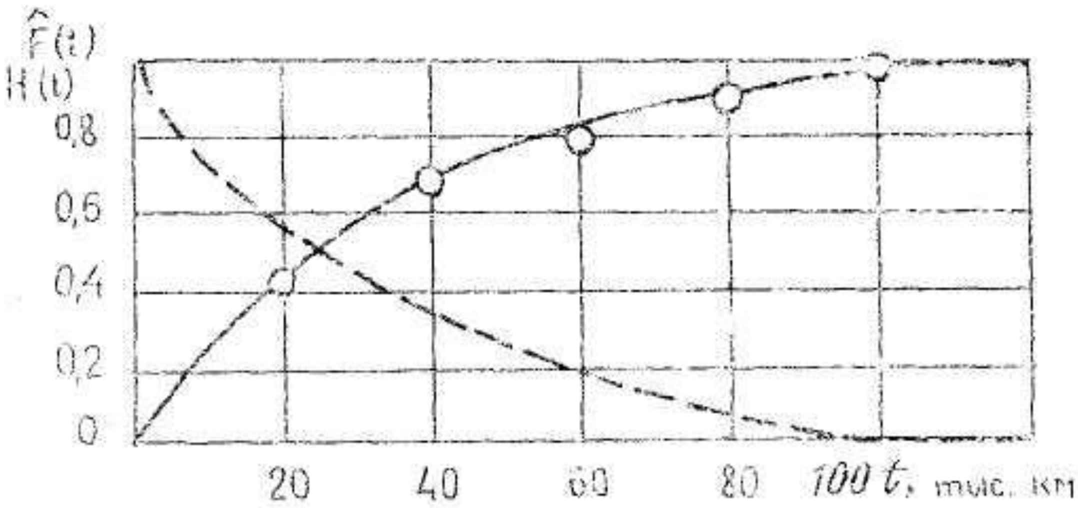
Пробег, тыс. км	Число отказов
0 < t < 20	19
20 < t < 40	11
40 < t < 60	7
60 < t < 80	5
80 < t < 100	4
100 < t	0

Результаты расчета по формулам (5), (6) и (7) представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4 - Обработка результатов эксперимента

Пробег /, км	Число отказов	$F(t)$	$f(t))$	$H(t)$
20000	19	0,413	$0{,}207\text{-}\ 10^{-4}$	0,587
40000	11	0,652	$0{,}120\text{-}\ 10^{-4}$	0,348
60000	7	0,804	$0{,}076\text{-}\ 10^{-4}$	0,196
80000	5	0,913	$0{,}055\text{-}10^{-4}$	0,087
100000	4	1,000	$0{,}044\text{-}10^{-4}$	0

График функции F(t) представлен на рис. 1.5, а функции *f(t)* — на рис. 1.6.



1 — функция *F(t)*, 2 — функция *H(t)*

Рисунок 1.5 - График функции распределения к примеру 2

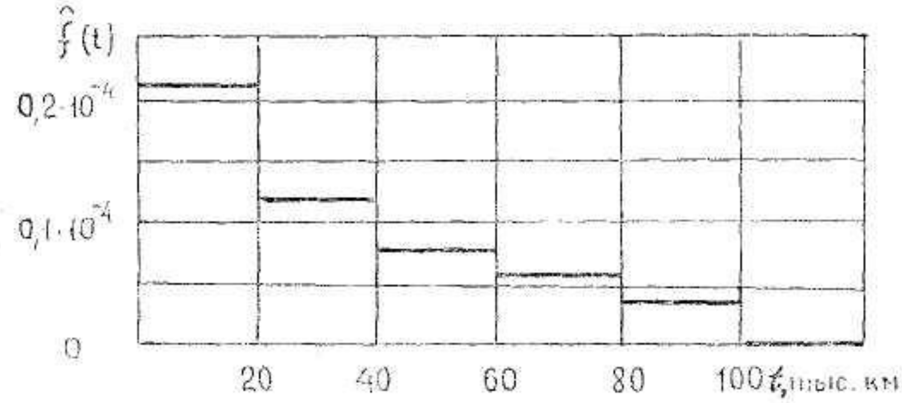


Рисунок 1.6 - График плотности распределения наработки до отказа

Числовые характеристики по формулам (8) с учетом зависимости из выражения (4) получились следующими:

$$\hat{m}_t = \frac{10\cdot19}{46} + \frac{30\cdot11}{46} + \frac{50\cdot7}{46} + \frac{70\cdot5}{46} + \frac{90\cdot4}{46} = 34{,}34 \text{ тыс. км},$$

$$D_t^2 = (10-34{,}34)^2\frac{19}{46} + (30-34{,}34)^2\frac{11}{46} +$$

$$+ (50-34{,}34)^2\cdot\frac{7}{46} + \ldots = 740{,}1\,.$$

Среднее квадратичное отклонение наработки валов до отказа $D_t = \sqrt{740{,}1}$=27,2 тыс. км.

1.2 Определение функции надёжности

Поскольку в данной работе мы имеем дело со случайными величинами, то будем использовать метод расчета надежности как вероятностной прочности. Показателем надежности в этом методе является вероятность превышения несущей способности конструкции (элемента и т. п.) R над действующими нагрузками N, т. е.

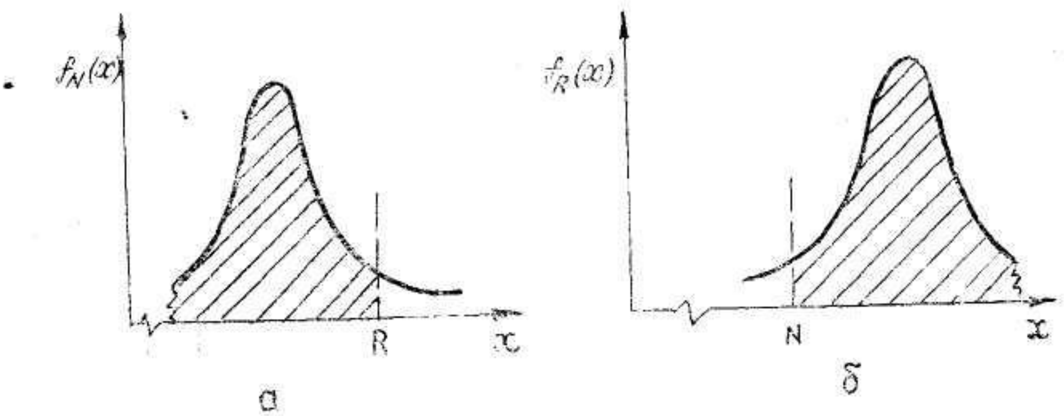
$$H = P(R > N), \tag{9}$$

где P— символ вероятности.

Напомним, что понятия прочности и нагрузки используются в этом методе в обобщенном смысле. Под прочностью понимается любая случайная величина, которая характеризует предельные возможности работы элемента (несущую способность), превышение которой означает отказ элемента, а под нагрузкой — любая случайная величина, воздействующая на элемент от внешних источников.

Если одна из сравниваемых величин (R или N) является детерминированной (неслучайной), то расчет показателя надежности по формуле (9) упрощается.

Действительно, пусть R — детерминированная величина, а N — случайная. Этот вариант изображен на рис. 1.7,а.



$f_N(x)$ и $f_R(x)$ — функции плотности распределения случайных величин N и R соответственно

Рис. 1.7. К вопросу определения надежности

Тогда вероятность безотказной работы элемента численно равна площади под кривой плотности распределения нагрузки $f_N(x)$ слева от точки с координатой *R* на оси абсцисс (на рисунке эта площадь заштрихована), т. е.

$$H = \int_0^R f_N(x)\,dx .$$

Если величина *R* — случайная, а *N*— детерминированная, как показано на рис. 7, 6, получим

$$H = \int_N^\infty f_R(x)\,dx .$$

Анализируя выражения (10) и (11), приходим к выводу, что в первом случае надежность соответствует функции распределения случайной величины *N*, т. е.

$$H = \int_0^R \cdot f_N(x)\,dx = F_N(x),$$

а во втором случае надежность противоположна функции распределения случайной величины R, т. е.

$$H = \int_N^\infty f_R(x)\,dx = 1 - \int_0^N f_R(x)\,dx = 1 - F_R(x). \qquad (13)$$

Таким образом, для определения надежности элемента, когда одна из сравниваемых величин является случайной, необходимо рассчитать функцию распределения этой случайной величины, а затем, проанализировав области надежной работы элементов (см. рис. 1.7*а* пли 1.7*б*), воспользоваться формулами (12) или (13).

Этот метод используется и для построения статистической функции надежности. В этом случае функции распределения FN(x) и FR (x) тоже статистические.

Построим статистические функции надежности для рассмотренных выше примеров. Пусть конструктор назначает время работы пружины (для примера 1) или вала (для примера 2), работающих в составе какого-то агрегата. Это время обозначим t_p. Тогда, анализируя графики плотностей функции распределения (см.рис.4, 6), приходим к выводу, что вероятность безотказной работы (надежность) численно равна площади под графиком плотности справа от точки с координатой t_p, т. е. область надежной работы приходится справа от точки t_P. Или другими словами: элемент (пружина, вал) будет надежно работать, если его наработка до отказа (случайная величина) будет больше назначенного ресурса. Поэтому в данных примерах функция надежности противоположна функции распределения случайной величины, и для расчета надежности мы должны пользоваться зависимостью (13). Рассчитанные значения надежности по формуле (13) для наших примеров приведены в табл. 2 и 4, а графики функций $F(t)$ приведены соответственно на рис. 2 и 5 пунктирными линиями.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. В случае, когда надежность соответствует функции распределения, она является возрастающей с увеличением аргумента. На первый взгляд может показаться, что имеется логическое несоответствие с функцией надежности, определяемой как качество, развернутое во времени. Эта функция всегда является убывающей. На самом деле, в методе определения надежности как вероятностной прочности функция надежности возрастает не с течением времени, а со сдвигом прочности в сторону возрастания, другими словами, надёжность увеличивается при увеличении прочностных свойств элемента (и при неизменных характеристиках нагрузки), даже если в качестве прочности (в обобщенном смысле) рассматривается время.

1.3 Задания

Во всех ниже приведенных задачах требуется вычислить математическое ожидание, дисперсию, построить эмпирические функции распределения и функцию плотности распределения случайной величины, построить функцию надежности по конкретному аргументу, представленному в условиях задачи. Кроме того, необходимо выполнить задания, представленные непосредственно в задачах.

1. Приведены испытания на разрыв 20 образцов из дюралюминиевого прессованного профиля. Значения предела прочности получились следующими: 472, 445, 436, 446,458,462,447,451,448,456, . 434, 445, 453, 468, 443, 477, 458, 462, 452, 447 МПа. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности конструкции, выполненной из этого материала, если действующая нагрузка постоянная и вызывает в конструкции напряжения: а) 400, б) 434, в) 445 МПа.

2. Проведены испытания по определению скорости роста усталостных трещин в материале АМг6 при постоянном значении нагрузочного параметра — коэффициента интенсивности напряжений. Результаты замера 8 образцов следующие: $6{\cdot}10^{-5}$; $9{,}2{\cdot}10^{-5}$; $7{\cdot}10^{-5}$; $7{,}5{\cdot}10^{-5}$; $5{\cdot}10^{-5}$; $9{\cdot}10^{-5}$; $11{\cdot}10^{-5}$; $8{,}7{\cdot}10^{-5}$ мм/цикл.

Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности элемента, если предельно допустимая скорость роста усталостных трещин в этом материале (при той же величине нагрузочного фактора) принята: а) $9{\cdot}10^{-5}$; б) $11{\cdot}10^{-5}$; в) $13{\cdot}10^{-5}$; г) $16{\cdot}10^{-5}$ мм/цикл.

3. Был проведен анализ напряжений, испытываемых элементом конструкции. Результаты 10 замеров следующие: 207, 236, 245, 262, 265, 337, 292, 375," 300, 275 МПа. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности конструктивного элемента, если его несущая способность ~ детерминированная величина и равна: а) 337, б) 375, в) 390, г) 420МПа.

4. При испытании партии элементов конструкции были получены 14 значений прочности: 360, 343, 382, 385, 420, 370, 360, 354, ! 338, 373, 400, 371, 359, 368 МПа. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности конструктивного элемента, если действующая нагрузка — детерминированная величина и вызывает в конструкции напряжения: а) 343, б) 338, в) 320, г) 300 МПа.

5. Проведены испытания 9 пружин. Замерялось усилие поджатпя пружины, установленной в толкателе. Результаты следующие: 3370, 3430, 3460, 3465, 3490, 3540, 3545, 3590, 3625 Н. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности системы разделения, в которой стоит такая пружина, если сила сопротивления (трения) — детерминированная величина и равна: а) 3430, б) 3370, в) 3200, г) 3000 Н.

6. Проведены испытания 9 теплозащит спускаемой части космических аппаратов, изготовленных по одинаковой технологии. Время полного выхода из строя теплозащиты следующее: 332, 337, 343, 346, 351, 354, 358, 368, 362 с. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности теплозащиты ЛА, изготовленной по той же технологии, если время воздействия высоких температур на участке спуска принять детерминированной величиной и равной: а) 335, б) 332, в) 300, г) 250 с.

7. Проведены испытания 9 шаров-баллонов для сжатого воздуха. Шары-баллоны разрушались при давлении: 34,3, 35,6; 34,7; 35,5; 34,7; 35,3; 34,8; 35,2 МПа. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности шара-баллона, если рабочее давление газа — детерминированная величина и задана конструкторами на уровне: а) 34,7, б) 34,3, в) 32.0, г) 29,0 МПа.

8. Были проведены замеры напряжений сжатия в одном из сухих отсеков летательного аппарата (ЛА) во время испытательных полетов. Регистрировались только максимальные значения напряжений. Результаты измерения 10 ЛА следующие: 81, 105, 52, 21, 148, 94, 67, 135, 86, 114 МПа. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели

надёжности конструкции этого отсека, если критические напряжения сжатия конструкторы заложили в конструкцию следующими: а) 135, б) 148, в) 170, г) 250 МПа.

9. По результатам запусков прототипов ЛА и записи системы датчиков напряжений и перегрузок были вычислены максимальные аэродинамические силы в каждом полете: 60, 87, 98, 107, 122, 136, 80, 90, 102, 116 кН. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности корпуса ЛА, если конструкция может воспринимать следующие предельно допустимые нагрузки: а) 122, б) 136, в) 150, г) 200 кН.

10. Проведены испытания 10 пружин при циклическом нагружении. Регистрировалось количество циклов, когда пружина сломается. Результаты замеров 10 пружин следующие: 92, 98, 104, 120, 110, 88, 81, 102, 112, 95 тыс. циклов. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности пружины в составе одного из механизмов ЛА, если конструктор назначил ресурс механизма: а) 98, б) 92, в) 90, г) 50 тыс. циклов.

11. Проведены 100 замеров температуры хранилища ЛА в различное время года. Результаты представлены в табл. 1.5. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности хранения при условии, что ЛА считается вышедшим из строя, если температура окажется ниже: а) 5°С, б) 1°С, в) 0°С, г) —10°С.

Таблица 1.5

Номер интервала	Интервал, °С	Количество точек замера, попавшее в интервал
1	1—5	10
2	5—9	20
3	9—13	50
4	13—17	12
5	17—21	8

12. Проведены замеры напряжений, возникающих в элементе конструкции ЛА в условиях эксплуатации. Регистрировались максимальные

значения нагрузки в каждом из 50 летательных аппаратов. Результаты представлены в табл. 1.6. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при условии, что прочность элемента конструкции — величина детерминированная и равна: а) 220, б) 270, в) 300, г) 350 МПа.

Таблица 1.6

Номер интервала	Интервал, МПа	Количество ЛА, попавших в интервал
1	20 -70	5
2	70 - 120	10
3	120 – 170	25
4	170 - 220	6
5	220 -270	4

13. Проведены замеры времени выхода на режим (прогрева) одного из приборов ЛА перед его запуском. Результаты испытаний 100 приборов приведены в табл. 1.7. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при условии, что время готовности ЛА с момента включения конструкторы назначили: а) 15, б) 17, в) 20, г) 30 с.

Таблица 1.7

Номер интервала	Интервал, °С	Количество приборов, попавших в интервал
1	3—5	4
2	5—7	6
3	7—9	20
4	9—11	40
5	11—13	20
6	13—15	4
7	15—17	6

14. Проведены испытания на устойчивость 20 оболочек из композиционного материала. Результаты сведены в табл. 1.8. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при

условии, что нагрузка — величина детерминированная и равна: а) 15, б) 10, в) 7, г) 4 кН.

Таблица 1.8

Номер интервала	Интервал, кН	Количество оболочек в интервале
1	10—15	2
2	15—20	4
3	20—25	8
4	25—30	4
5	30—35	2

15. При отработке двигателей были замерены импульс последствия и время спада тяги двигателя до нуля после подачи команды на выключение. Результаты 200 замеров представлены в табл. 1.9. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при условии, что отказ системы наступает, если время импульса последействия более: а) 2,1; б) 2,3; в) 2,5; г) 3 с.

Таблица 1.9

№ интер-вала	Интер-вал, с	Количество замеров, попавших в интервал	№ интер-вала	Интер-вал, с	Количество за-меров, попавш. в интервал
1	0 — 0,3	6	7	1,3—1,5	21
2	0,3—0,5	9	8	1,5—1,7	24
	0,5—0,7	26	9	1,7—1,9	20
4	0,7—0.9	25	10	1,9—2,1	8
5	0,9—1,1	30	11	2,1—2,3	5
6	1,1 — 1,3	26			

16. Испытано 100 шаров-баллонов до разрушения. При этом замерялось максимальное внутреннее давление. Результаты приведены в табл. 1.10. Построить функцию надежности при условии, что рабочее давление в баллоне, которое задал конструктор — детерминированная величина и равна: а) 10,3; б) 10,1; в) 9; г) 7МПа.

Таблица 1.10

№ интер-вала	Интер-вал, МПа	Количество разрушившихся баллонов	№ интер-вала	Интер-вал. МПа	Количество разрушившихся баллонов
1	10,1 — 10,3	2	7	11,3—11,5	16
2	10,3—10,5	4	8	11,5—11,7	11
3	10,5—! 0,7	6	9	11,7—11,9	7
4	10,7—10,9	10	10	11,9—12,1	5
5	10,9—11,1	18	11	12,1 — 12,3	1
6	11,1 — 11,3	20			

17. Проведены испытания образцов на разрыв. Значения предела прочности 120 образцов представлены в табл. 1.11. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если действующая нагрузка в конструкции, выполненной из этого же интервала — величина детерминированная и равна: а) 410, б) 405, в) 380, г) 350 МПа.

Таблица 1.11

№ интервала	Интервал, МПа	Количество образцов	№ интервала	Интервал, МПа	Количество образцов
1	405—410	7	6	430—435	19
2	410—415	8	7	435—440	14
3	415—420	15	8	440—445	10
4	420—425	18	9	445—450	6
5	425—430	23			

18. Проведены испытания партии пружин при циклическом нагружении. Регистрировалось количество циклов, когда пружина сломается. Результаты представлены в табл. 1.12. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если назначенное время работы пружины в составе изделия — детерминированная величина и равна: а) 17

Таблица 1.12

№ интервала	Интервал, тыс. циклов	Количество пружин	№ интервала	Интервал, тыс. циклов	Количество пружин
1	16—17	6	5	20—21	120
2	17—18	25	6	21—22	88
3	18—19	72	7	22—23	46
4	19—20	133	8	23—24	10

19. Проведены замеры отклонения скорости 31 летательного аппарата в конце активного участка от расчётной. Результаты сведены в табл. 1.13. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если отказом считать отклонение скорости меньше, чем: а) —10, б) —20, в) —30, г) —80 м/с.

Таблица 1.13

№ интервала	Интервал отклонения скорости, м/с	Количество ЛА в интервале
1	- 20…- 10	2
2	- 10…0	5
3	0…10	8
4	10…20	9
5	20…30	4
6	30…40	2
7	40…50	1

20. Проведены замеры высот орбиты в апогее (одинаковых объектов, запускаемых одинаковыми ЛА) на орбиту с одинаковыми параметрами). Результаты представлены в табл. 1.14. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если отказом считать высоту орбиты меньшую, чем: а) 199, б) 198, в) 195, г) 190 км.

Таблица 1.14

№ интервала	Интервал, км	Количество объектов
1	198-199	2
2	199—200	4
з	200—201	8
4	201—202	9
5	202—203	4
6	203—204	2
7	204—205	1

21. Проведены замеры отклонения размера детали от номинального значения. Результаты замеров 300 деталей сведены в табл. 1.15. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при условии, что отказом в конструкции считается установка этой детали с отклонениями более: а) 40, б) 50, в) 70, г) 100 мк.

Таблица 1.15

№ интервала	Интервал, мк	Количество деталей в интервале
1	- 20…- 10	20
2	- 10…0	47
3	0…10	80
4	10…20	89
5	20…30	40
б	30…40	16
7	40…50	8

22. Проведены замеры плотности одного из компонентов топлива разных партии. Результаты представлены в табл. 1.16. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если за отказ работы системы опорожнения баков ЛА принята плотность меньшая, чем: а) 1170, б) 1160, в) 1140, г) 1110 кг/м^3.

Таблица 1.16

№ интервала	Интервал, кг/м^3	Количество замеров в интервале
1	1160—1170	6
2	1170—1180	25
3	1180-1190	72
4	1190—1200	133
5	1200—1210	122
6	1210—1220	88
7	1220—1230	44
8	1230—1240	10

23. Проведены испытания 12 двигателей на ресурс. Результаты испытаний следующие: 476, 487, 499, 506, 520, 537, 490, 458, 480, 523, 514, 501 с. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности при условии, что конструкторы назначили время работы двигателя в реальной конструкции: а) 476, б) 458, в) 430, г) 400 с.

24. На огневых испытаниях теплозащиты замерялась глубин,"1 сгоревшей ее части. Результаты замера 12 теплозащит после испытаний следующие: 44,8; 47,3; 49,4; 51,5; 53,8; 57,9; 42,2; 46,7; 48,5; 50,8; 53,1; 55,8 мм. Построить функцию надёжности. Определить конкретные показатели надёжности, если в конструкции Л А заложена теплозащита толщиной: а) 56, б) 58, в) 60, г) 70 мм.

1.4 Вопросы для контроля

1. Приведите определение статистической функции распределения случайной величины при небольшом количестве экспериментальных точек и объясните, что она означает.

2. Как и по каким зависимостям производятся расчет и построение функции плотности распределения случайной величины при небольшом количестве экспериментальных точек?

3. Поясните графическую интерпретацию площади под графиком плотности распределения.

4. Приведите формулы для подсчета математического ожидания и дисперсии при небольшом количестве экспериментальных точек. Объясните физический смысл этих характеристик.

5. Что такое среднее квадратическое отклонение?

6. Что такое частота при интервальном представлении случайной величины?

7. Приведите определение статистической функции распределения при интервальном представлении случайных величин.

8. Приведите определение функции плотности распределения при интервальном представлении случайных величин.

9. Что такое гистограмма и как она строится?

10. Приведите формулы для подсчета математического ожидания и дисперсии при интервальном представлении случайных величин.

11. Приведите определение показателя надежности в методе расчета надежности как вероятностной прочности.

12. Объясните понятия обобщенной нагрузки и обобщенной прочности, используемые в методе расчета надежности как вероятностной прочности.

13. Как рассчитывается надежность, если одна из сравниваемых величин является детерминированной (неслучайной)? Приведите пояснения с помощью графиков.

14. В каких случаях функция надежности совпадает по форме с функцией распределения случайной величины, а в каких - противоположна ей?

15. В чем отличие функции надежности в методе расчета надежности как вероятностной прочности?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

2 ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗДЕЛИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель занятия: закрепление навыков студентов в оценке надежности элементов изделий ракетно-космической техники (РКТ) при нормальном законе распределения случайных величин.

Задачи состоят в том, что студент, выполнивший работу должен:

знать вид нормального закона распределения и ее плотности;

уметь провести проверку нормальности распределения случайной величины графическим методом;

уметь пользоваться таблицей функции нормального распределения случайной величины при определении надежности ЛА;

уметь оценивать надежность ЛА по экспериментальным данным, подчиняющимся нормальному закону распределения.

2.1 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения одномерной случайной величины характеризуется следующим выражением плотности

$$f(x) = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{D_x}\right)^2\right],$$

где x — случайная величина, распределенная на интервале от минус ∞ до плюс ∞; m_x и D_x — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Этот закон наиболее распространен в теории вероятностей. Примерный график этой зависимости, а также функции распределения *F(x)* приведен на рис. 8. Функции нормированного нормального распределения табулированы для упрощения расчетов и приведены в соответствующей литературе по теории вероятностей и статистике.

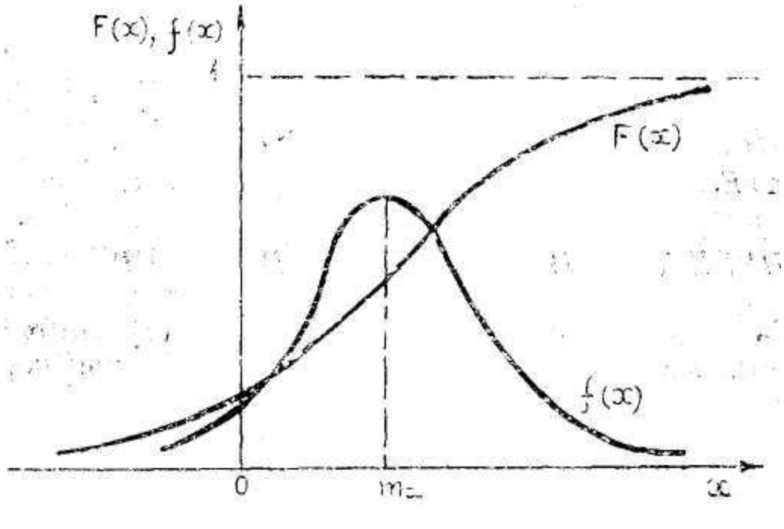


Рисунок 2.1 – Примерный вид функции нормального закона распределения и плотности распределения случайной величины

Следует заметить, что интегральная функция нормального закона распределения имеет несколько видов, отличающихся той или иной формой записи или пределами интегрирования (функции Шеппарда, Лапласа, Маркова, функции ошибок Гаусса и т. п.). Приведем здесь наиболее употребляемую нормированную нормальную функцию распределения Шеппарда:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz ,$$

где z — нормированная случайная величина. Здесь нормировка осуществляется следующим образом

$$z = \frac{x - m_x}{D_x} .$$

Значения функции нормального распределения типа (14) приведены в приложении А.

Экспериментально доказано, что нормальному закону подчиняются погрешности измерений, отклонения размеров и положений элементов собираемых конструкций, изменчивость физико-механических характеристик материалов, разбросы массы, отказы стареющих элементов, а также все случайные величины, отклонения которых от средних значений вызываются большой совокупностью случайных факторов, каждый из которых в отдельности незначителен.

2. 2 Вычисление надежности при нормальном законе распределения прочности и нагрузки

Приведем здесь вывод формул для подсчета надежности (вероятности безотказной работы) при нормальном законе распределения случайных величин нагрузки (напряжения) и прочности.

Плотность нормального распределения напряжения *N* имеет вид

$$f_N(\sigma) = \frac{1}{D_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma - m_N}{D_N}\right)^2\right] ,$$

а плотность нормального распределения прочности *R* имеет вид

$$f_R(\sigma) = \frac{1}{D_R\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma - m_R}{D_R}\right)^2\right] ,$$

где m_N и m_R — математическое ожидание напряжения и прочности соответственно; D_N и D_R — среднеквадратические отклонения напряжения и прочности соответственно.

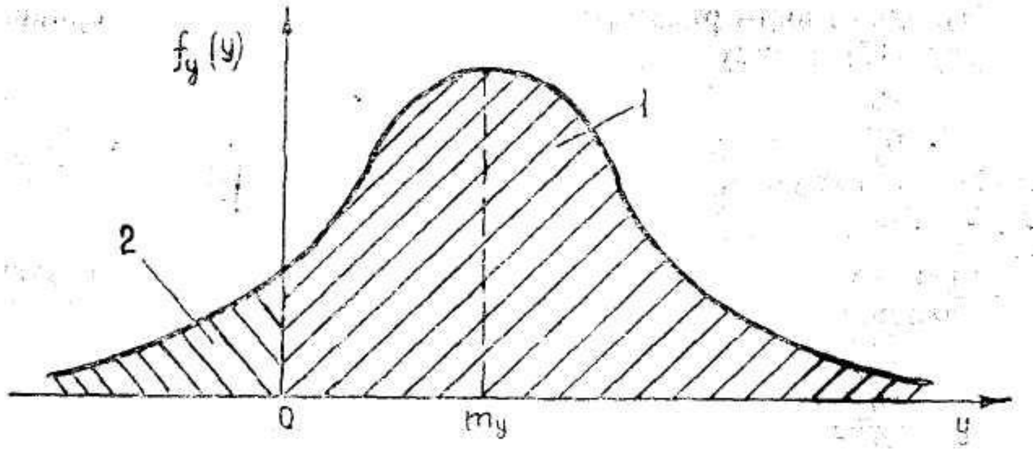
Введем композиционную случайную величину y = R— N. В теории вероятностей доказывается, что эта величина также будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием

$$m_y = m_R - m_N \qquad (15)$$

и средним квадратнческим отклонением (работа [lj, с. 275—277)

$$D_y = \sqrt{D_R^2 + D_N^2}$$

График плотности распределения композиционной случайной величины у изображен схематически на рис. 9. Площадь заштрихованной фигуры 1 равна вероятности безотказной работы, площадь фигуры 2 соответствует вероятности отказа, т. е. безотказная работа элемента будет при значении композиционной случайной величины и больше нуля.



1 — площадь, соответствующая вероятности безотказной работы;
2 — площадь, соответствующая вероятности отказа

Рисунок 2.2 - Плотность распределения композиционной случайной величины

Вероятность безотказной работы можно выразить через плотность f_y

$$H = P(y>0) = \int_0^\infty f_y\,dy = \frac{1}{D_y\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_y}{D_y}\right)^2\right]dy.$$

Чтобы находить значения этого интеграла с помощью таблиц нормального закона распределения, проведем замену переменных с помощью следующей нормировочной функции

$$z = \frac{y - m_y}{D_y}.$$

Тогда $dy = D_y dz$. При $y = 0$ нижний предел интегрирования будет следующим $z = \frac{0 - m_y}{D_y} = -\frac{m_y}{D_y}$, а при $y \to \infty$ верхний предел $z \to +\infty$.

После замены переменных и пределов интегрирования получаем

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{m_y}{D_y}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Используя очевидное соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{a} f(\tau)\, d\tau + \int\limits_{a}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau = 1,$$

где $f(\tau)$ — плотность распределения случайной величины, приведем формулу (17) к виду

$$H = 1 - \int\limits_{-\infty}^{-\frac{m_y}{D_y}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 1 - \Phi\left(-\frac{m_y}{D_y}\right) = \Phi\left(\frac{m_y}{D_y}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ - условное обозначение функции нормального закона распределения.

Учитывая выражения (15) и (16), окончательно имеем

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right).$$

Согласно формуле (18) определяется надежность элемента при случайных величинах нагрузки N и прочности R, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Если случайной величиной будет только одна, например R, а другая детерминированной (например, N), то надежность определяется следующим образом

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - N}{D_R}\right)$$

Если R — детерминированная, а N — случайная величина, то

$$H = \Phi\left(\frac{R - m_N}{D_N}\right).$$

Пример. Пусть математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение напряжения (нагрузки) в элементе конструкции m_N = 30 МПа и D_N = 3 МПа. Соответствующие параметры прочности: m_R = 40 МПа и D_R = 4 МПа. Определить надежность элемента при условии, что нагрузка и прочность подчиняются нормальному закону распределения.

Р е ш е н и е. Вычисляем аргумент функции $\Phi(\cdot)$

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R{}^2 + D_N{}^2}} = \frac{40 - 30}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2{,}0 .$$

По таблицам нормального распределения (см. прил.) находим

$$H = \Phi(2{,}0) = 0{,}97725 .$$

2.3 Проверка соответствия распределения случайной величины нормальному закону

Прежде чем оценить надежность элементов, пользуясь таблицами нормального закона распределения, необходимо убедиться, что рассматриваемые случайные величины подчиняются нормальному закону. Существует несколько статистических методов такой проверки. Наиболее простым (но не наиболее точным) считается графический метод. Суть его состоит в том, что эмпирическую функцию распределения случайной величины строят на специальном графике со шкалой ординат, построенной в соответствии с нормальным законом распределения. Если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то экспериментальные точки, нанесенные на такой график, ложатся на прямую линию (пли на линию, близкую к прямой).

Для примера с пружинами (см. лабораторную работу 1 «Построение функции надежности по экспериментальным данным») такие построения представлены на рис. 10. Видно удовлетворительное соответствие экспериментальных данных нормальному закону, так как точки группируются около прямой.

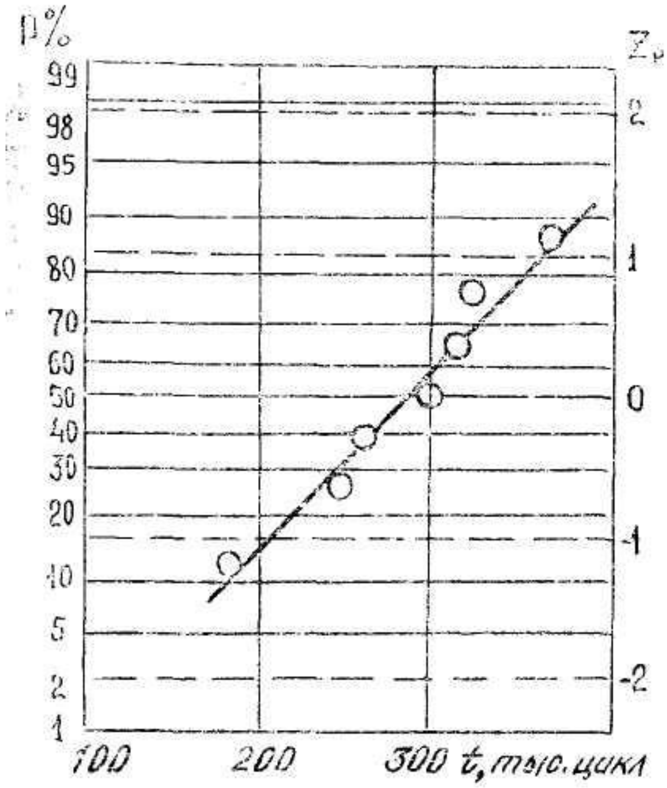


Рисунок 2.3 - Проверка соответствия закона распределения случайной величины нормальному закону

Построение шкалы ординат в соответствии с нормальным законом распределения производится следующим образом. Используем понятие квантиля распределения случайной величины. Квантилью z_P называется аргумент функции распределения случайной величины, соответствующий заданному уровню вероятности P. Другими словами, квантиль z_P — это решение уравнения

$$F(x)=P,$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины x.

Квантили нормированного нормального распределения для некоторых уровней вероятности представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 - Значения квантилей нормированного нормального распределения

Вероят-ность, P	Квантиль, Zp	Вероят-ность, P	Квантиль, Zp	Вероят-ность, P	Квантиль, Zp
0	-—.00	0,2	—0,84	0,9	1,28
0,001	—3,09	0,3	—0,52	0,95	1,64
0,005	—2,58	0,4	—0,25	0,98	2,054
0,01	—2,33	а,5	0	0,99	2,33
0,02	—2,054	0,6	0,25	0,995	2,58
0,05	—1,64	0,7	0,52	0,999	3,09
0,10	— 1,28	0,8	0,84	1	+ OO

Построение шкалы ординат начинается с построения равномерной шкалы квантилей (см. рис. 2.3). В настоящей лабораторной работе достаточно выбрать шкалу квантилей от z_P = —2,5 до z_P = + 2,5. Соответствующие вероятности берутся из табл. 17. Рекомендуемый масштаб по оси ординат для данной работы: один квантиль (z_P = 1) соответствует 20 мм на шкале ординат.

2.4 Задания

Первая часть.

Проверить графическим методом соответствует ли закон распределения случайных величин в задачах лабораторной работы «Построение функции надежности по экспериментальным данным» нормальному закону. (Как правило, студенту задаются для анализа те же задачи, что и сделанные им в указанной лабораторной работе).

Если закон распределения случайных величин не противоречит нормальному, то необходимо оценить надежность элемента (системы) в этих задачах, пользуясь таблицей нормального распределения.

Вторая часть.

Даны результаты замеров случайных величин прочности R и напряжения N. Провести проверку нормальности законов распределения случайных величин R и N графическим методом и при условии нормальности законов распределения оценить надежность элемента (системы) с использованием таблиц нормального закона распределения.

Различные варианты экспериментальных данных представлены ниже:

1. *N*: 415, 473, 530, 600. 550, 750, 525, 675, 584, 490;
   R: 674, 764, 686, 840, 718, 764, 708,770, 720, 742, 720, 800, 736, 740;
2. N: 830, 946, 1060, 1200, 1100, 1500, 1050, 1350, 1168, 980;
   R: 1348, 1528, 1372, 1680, 1436, 1492, 1416, 1540, 1440, 1484, 1410 1600,1472, 1480.
3. N: 1660, 1892, 2120, 2400, 2200, 3000, 2100, 1700, 2336, 1960;
   R: 2696, 3056, 2774, 3460, 2872, 2984, 2832, 3080, 2880, 2968, 2880, 3200, 2944, 2960.
4. N: 620, 825, 708, 875, 735, 900, 787, 1010, 785, 1125;
   R: 1015, 1110, 1030 1113, 1060, 1120, 1080, 1145, 1082, 1155,1082, 1260, 1105, 1200.
5. N: 1240, 1650, 1416, 1750, 1470, 1800, 1574, 2020, 1590, 2250;
   R: 2030, 2220, 2060, 2226, 2120, 2240, 2160, 2290, 2164, 2310, 2164, 2320, 2210, 2400.
6. N: 1860, 2475, 2124, 2625, 2205, 2700, 2360, 3030, 2383, 3375;
   R: 3045, 3330, 3090, 3339, 3180, 3360, 3240, 3435, 3246, 2465, 3246,3780,3315,3600.
7. N: 103, 137, 122, 146, 118, 150, 131, 169, 132, 187;
   R: 169, 185, 172, 186, 177, 187, 180, 191, 179, 193, 180, 200, 184 210.
8. N: 228, 259, 321, 270, 330, 289, 371, 291, 412, 302;
   R: 372, 407, 378, 408, 389, 410, 395, 420, 396, 423, 396, 440, 405, 462.
9. N: 249, 283, 350, 294, 360, 315, 405, 318, 450, 330;
   R: 405, 444, 412, 445, 424, 447, 430, 458, 432, 462, 432, 480,441, 504.
10. N: 269, 307, 379, 319, 390, 341, 438, 344, 487, 357;
    R: 439, 381, 446, 482, 460, 485, 466, 496, 468, 500, 468, 520, 478, 546.
11. N: 280, 330, 408, 434, 420, 367, 472, 371, 525, 385;
    R: 472, 518, 480, 519, 495, 522, 502, 535, 504, 539, 504, 560, 515, 588.
12. N: 311, 354, 438, 368, 450, 384, 506, 397, 562, 412;
    R: 507, 555, 515, 556, 531, 559, 538, 572, 540, 577, 540, 600, 552, 633.
13. N: 490, 584, 675, 525, 750, 550, 600, 530, 473, 415.
    R: 740, 736, 800, 720, 742, 720, 770, 708, 746, 718, 840, 686, 764, 674.
14. N: 980, 1168, 1350, 1050, 1500, 1100, 1200, 1060, 946, 830;

R: 1480, 1472, 1600, 1440, 1484, 1440, 1540, 1416, 1492, 1436, 1680, 1372, 1528, 1348.

15. N: 1960, 2336, 1700, 2100, 3000, 2200, 2400, 2120, 1892, 1660;
R: 2960, 2944, 3200, 2880, 2968, 2880, 3080, 2832, 2984, 2872, 3460, 2744, 3056, 2696.

16. N: 1125, 795, 1010, 787, 900, 735, 875, 708, 825, 620.
R: 1200, 1105, 1260, 1082, 1155, 1082, 1145, 1080, 1120, 1060, 1113, 1030, 1110, 1015;

17. N: 2250, 1590, 2020, 1574, 1800, 1470, 1750, 1416, 1650, 1240;
R: 2400, 2210, 2320, 2164, 2290, 2160, 2240, 2120, 2226, 2060, 2220, 2030, 2310, 2164.

18. N: 3375, 2383, 3030, 2360, 2700, 2205, 2625, 2124, 2475, I860;
R: 3600, 3315, 3780, 3246, 3465,3246,3435,3240,3360,3180,3339, 3090, 3330, 3045.

19. N: 187, 132, 169, 131, 150, 118, 146, 122, 137, 103;
R: 210, 184, 200, 180, 193, 179, 191, 180, 187, 177, 186, 172, 185, 169.

20. N: 302, 412, 291, 371, 289, 330, 270, 321, 259, 228;
R: 462, 405, 440, 396, 423, 396, 420, 395, 410, 389, 408, 378, 407, 372.

21. N: 330, 450, 318, 405, 315, 360, 294, 350, 283, 249;
R: 504, 441, 480, 432, 462, 432, 458, 430, 447, 424, 445, 412, 444,405.

22. N: 357, 487, 344, 438, 341, 390, 319, 379, 307, 269;
R: 439, 481, 446, 482, 546, 478, 520, 468, 500, 468, 496, 466, 485, 460.

23. N: 385, 525, 371, 472, 367, 420, 343, 408, 330, 280;
R: 588, 515, 560, 504, 539, 504, 535, 502, 522, 495, 519, 480, 518, 472.

24. N. 412, 562, 397, 506, 394, 450, 368, 438, 354, 311;
R: 633, 552, 600, 540, 577, 540, 572, 538, 559, 531, 556, 515, 555, 507.

2.5 Вопросы для контроля

1. Приведите функцию плотности нормального закона распределения случайной величины.

2. Приведите интегральную функцию распределения случайной величины.

3. По какой зависимости и для какой цели производится нормировка

случайной величины?

4. Как подсчитывается математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение композиционной случайной величины при нормальном законе распределения составляющих величин?

5. Приведите зависимость, по которой определяется надежность элемента или системы, если случайные величины нагрузки и прочности подчиняются нормальному закону распределения.

6. По каким зависимостям рассчитывается надежность, если одна из сравниваемых величин случайная, а другая — детерминированная?

7. Почему нормальный закон распределения случайных величин является наиболее распространенным в теории и практике'

8. Для чего необходимо проводить проверку соответствия экспериментальной функции распределения случайной величины нормальному (или какому-то другому) закону распределения?

9. В чем состоит суть графического метода проверки соответствия распределения случайной величины нормальному закону?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

3 ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Цель занятия: Знакомство студентов с понятиями доверительный интервал и доверительная вероятность, закрепление навыков студентов в оценке доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии случайной величины, представленной в виде выборки экспериментальных данных для оценки надежности элементов изделий ракетно-космической техники (РКТ).

Задачи состоят в том, что студент, выполнивший работу должен:

знать определение доверительного интервала и доверительной вероятности;

понять сущность методов определения доверительного интервала;

уметь вычислять доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии;

уметь пользоваться статистическими таблицами;

иметь представление о распределении Стьюдента и Пирсона.

3.1 Основные положения

3.1.1 Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала

Пусть имеется случайная величина X с плотностью распределения f*(x)* и математическим ожиданием m_x. Схематически это изображено на рис. 1.

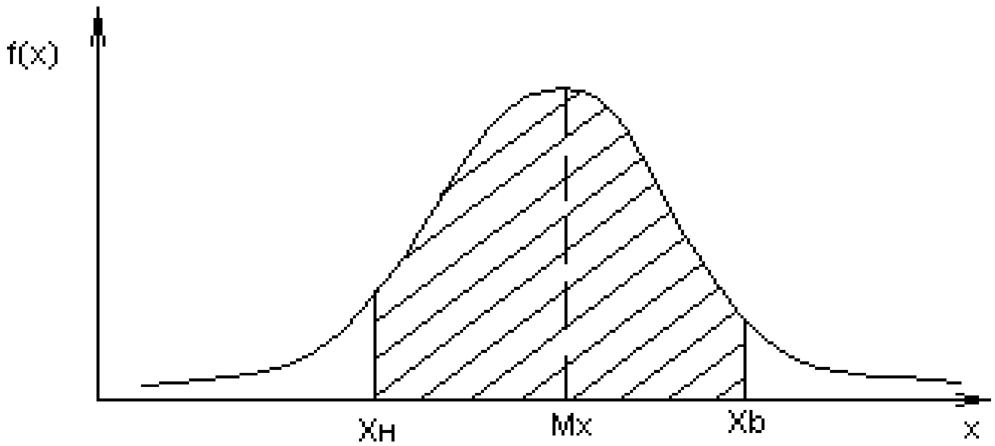


Рисунок 3.1 - К понятию доверительного интервала

Выберем произвольно две точки на оси абсцисс, левую обозначим через $x_н$, а правую через $x_в$. Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал ($x_н$;$x_в$) равна площади заштрихованной фигуры на рисунке. Аналитически это вероятность запишется следующим образом:

$$P(x_H < X < x_B) = \gamma = \int_{x_H}^{x_B} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_B} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_H} f(x)dx = F(x_B) - F(x_H) \qquad (3.1)$$

где *P* – символ вероятности;

F – функция распределения случайной величины.

Можно рассмотреть обратную задачу.

Пусть дана вероятность *γ*. Необходимо определить границы интервала $x_{H\gamma}$ и $x_{B\gamma}$ в который случайная величина *X* попадает с вероятностью *γ*. Поскольку здесь имеется две переменных $x_{H\gamma}$ и $x_{B\gamma}$, то обратная задача неоднозначна. Для однозначности накладывают дополнительное условие, например, что границы интервала $x_{H\gamma}$ и $x_{B\gamma}$ располагают симметрично относительно математического ожидания (тогда говорят о двухстороннем интервале), или одну из границ назначают минус или плюс бесконечности (тогда говорят об одностороннем интервале). Могут назначаться границы несимметрично относительно m_x исходя из других соображений.

Вероятность γ принято называть доверительной вероятностью, а интервал $I_\gamma=(x_{H\gamma}\ ;\ x_{B\gamma})$ доверительным интервалом.

Границы $x_{H\gamma}$ и $x_{B\gamma}$ принято называть доверительными границами.

Если говорят не о непрерывных теоретических распределениях *f(x)*, а о выборках случайных величин (экспериментальных данных), то можно сказать, что при многократных выборках в среднем в $\gamma \cdot 100\%$ случаев результаты экспериментов попадут в доверительный интервал $(x_{H\gamma}\ ;\ x_{B\gamma})$. Или другими словами: что интервал $(x_{H\gamma};x_{B\gamma})$ накрывает $\gamma \cdot 100\%$ экспериментальных точек.

Иногда удобно доверительный интервал выражать в долях от среднеквадратического отклонения D_X. Так, например, для нормального закона распределения и для симметричных относительно математического ожидания доверительных границ интервал $(m_x - D_x; m_x + D_x)$ накрывает 68,3% всех экспериментальных точек (или говорят, что в этот интервал попадает 68,3% всех экспериментальных точек. Или еще так: интервал $(m_x - D_x; m_x + D_x)$ соответствует 68,3-процентной доверительной вероятности). Еще примеры: интервал $(m_x - 2D_x; m_x + 2D_x)$ накрывает примерно 95.5% всех экспериментальных точек, а интервал $(m_x - 3D_x; m_x + 3D_x)$ - 99,7%.

Эти положения иллюстрируются рисунками 3.2 и 3.3. По оси x на рис. 3.2 отложена случайная величина *X*, а на рис. 3.3 – нормированная случайная величина *u*, которая равна $u = \dfrac{x - m_x}{D_x}$.

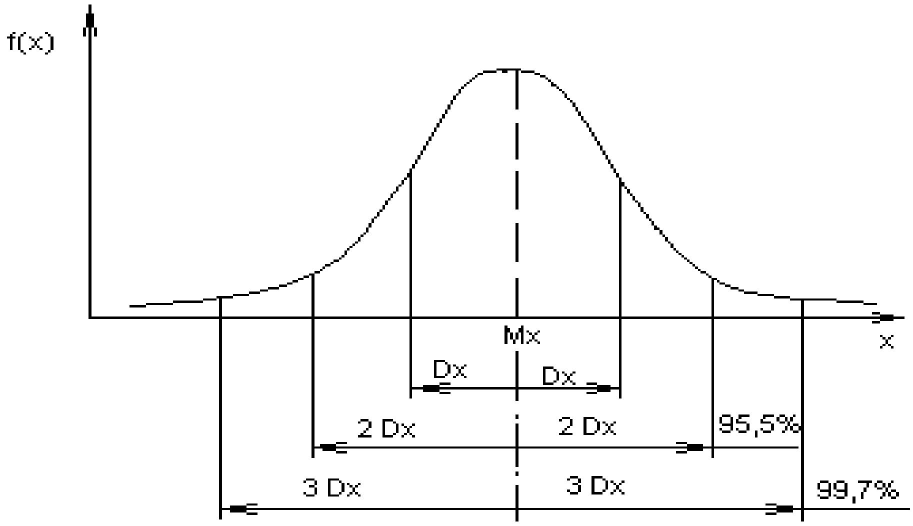


Рисунок 3.2 - Доверительные интервалы
для нормального закона распределения

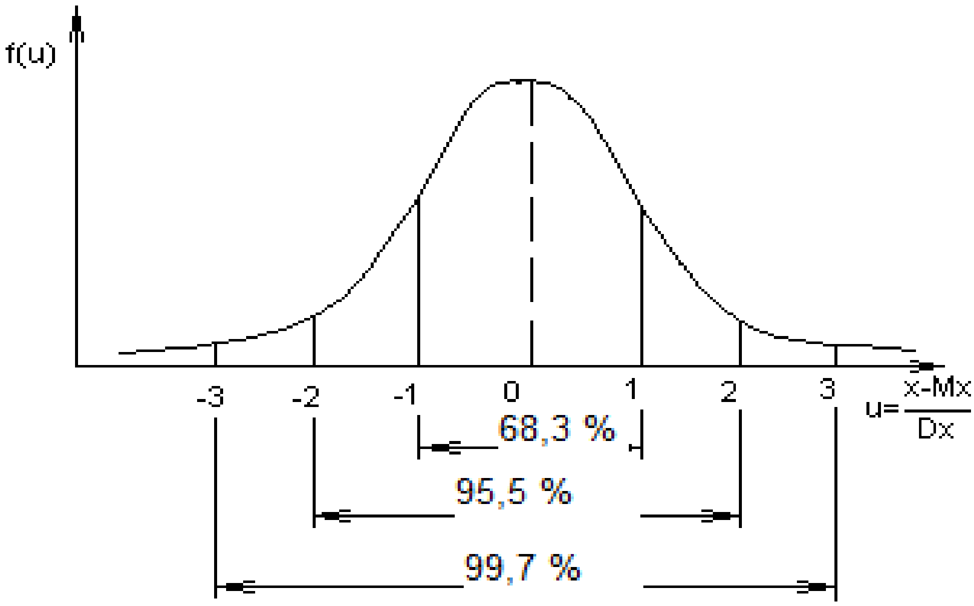


Рисунок 3.3 - Доверительные интервалы для нормированного
нормального закона распределения

Обратим внимание на то, что «*u*» есть не что иное, как аргумент нормированного нормального распределения:

$$\Phi(u)=\Phi\left(\frac{x-m_x}{D_x}\right), \tag{3.2}$$

и, следовательно, для произвольной доверительной вероятности с помощью таблиц нормального распределения можно определить значение квантиля *u*, а по нему и доверительный интервал $(x_{H_\gamma}; x_{B_\gamma})$. Это делается так. Из уравнения $u_\gamma = \pm \frac{x - m_x}{D_x}$ находим $x_{H_\gamma} = m_x - u \cdot D_x$ и $x_{B_\gamma} = m_x + u \cdot D_x$.

Таким образом, доверительный интервал

$$I_\gamma = \left(m_x - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x; \quad m_x + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x \right). \tag{3.3}$$

Пример 1. По результатам 20 опытов имеем: $m_x = 10{,}78$; $D_x^2 = 0{,}064$; $D_x = 0{,}253$. Требуется найти доверительный интервал и доверительные границы для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$.

Решение. По таблице нормального распределения (см. лабораторную работу “Оценка надежности элементов ЛА при нормальном законе распределения”) находим, что $\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$, что соответствует аргументу $u = \pm 1{,}643$. Рассчитываем доверительный интервал по формуле (3.3): $I_\gamma = (10{,}78 - 1{,}643 \cdot 0{,}253; 10{,}78 + 1{,}643 \cdot 0{,}253)$.

Таким образом, 90-процентный доверительный интервал составит (10,36; 11,20).

Перейдем теперь к определению доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии.

Математическое ожидание $\hat{m}_x$ и дисперсия $\hat{D}_x^2$ являются надежными количественными оценками генеральных характеристик случайных величин лишь при большом числе экспериментальных данных n. При ограниченных объемах испытаний необходимо указать степень точности и надежности этих оценок. Представление об уровне точности и надежности оценок дают также доверительные интервалы.

Рассмотрим вначале суть метода определения доверительного интервала для математического ожидания $\hat{m}_x$.

3.1.2 Доверительные интервалы для математического ожидания

На рис. 3.4 схематично представлена плотность распределения случайной величины X при бесконечно большом количестве экспериментальных точек. Так же на оси абсцисс показано истинное математическое ожидание (математическое ожидание генеральной совокупности) m_x. Однако на практике количество экспериментов ограничено, и определить точно величину m_x не представляется возможным. Вместо m_x определяют величину $\hat{m}_x$ по ограниченным экспериментальным данным (выборке). Если бы мы несколько раз пытались определить $\hat{m}_x$ по равным выборкам одной и той же случайной величины, то получали бы всякий раз разные оценки: $\hat{m}_{x1}$, $\hat{m}_{x2}$, $\hat{m}_{x3}$. Эти оценки также показаны на рис. 3.4.

Таким образом, сама оценка $\hat{m}_x$ является случайной величиной. А раз это случайная величина, то у нее имеется сой закон распределения со своими характеристиками математического ожидания и дисперсии (см. рис. 3.5). Эти характеристики будут зависеть еще от количества экспериментальных точек n (на рис. 3.5 цифра 1 – соответствует количеству экспериментальных точек n1, а цифра 2 - n2, причём, n2>n1).

Плотность распределения новой случайной величины $\hat{m}_x$, используя свойства функций случайных величин, известных из теории вероятностей:

$$M[\hat{m}_x] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_x = \frac{1}{n} n \cdot m_x = m_x,$$

где символом M[·] операция математического ожидания;

$$D^2_{m_x} = D^2[\hat{m}_x] = D^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2_x = \frac{1}{n^2} n D^2_x = \frac{D^2_x}{n},$$

где символом $D^2[\cdot]$ обозначена операция взятия дисперсии.

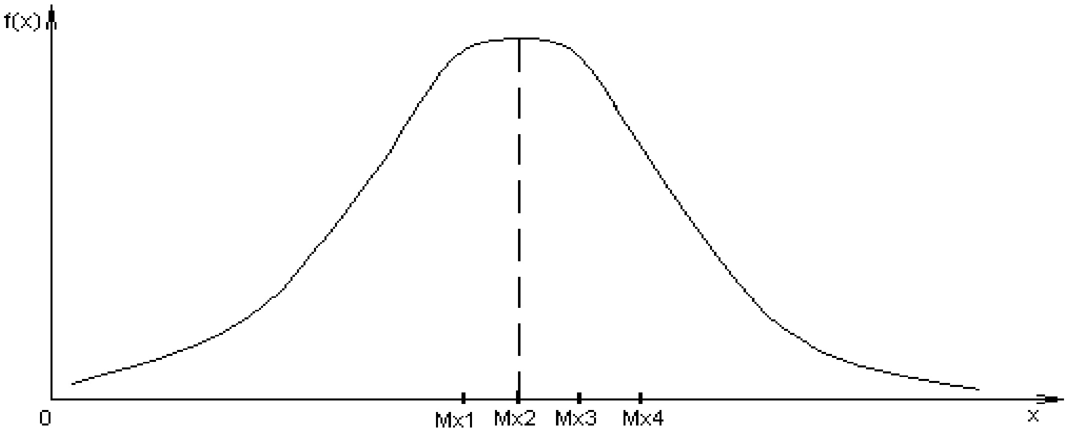


Рисунок 3.4 - Плотность распределения случайной величины
и оценки математического ожидания

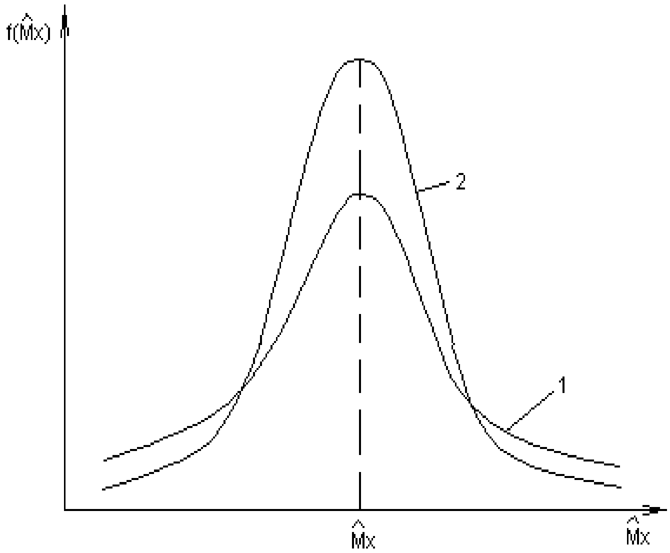


Рисунок 3.5 - Плотность распределения случайной величины $\hat{m}_x$
1 – соответствует n1; 2 - n2; (n2≻n1)

Напомним, что здесь использовано свойство: неслучайную величину можно выносить из под знака дисперсии, возводя эту неслучайную величину в квадрат.

Анализируя полученные выражения, приходим к выводу. Что математическое ожидание от среднего арифметического (которое в данном случае является оценкой) совпадают. А вот дисперсия случайной величины $\hat{m}_x$ меньше дисперсии случайной величины X в n раз.

Как и ранее, доверительный интервал удобно представлять в долях от дисперсии D_X . Это положение иллюстрируется рисунком 3.6, где по оси абсцисс отложена нормированная случайная величина, которую обычно обозначают буквой *t:*

$$t = \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_{m_x}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_x}.$$

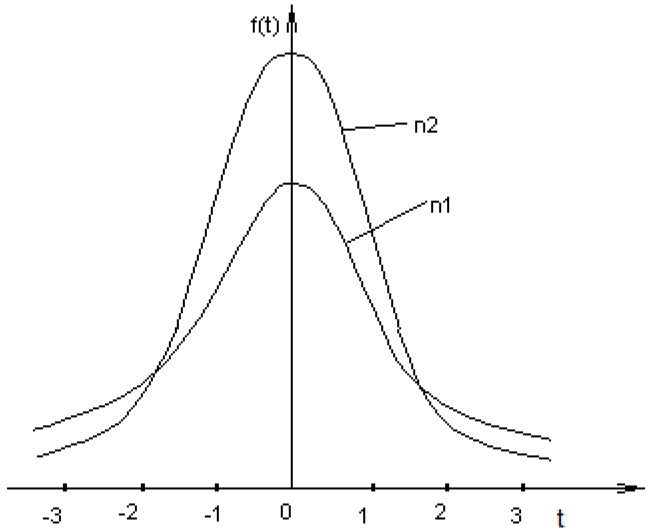


Рисунок 3.6 - К вопросу определения доверительного интервала для математического ожидания

Доверительный интервал для оценки математического ожидания можно выразить следующим образом:

$$I_{\hat{m}_X} = \left(\hat{m}_x - t \cdot D_{m_x};\ \hat{m}_x + t \cdot D_{m_x}\right).$$

Если вместо среднеквадратического отклонения D_{m_x} подставитьсреднееквадратическое отклонение D_x, то доверительный интервал будет выглядеть следующим образом:

$$I_{\hat{m}_X} = \left(\hat{m}_x - t\frac{D_x}{\sqrt{n}};\ \hat{m}_x + t\frac{D_x}{\sqrt{n}}\right). \qquad (3.4)$$

В математической статистике доказывается, что если исходное распределение случайной величины X подчиняется нормальному закону распределения, то распределение случайной величины:

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\hat{m}_x - m_x}{D_x}$$

подчиняется, так называемому, распределению (закону) Стьюдента с (n-1) степенями свободы (n – количество экспериментальных точек). Плотность этого закона имеет вид

$$S_{n-1}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где *Г(y)* – гамма функция, имеющая вид:

$$\Gamma(y)=\int_0^{\infty} z^{y-1}e^{-z}dz\,;$$

t – аргумент распределения Стьюдента.

Вероятность того, что случайная величина T_i попадет в интервал $(-t_\gamma;\,t_\gamma)$ равна

$$P(|T|<t_\gamma)=\int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} S_{n-1}(t)dt=\gamma\,.$$

Это выражение аналогично условию (3.1).

Значение аргумента *t,* соответствующее различным доверительным вероятностям γ рассчитаны заранее и приведены в соответствующей литературе по статистике. В приложении Б приведены таблицы Стьюдента для доверительной вероятности 0,9 ; 0,95 и 0,99.

Пример 2. По данным примера 1 найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,9.

Решение. Доверительный интервал рассчитывается по зависимости (3.4).

$$I_{m_x}=\left(10{,}78-t\frac{0{,}253}{\sqrt{20}};\quad 10{,}78+t\frac{0{,}253}{\sqrt{20}}\right).$$

В приложении Б для $n-1=19$ и $\gamma=0{,}9$ находим: $t=1{,}729$.

После расчета получаем следующий доверительный интервал

$I_{mx}=(10{,}68;\ 10{,}88)$, или $10{,}68\le m_x\le 10{,}88$.

Следует отметить, что при $n\to\infty$ можно вместо таблицы Стьюдента пользоваться таблицей нормального закона распределения, так как в пределе закон Стьюдента переходит в нормальный закон. На практике пользуются нормальным распределением уже при n>30.

3.1.3 Доверительные интервалы для дисперсии.

В математической статистике доказывается, что если исходное распределение случайной величины X подчиняется нормальному закону, то рассмотрение доверительных границ для дисперсии приводит к понятию распределения Пирсона (или как его иногда называют: распределение χ^2-квадрат). Распределение Пирсона уже не является симметричным. Поэтому в данном случае симметричные границы доверительного интервала брать не желательно. Уславливаются выбирать доверительные границы так, чтобы вероятность выхода случайной величины за пределы доверительного интервала вправо и влево были бы одинаковы и равны $(1-\gamma)/2$.

Не вдаваясь математические подробности, приведем окончательные формулы для определения доверительного интервала для дисперсии.

$$I_{D^2_{X\gamma}} = \left(\frac{\hat{D}^2_x (n-1)}{\chi^2_1}; \quad \frac{\hat{D}^2_x (n-1)}{\chi^2_2} \right), \tag{3.5}$$

где $I_{D^2_{X\gamma}}$ – условное обозначение доверительного интервала для дисперсии D^2_x с доверительной вероятностью γ: χ^2_1 и χ^2_2 значения величины χ^2 из таблицы Пирсона составленной для вероятности

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} \tag{3.6}$$

и

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{1+\alpha_1}{2} \tag{3.7}$$

Значение χ^2 для некоторых α_1 и α_2 приведены в приложении В.

Желающих более подобно ознакомиться с выводом формулы (3.5) отсылаем к работе [1].

Пример 3. В условиях примера 1требуется найти 90-процентный доверительный интервал для дисперсии.

Решение. По формулам (3.6) и (3.7) находим

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05 \text{ и } \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

Далее по таблице приложения В находим для *n-1*=19

$$\chi_1^2 = 10{,}11 \text{ и } \chi_2^2 = 30{,}1.$$

Доверительный интервал для дисперсии рассчитываем по формуле (3.5)

$$I_{D^2_{x\gamma}} = \left(\frac{0{,}064(20-1)}{10{,}11}; \quad \frac{0{,}064(20-1)}{30{,}1} \right) = (0{,}04; \quad 0{,}120).$$

3.2 Задания

1. Определить доверительные интервалы для случайной величины, ее математического ожидания и дисперсии в заданиях лабораторной работы «Построение эмпирической функции надежности» и в заданиях второй части лабораторной работы «Оценка надежности элементов ЛА при нормальном законе распределения случайных величин». Доверительные вероятности взять равными 0.9; 0.95; и 0.99.

Как правило, студенту задаются для анализа те же задания, что и ранее сделанные им ранее сделанные ими в указанных лабораторных работах.

3.3 Вопросы для контроля

1. Что такое доверительный интервал, доверительная вероятность, доверительные границы?

2. Объясните сущность метода нахождения доверительного интервала (доверительных границ) для случайной величины.

3. Приведите формулу вероятности попадания случайной величины в заданный интервал, выраженную через плотность распределения случайной величины.

4. Как можно выразить доверительный интервал в долях от среднего квадратичного отклонения? Объясните это с помощью рисунка для нормального закона распределения.

5. Объясните, почему математическое ожидание, рассчитанное по выборке, является также случайной величиной?

6. Отличаются ли математическое ожидание и дисперсия случайной величины X от математического ожидания и дисперсии случайной величины $\hat{m}_x$?

7. Приведите выражение для определения доверительного интервала для математического ожидания.

8. Приведите зависимость для определения доверительных границ дисперсии.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

4 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В ЗАДАЧАХ НАДЁЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ И СИСТЕМ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Цель занятия: Уяснение сути методов проверки статистических гипотез, используемых в теории надежности изделий и систем ракетно-космической техники. Закрепление навыков студентов в проверке некоторых часто используемых статистических гипотез.

Задачи состоят в том, что студент, выполнивший работу должен:

уяснить смысл методов проверки статистических гипотез;

знать определение нулевой и альтернативной гипотезы и уметь составлять эти гипотезы для конкретных заданий;

уяснить смысл статистического критерия и уметь выбрать нужный критерий для решения поставленной задачи;

иметь представление об области принятия, области отклонения нулевой гипотезы и об уровне значимости;

иметь представление об ошибках первого и второго рода;

уметь находить критические значения статистического критерия по таблицам распределения статистик;

знать постановку задач проверки гипотез при оценке резко выделяющихся членов выборки; проверки гипотезы о законе распределения по методам Н.В. Смирнова и Пирсона; проверки гипотез о равенстве двух дисперсий и двух средних (в статическом смысле) из нормально распределенных генеральных совокупностей.

4.1 Основные положения

4.1.1 Понятие статистической гипотезы

При экспериментальном определении законов распределения каких-либо случайных величин или их параметров обычно получаем выборку из генеральной совокупности, то есть ограниченную последовательность экспериментальных данных X_1, X_2, X_n (или $X_{1,}$ $Y_{1,}$; $X_{2,}$ Y_2; ... ; X_n, Y_n в двумерном случае).

Никаких точных утверждений о параметрах распределения генеральной совокупности по результатам опытов дать нельзя. Можно лишь высказать различные предположения о них - *гипотезы*.

Задача проверки гипотез состоит в том, чтобы установить, противоречит принятая гипотезе экспериментальная данным или нет.

По своему назначению, по характеру решаемых задач статистические гипотезы чрезвычайно разнообразны. Это гипотезы о резко выделяющихся результатах эксперимента, о соответствии статистического закона эксперимента, о соответствии статистического закона распределения теоретическому, о равенстве в статистическом смысле двух дисперсий и двух средних из двух различных выборок, о линейной корреляции и регрессии так далее.

Одна из возможных классификаций статистических гипотез дана в работе [1].

Все эти гипотезы проверяются путем обработки случайной выборки и называются статистическими.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу , которая может быть принята в том случае, если первая не подтвердится. Для отличия этих гипотез друг от друга выдвинутую гипотезу принято называть *нулевой* или *основной* обозначать символом H_0 (или Γ_0), а гипотезу противоречащую нулевой - к о н к у р и р у ю щ е й или а л ь т е р н а т и в н о й и обозначать символом H_1 (или $Г_1$).

Пусть проверяется предположение в том, что исследуемая характеристика подчиняется определенному, например, нормальному закону распределения. Это предположение выдвигается как нулевая гипотеза H_0. Альтернативных к ней гипотез может быть выдвинуто несколько. Так например, одна из них может состоять в предположении что эта характеристика не подчиняется нормальному закону распределения.

Для краткости записи гипотез используют специальное обозначение. Пусть нулевая гипотеза состоит в предложении, что математические ожидания двух нормально распределенных совокупностей m_X и m_y равны, а конкурирующая гипотеза состоит в том, что они не равны. Запись этих гипотез осуществляется следующим образом:

H_0: $m_x = m_y$; H_1: $m_x \neq m_y$.

Гипотезы принято подразделять на простые и сложные. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение например, H_0: $m_x = m_y$. Сложной называют гипотезу, содержащую конечное и бесконечное число предложений.

Важно подчеркнуть, что нулевая гипотеза выражает заранее выбранную точку знания, то есть необходимо проверить, не противоречит ли высказанная гипотеза H_0 имеющимся в нашем распоряжении выборочным данным.

Эта проверка осуществляется с помощью того или иного статистического критерия и называется статистической проверкой гипотез. Результат сопоставления может быть либо отрицательным (данные наблюдений противоречат высказанной гипотезе, а поэтому от нее следует отказаться), либо неотрицательным (данные наблюдений не противоречат высказанной гипотезе , а поэтому ее можно принять в качестве одного из естественных и допустимых решений).

4.1.2 Статистические критерии

С т а т и с т и ч е с к и м к р и т е р и е м принято называть однозначно определенное правило, устанавливающее условия, при которых проверяемую гипотезу следует принять или отвергнуть.

Простейший подход к выбору критерия рассмотрим на примере. Заодно познакомимся со специфической терминологией.

Имеется партия изготовленных деталей. Осуществляется выборочный контроль, по результатам которого необходимо принять решение: либо всю партию считать годной (с допустимым уровнем брака), либо всю партию считать негодной. За нулевую примем гипотезу, что вся партия годна, а за альтернативную, что вся партия имеет брак выше допустимого.

Из выбранных для контроля n деталей k бракованных может оказаться m штук, где $0\leq m\leq n$. Контролеры бракуют всю партию, если из выбранных n деталей оказалось k бракованных деталей (или больше) и считают годной всю партию, если бракованных деталей меньше k $(0\leq m<n)$. То есть, если $m<k$, то принимается гипотеза H_0, если $m\geq k$, то гипотеза H_0 отвергается.

При многократных выборках n деталей из той же партии может оказаться различным значение m. То есть m является случайной величиной со своим законом распределения.

В этом примере величина m может рассматриваться как признак или функция брака, в общем случае такой признак называется показателем согласованности. В некоторой литературе такую величину называют критической статистикой или статистической характеристикой.

Величина k служит в качестве критерия проверки (критерия согласия, критерия соответствия, т.е. свода правил, указывающих, при каких значениях величины показателя согласованности гипотеза отвергается, а при каких не отвергается).

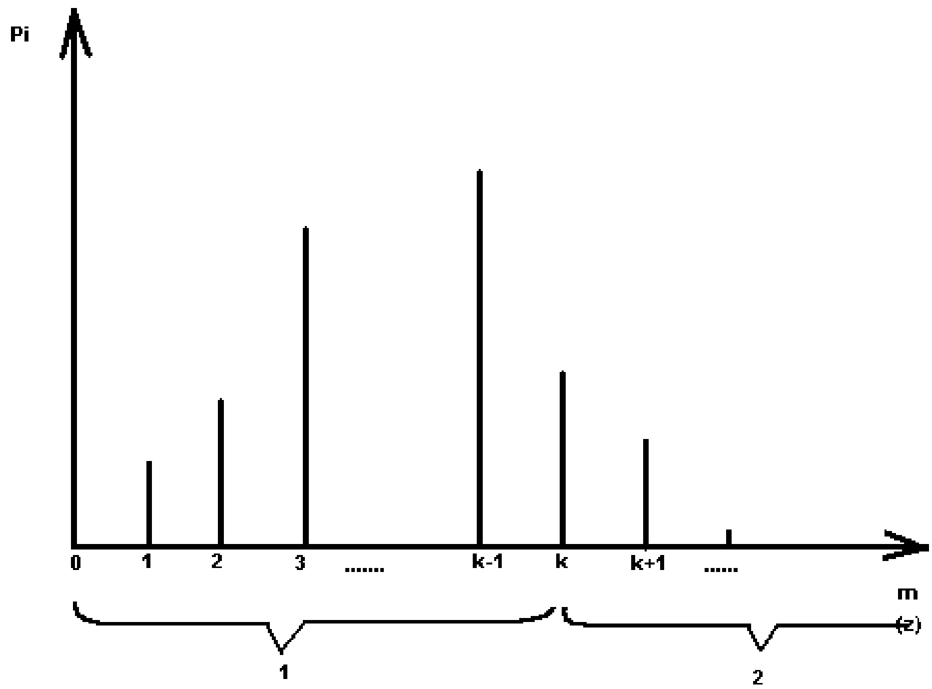
Анализируя приведенный пример и обобщая его видим, что множество возможных значений показателя согласованности (m) в соответствии с принятым критерием (k) разбивается на два подмножества ($m<k$ *и* $m\geq k$

$;0 \leq m \leq n$) таким образом, что попадание возможного значений показателя согласованности критической статистики в одно из этих подмножеств ($m<k$) означает принятие гипотезы H_0, а в другое ($m \geq k$)- отклонение гипотезы H_0.

В общем случае о б л а с т ь ю о т к л о н е н и я (критической областью) G называется область, при попадании в которую статистической характеристики z (в нашем примере m) гипотеза H_0 отвергается

О б л а с т ь ю п р и н я т и я называется область, при попадании в которую статистической характеристики z нулевая гипотеза принимается.

Приведенные положения иллюстрированы на рис. 4.1, где по оси абсцисс отложена критическая статистика m (в общем случае z), а по оси ординат - плотность ее распределения $f(m)$ или р которая в данном примере является дискретной величиной (в общем случае) $f(z)$.

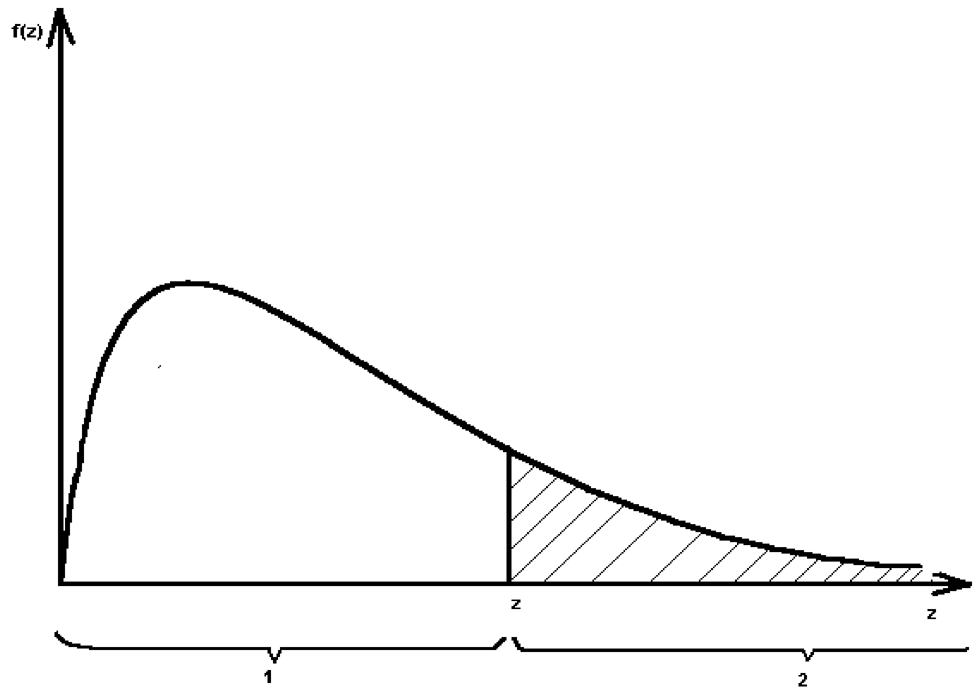


1 – область принятия нулевой гипотезы;

2 – область отклонения нулевой гипотезы (G)

Рисунок 4.1 - К вопросу о выборе статического критерия

Если бы в качестве примера рассматривали не дискретные случайные величины, а непрерывные (пример, размер детали), то аналогично рассуждая пришли бы к непрерывной плотности распределения критической статистики. Это положение иллюстрируется на рис. 4.2 где z_2 – статистический критерий (по аналогии с критерием k на рис. 1)



1 – область принятия нулевой гипотезы;
2 – область отклонения нулевой гипотезы

Рисунок 4.2 - Непрерывная плотность распределения критической статистики

4.1.3 Ошибки первого и второго рода. Риск поставщика и риск заказчика

Поскольку критическая статистика является случайной величиной (со своим законом распределения), то, анализируя рис. 4.2, можно утверждать, что при проверке статистической гипотезы всегда существует риск совершить ошибку, которая соответствует площади (α) заштрихованной фигуры на рис. 4.2 . Более того, всегда есть риск образовать на столько неудачную выборку, что информация, содержащаяся в ней, окажется совершенно ложной. (В выше приведенном примере такая ситуация может получиться, если в выборке окажется бракованных деталей больше k, а во всей партии на самом деле в процентном отношении бракованных деталей значительно меньше). Однако, не отрицая возможности совершая ошибки, теория статистической проверки гипотез позволяет вычислить ее вероятность (на рис. 4.2 эта вероятность α); тогда, если эта вероятность достаточно мала, говорят, что данный критерий обозначает малый риск совершения ошибки. По существу область принятия есть доверительный интервал для статической характеристики *Z* с доверительной вероятностью $1-\alpha$.

Вероятность α еще называют уровнем значимости. Другими словами, область отклонения *G* выбирают так, чтобы вероятность попадания в нее статической характеристики Z, при условии, когда нулевая гипотеза верна, равнялась уровню значимости α. То есть, область отклонения удовлетворяет условию

$$P(z \in G : H_1) = \alpha,$$

где P – символ вероятности.

На первый взгляд кажется, что нам нужно выбирать уровень значимости α всегда как можно меньше, но в действительности это не так. Дело в том, что про проверке гипотезы можно совершить одну из двух ошибок – либо отвергнуть гипотезу, когда она верна (эта ошибка называется ошибкой первого рода или риском постановщика (α), либо принять гипотезу, когда она ложная (ошибка второго рода или риск заказчика (β). При уменьшении ошибки первого рода α всегда увеличивается ошибка второго рода β. На практике обычно выбирают α =0,05 или α =0,10.

В некоторых задачах проверки статистических гипотез необходимо установить не одностороннее ограничение z_α, как это показано на рис. 4.2, а двухстороннее, - как это показано на рис. 4.3. То есть, вся область мыслимых значений случайной величины *Z* разделяют на три части: 1 – область неправдоподобно малых значений; II – область естественных (или вероятных) значений; III – неправдоподобно больших значений. Обычно $Z^{\min}$ и $Z^{\max}$ выбирают из условия, что площади слева от $Z^{\min}$ и справа от $Z^{\max}$ под кривой плотности распределения *f(z)* были бы равны между собой и каждая составляла бы α/2 (см. рис. 4/3.)

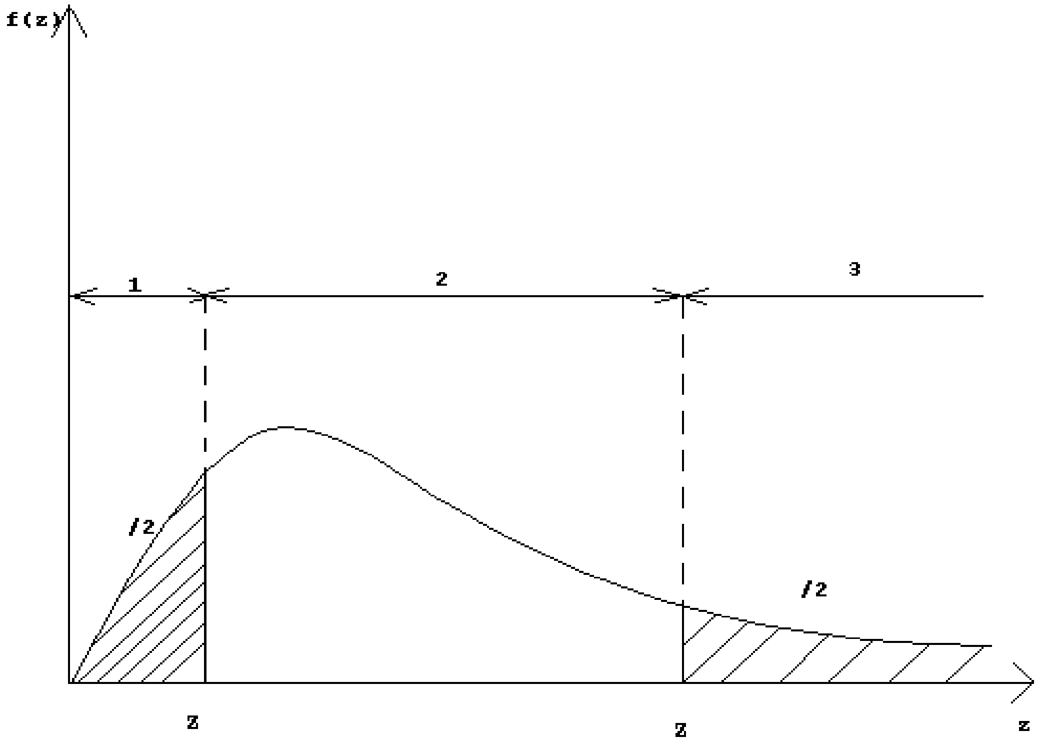


Рисунок 4.3 - Двухстороннее ограничение критической статистики.

4.1.4 Статистические характеристики

В пункте 4.1.2. была рассмотрена простейшая статистическая характеристика (m), которая, однако, при более углубленном изучении этого вопроса не всегда является достаточной характеристикой для решения задач статистической проверки гипотез. Но она была введена для упрощения понимания сути вопроса. В действительности применяют специально разработанные статистические характеристики, причем для различных задач – свои характеристики. В дальнейшем рассмотрим такие статистики, как Стьюдента, Фишера, Пирсона, Смирнова и другие, причем в теории вопроса получения этих статистик и доказательства их примерности мы вдаваться не будем. Желающие более подробно ознакомиться с этим вопросом отсылаем к специальной литературе, например [3].

Статистические критерии по статистикам Стьюдента, Фишера, Кохрена и т.п. заранее рассчитаны для различных уровней значимости и приведены в обширной литературе по статистике, например, в работе [5]. В приложении Г приведены некоторые из этих таблиц, данных из которых достаточно для выполнения заданий.

Все гипотезы можно проверить по общей логической схеме, которая выглядит следующим образом.

1. Выдвигают предположение (гипотезу) H_0.

2. Задают величину уровня значимости α.

3. Выбирают критическую статистику Z (некоторую функцию от результатов измерений).

4. Из таблиц критической статистики находят 100(1-α/2) – процентную и 100(α/2) – процентную точки критической статистики: $z^{\min}_{\alpha/2}$ и $z^{\max}_{\alpha/2}$ в случае двух стороннего ограничения, либо 100(1-α) – процентную точку $z^{\min}_{\alpha}$ в случае одностороннего ограничения.

5. В функцию Z подставляют имеющиеся конкретные выборочные данные и подсчитывают ее численное значение. Если окажется, что это значение принадлежит области вероятностных значений Z, то нулевая гипотеза с вероятностью 1-α считаются не противоречащей данными наблюдениями. В противном случае делают вывод, что гипотеза H_0 является несостоятельной

4.1.5 Статистическая проверка гипотез при оценке резко выделяющихся членов выборки

На практике часто необходимо проверить следует ли отбросить подозрительный член выборки, который, например, может появиться вследствие описки или других причин.

Покажем методику проверки одним из наиболее простых методов с помощью так называемого r – критерия

1. Выдвигается гипотеза: H_0: x_1 (или x_n) принадлежит данной выборке, а его отличие от остальных членов выборки – случайно.

2. Назначается уровень значимости α.

3. Вычисляются следующие статистические характеристики:

$$r_{\min} = \frac{\hat{m}_x - x_1}{\hat{D}_x \sqrt{\frac{(n-1)}{n}}}, \qquad r_{\max} = \frac{x_n - \hat{m}_x}{\hat{D}_x \sqrt{\frac{(n-1)}{n}}}, \tag{4.1}$$

где m_x –оценка математического ожидания;

D_x – оценка среднего квадратичного отклонения;

n –количество экспериментальных данных.

4. Критическое значение $r_{\alpha,\max}$ ($r_{\alpha,\min}$) выбирают по таблице, приведенной в приложении Д для заданного уровня значимости и числа степеней свободы ν =n-2.

5. Если окажется, что $\left|r_{\alpha,\min}\left(r_{\alpha,\max}\right)\right| \geq r_\alpha$, то гипотеза отвергается и следует отбросить данное экспериментальное значение выборки.

Пример. Дана упорядоченная выборка: 207, 236, 245, 262, 265, 275, 292, 337, 300, 375.Проверим, не следует ли отбросить последний член выборки.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что последний член (375) принадлежит генеральной совокупности. Назначаем уровень значимости α =0,05. Вычисляем математическое ожидание и дисперсию.

Получаем m_z=279,4; $D^2{}_x$=2431; D_x=49,3.

Вычисляем характеристику r_{min} по формуле (4.1).

$$r_{\min} = \frac{375 - 249{,}4}{49{,}3 - \frac{10-1}{10}} = 2{,}044.$$

По таблице приложения Д находим для числа степеней свободы (10-2=8)критическое значение $r_{\alpha,\max} = 2{,}294$.

Поскольку $r_{\alpha,\min}$ =2,044< $r_{\alpha,\max}$ =2,294, то нулевая гипотеза принимается.

4.1.6 Проверка о законе распределения по методу Н,В, Смирнова

На практике част необходимо оценить, соответствуют ли наблюдаемая выборка какому-либо закону распределения.

При выборке по методу Н.В. Смирнова в качестве меры согласования теоретического и статического законов распределения используются функция разности статической и теоретической функции распределения. Проверка гипотезы осуществляется следующим образом.

1. По внешнему виду (на графике) функции распределения выдвигается нулевая гипотеза, что распределение подчиняется закону *F(x)* (например, нормальному).

2. Назначается уровень значимости α.

3. Вычисляется наблюдаемое значение критической статистики (показателя согласованности по формуле (4.2)).

$$\hat{u} = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F_{\hat{x}}(x_i) - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right]^2 ,$$

где n – количество экспериментальных точек;

$F_x(x_i)$ – теоретическое значение исследуемой функции распределения при параметрах распределения (m_x и D_x), найденных из эксперимента;

i – порядковый номер наблюдения в упорядоченной по возрастанию выборке.

Если проверяется нормальный закон распределения, то вместо функции $F_x(x_i)$ берется табличное значение нормированной нормальной функции распределения, то есть.

$$F_{\hat{x}}(x_i) = \varPhi\left(\frac{x_i - \hat{m}_x}{\hat{D}_x} \right). \tag{4.3}$$

Из таблицы 4.1 для уровня значимости α находят критерии u_α.

Таблица 4.1 - Значения критической границы по методу Смирнова

α	0,5	0,1	0,05	0,02	0,01
Uα	0,118	0,347	0,461	0,620	0,744

4. Проверяется условие $u < u_\alpha$. Если оно выполняется, то нулевая гипотеза принимается. Этот метод применяется, если выборка представлена отдельными экспериментальными точками.

Пример. Дана упорядоченная выборка: 190, 245, 265, 300, 32-0, 325, 370, 400. Требуется проверить нулевую гипотезу о соответствии этой выборки нормальному закону распределения.

Решение. Выбираем уровень значимости 0,05. Рассчитываем математическое ожидание и дисперсию: m_x=302, $D^2{}_x$=4500, D_x=67.

По формуле (4.3) и по таблице нормального распределения находим теоретическое значение функции распределения.

$$\Phi_1\left(\frac{190-302}{67}\right) = \Phi(-0,67) = 0,04746;$$

$$\Phi_2\left(\frac{245-302}{67}\right) = \Phi(-0,85) = 0,1977.;$$

…

$$\Phi_8\left(\frac{400-302}{67}\right) = \Phi(1,46) = 0,92785.$$

Далее расчет ведем по формуле (4.2)

$$u = \frac{1}{12\cdot 8} + \left[0,04746 - \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 8}\right]^2 + \left[0,1977 - \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 8}\right]^2 + \ldots. +$$

$$+\left[0,92785 - \frac{2\cdot 8-1}{2\cdot 8}\right]^2 = 0,0104+0,000226+0,000104+\ldots+0,00093=0,113.$$

В таблице 4.1 находим $u_{,05}$=0,461.

Поскольку u=0,113<$u_{0,05}$=0,461, то нулевая гипотеза принимается, а именно, что выборка не противоречит закону распределения с вероятностью 95%.

4.1.7 Проверка гипотез о законе распределения по методу К. Пирсона.

В этом методе мерой расхождения теоретического и статистического законов распределения служит сумма квадратов разностей между частотой и вероятностью попадания случайной величины в интервале, на которые разбиваются множество возможных значений этой величине.

Проверка гипотезы применительно к нормальному закону распределения осуществляется следующим образом

1. Так же, как и в подразделе 4.1.6. выдвигается гипотеза H_0, что статистический закон подчиняется нормальному закону распределения.

2. Выбирается уровень значимости α.

3. Наблюдаемые значения случайной величины разбиваются наl интервалов и вычисляют показатель согласованности по следующей формуле

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{l} \frac{n(h_j - p_j)^2}{p_j}, \qquad (4.4)$$

где h_j частота, p_j – вероятность попадания случайной величины в j-й интервал, или по следующей формуле, которая получается из формулы (4.4):

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{l} \frac{m^2{}_j}{np_j} - n, \qquad (4.5)$$

где m_j – число наблюдений, попавших в j-й интервал.

Вероятность P_j попадания случайной величины X, следующей гипотетическому закону распределения, в j-й разряд (интервал) вычисляется следующим образом

$$P_j = P\left(x_j < X < x_{j+1}\right) = F_{\hat{x}}\left(x_{j+1}\right) - F_{\hat{x}}\left(x_j\right),$$

где $F_{\hat{x}}$ – теоретический закон распределения с параметрами (m_x и D_x), получения из эксперимента.

Для нормального закона распределения формулу (4.5) можно переписать так:

$$\text{P}_\text{j}= P_j = \Phi\left(\frac{x_{j+1}-\hat{m}_x}{\hat{D}_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_j-\hat{m}_x}{\hat{D}_x}\right) \quad . \tag{4.6}$$

4. Критическая граница u_α для нормального закона распределения ищется по таблице χ^2 (распределение Пирсона) с (l-3) степенями свободы. То есть для нормального закона распределения $u_\alpha = \chi^2$. Распределение χ^2 приведено в лабораторной работе по надежности «Доверительные интервалы».

5. Проверяется условие $u < u_\alpha$. Если оно выполняется, то расхождение между экспериментальными данными и гипотезой полагают несущественным. В противном случае гипотезы H_0 отвергается.

Примечание. Если бы проверяли соответствие экспериментальных данных нормальному закону распределения, у которого вместо оценок m_x и D_x стояли бы произвольные числа, то количество степеней свободы следовало бы увеличить на две единицы и искать значение χ^2 с (l-3) степенями свободы.

Пример. Данные испытаний изделия представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 - Данные испытаний

Номер интервала	Интервал нагрузок	Количество отказавших изделий
1	10-15	2
2	15-20	5
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Требуется проверить гипотезу о том, что выборка не противоречит нормальному закону распределения с уровнем значимости 0,05.

Решение. Находим математическое ожидание и дисперсию, получаем m_x=22,26, $D^2{}_x$=29,71, D_x=5,45.

По формуле (4.6) подсчитываем теоретическую вероятность

$$P_1 = \Phi\left(\frac{15-22{,}26}{5{,}45}\right) - \Phi\left(\frac{10-22{,}26}{5{,}45}\right) = 0{,}09176 - 0{,}0125 = 0{,}07921;$$

$$P_2 = \Phi\left(\frac{20-22{,}26}{5{,}45}\right) - \Phi\left(\frac{10-22{,}26}{5{,}45}\right) = 0{,}3390 - 0{,}09176 = 0{,}24724;$$

………

$$P_5 = \Phi\left(\frac{35-22{,}26}{5{,}45}\right) - \Phi\left(\frac{30-22{,}26}{5{,}45}\right) = 0{,}99030 - 0{,}9222 = 0{,}0681.$$

По формуле (4.5) подсчитаем *u*.

$$\hat{u} = \frac{2^2}{21.0{,}07921} + \frac{5^2}{21.0{,}24724} + \ldots + \frac{2^2}{21.0{,}0681} - 21 = 0{,}957\,.$$

По таблице распределения Пирсона (см. лабораторную работу по надежности «Доверительные интервалы») для α=0,05 и числа степеней свободы ν =*l*-*3*=5-3=2, где *l* – число интервалов, находим $u_\alpha = \chi^2_{0,05}$=5,991.

Поскольку u=0,957<$u_{0,05}$=5,991, то делаем заключение, что выборка не противоречит нормальному закону распределения.

4.1.8 Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий из нормально распределенных генеральных совокупностей.

Прежде, чем сравнивать между собой две выборки (например, на равенство средних), необходимо убедиться, что дисперсия этих двух выборок равны между собой (не отличаются) в статистическом смысле. Такая проверка делается с помощью критерия Фишера.

1. Выдвигается гипотеза H_0: $D^2_{x1}=D_{x2}$.
2. Выбирается уровень значимости α.
3. Критической статистикой служит следующая функция.

$$F = \frac{\hat{D}^2_{x1}}{\hat{D}^2_{x2}}, \qquad \text{если} \qquad D^2_{x1} > D^2_{x2}$$

$$F = \frac{D^2_{x2}}{D^2_{x1}}, \qquad \text{если} \qquad D^2_{x1} < D^2_{x2}. \qquad (4.7)$$

4. Критическое значение статики F_α соответствует распределению Фишера с $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$ степенями свободы.

5. Таблица распределения Фишера приведена в приложении Е, где сверху указаны степени свободы большей дисперсии, (ν_1), а слева – степени свободы меньшей дисперсии (ν_2).

Пример. На заводе выпускаются изделия. Контролируются некоторые свойства этого изделия. В феврале было проведено n_1=14 изделий, а в марте n_2=10. По результатам подсчета были получены соответственно дисперсии свойств $D^2{}_1$=16,4 и $D^2{}_2$=22,5.Проверить, ухудшилось ли качество изделий в статическом смысле.

Решение. Выдвигаем гипотезу H_0: $D^2{}_1 = D^2{}_2$, назначаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Вычисляем по формуле (4.7) статистику F

$$\text{F}\,F = \frac{22{,}5}{16{,}4} = 1{,}37\,.$$

По таблице приложения Е для $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $\nu_1 = 10 - 1 = 9$ и $\nu_2 = 14 - 1 = 13$ (обращаем внимание на то, что ν_1 - число степеней свободы для числителя F, а ν_2 - для знаменателя) находим $F_{0,05}$=2,71.

Поскольку F=1,37<$F_{0.05}$=2,71, то гипотеза H_0 принимается, то есть значения, полученные по выборке, не противоречат утверждению о равенстве дисперсий $D^2{}_1$=$D^2{}_2$.

4.1.9 Проверка гипотезы о значении двух средних из нормально распределенных генеральных совокупностей.

Здесь рассматривается случай независимых выборок. На практике часто возникает необходимость сравнить, например, свойства материалов из двух партий (двух плавок, термообработок, двух методов измерений и т.п.). Пусть получены статистические характеристики m_{x1}, m_{x2}, и $D^2{}_{x1}$, $D^2{}_{x2}$, где цифры 1, 2 относятся к номерам партий. Проверка гипотезы о равенстве двух средних производится следующим образом.

1. Выдвигается гипотеза H_0: $m_{x1}=m_{x2}$.

2. Выбирается уровень значимости α.

3. Критической статистикой служит следующая функция выборочных данных.

$$t = \frac{\hat{m}_{x1} - \hat{m}_{x2}}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot \hat{D}^2{}_{x1} + (n-1)\cdot \hat{D}^2{}_{x2}}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \qquad (4.8)$$

где n_1 и n_2 соответственно количество экспериментальных точек в первой и во второй партиях.

4. Критическое значение статистики t_α ищется по таблице Стьюдента с $\nu = n_1 + n_2 - 2$, степенями свободы для уровня значимости α.

5. Рассчитанное значение t сравнивается с критическим t_α. При $|t| >= t_{\alpha,\nu}$ гипотеза H_0 отвергается, при $|t| < t_{\alpha,\nu}$ гипотеза H_0 принимается. В последнем случае говорят, что среднее значение выборок значимо не отличается в статическом смысле.

Если объем независимых выборок одинаково, то есть $n_1 = n_2 = n$, то формула (4.8) упрощается

$$t = \frac{\hat{m}_{x1} - \hat{m}_{x2}}{\sqrt{\hat{D}^2{}_{x1} + \hat{D}^2{}_{x2}}} \sqrt{n} \qquad (4.9)$$

Примечание. Таблица Стьюдента приведена в лабораторной по надежности «Доверительные интервалы». При пользовании этой таблицей следует учесть, что распределение Стьюдента симметрично и, следовательно, вместо уровня значимости α можно брать уровень $\gamma = 1 - \alpha$. То есть, например, отыскать критическое значение t при $\alpha = 0{,}05$, можно в столбце с обозначением $\gamma = 0{,}95$.

Пример. Проверяется чувствительность приборов, изготавливаемых на заводе. Первая проверка в 2009 году показала, что математическое ожидание чувствительности m_1=22,6 единицы и дисперсия $D^2{}_1$=11,8 при объеме выборки n_1=7 приборов. Вторая проверка, проведенная в 2010 году дала следующие результаты: m_2=24,2 и $D^2{}_2$=8,15 при n_2=6 приборов.

Необходимо проверить гипотезу: значимо ли отличаются средние значения из двух партий при уровне значимости 0,05.

Решение. Проводим расчет статистики Стьюдента по формуле (4.8).

$$t = \frac{22,6 - 24,2}{\sqrt{\dfrac{(7-1)\cdot 11,8 + (6-1)\cdot 8,15}{(7+6-2)}}}\sqrt{\frac{7,6}{7+6}} = 0,903.$$

Критическое значение t_α при $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $\nu = 7 + 6 - 2 = 11$ находим из упомянутой таблицы, оно составляет $t_{0,05,11}$=2,2.

Так как t=0,903<2,2=$t_{0,05,11}$, то делаем вывод, что средние чувствительности приборов значимо не отличаются.

В заключение отметим, что в данных методических указанных приведены методы проверки только некоторых гипотез. С другими гипотезами и методиками их проверки можно познакомиться в работе [1].

4.2 Задания

В качестве выборок результатов экспериментов использовать данные из вариантов заданий, выполненных в следующих лабораторных работах по надежности:

1. Построение эмпирической функции надежности.

2. Оценка надежности элементов ЛА при нормальном законе распределения.

По выборкам, представленным в методических указаниях к лабораторной работе 1, убедиться, что крайние члены упорядоченных выборок принадлежат генеральной совокупности. Провести проверку гипотезы о нормальном распределение выборки. Проверку гипотезы о резко выделяющихся членах выборки проводить только для вариантов заданий, в которых результаты экспериментов представлены в виде отдельных экспериментальных точек.

По выборкам, представленным в методических указаниях к лабораторной работе 2, проверить гипотезу о равенстве дисперсий и средних значений.

Проверку всех указанных гипотез рекомендуется проводить при уровне значимости 0,05.

4.3 Вопросы для контроля

1.Что такое нулевая статистическая гипотеза и что такое альтернативная гипотеза?

2.Что такое статистический критерий или критическая статистика?

3.Что такое критерий согласия или критическое значение статистики?

4.Что такое область отклонения и область принятия статистической характеристики? Приведите пояснения с помощью рисунков.

5.Что такое уровень значимости?

6. Что такое ошибка первого и ошибка второго рода? (Что такое риск поставщика и риск заказчика?) Приведите примеры.

7. Можно ли сколь угодно уменьшать уровень значимости? Что при этом происходит с ошибкой второго рода?

8. Что такое двухсторонние ограничения критической стьитистики и односторонние ограничения? Поясните с помощью графиков плотности статистик.

9. Назовите наиболее употребляемые статистики. Для какого рода задач они применяются?

10. Приведите общую логическую схему проверки статистических гипотез.

11. С какой целью делается проверка гипотезы о резко выделяющихся членов выборки?

12. С какой целью производится проверка гипотез о законе распределения?

13. Для какого типа выборок применяется критерий Н. В. Смирнова и для какого - критерий Пирсона? (Имеется в виду представление результатов в виде отдельных экспериментальных точек или в виде экспериментальных значений, разбитых на отдельные интервалы).

14.Для чего делается проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий и с помощью какого критерия?

15.С какой целю производится проверка гипотезы о равенстве двух средних и с помощью какого критерия?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

5 РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ТОЛКАТЕЛЯ

Цель занятия: закрепление навыков студентов в расчете надежности конкретных систем ракетно-космической техники (РКТ).

Задачи состоят в том, что студент, выполнивший работу должен:

знать определение последовательного и параллельного соединения элементов в смысле надежности;

знать отличие последовательного и параллельного соединения элементов в электрических и механических системах от последовательного и параллельного соединения элементов в смысле надежности;

уметь анализировать работу устройств по отказам и составлять структурную схему надежности системы;

уметь вычислять надежность системы при последовательном и параллельном соединении элементов;

уметь находить среднее время наработки и интенсивность отказов система по известным характеристикам элементов;

знать приближенные формулы расчета надежности и уметь ими пользоваться при расчете высоконадежных систем с экспоненциальным законом надежности.

5.1 Краткое описание электромеханического толкателя

Толкатель предназначен для перемещения рулона фотоплёнки. Кинематическая схема толкателя представлена на рис. 5.1.

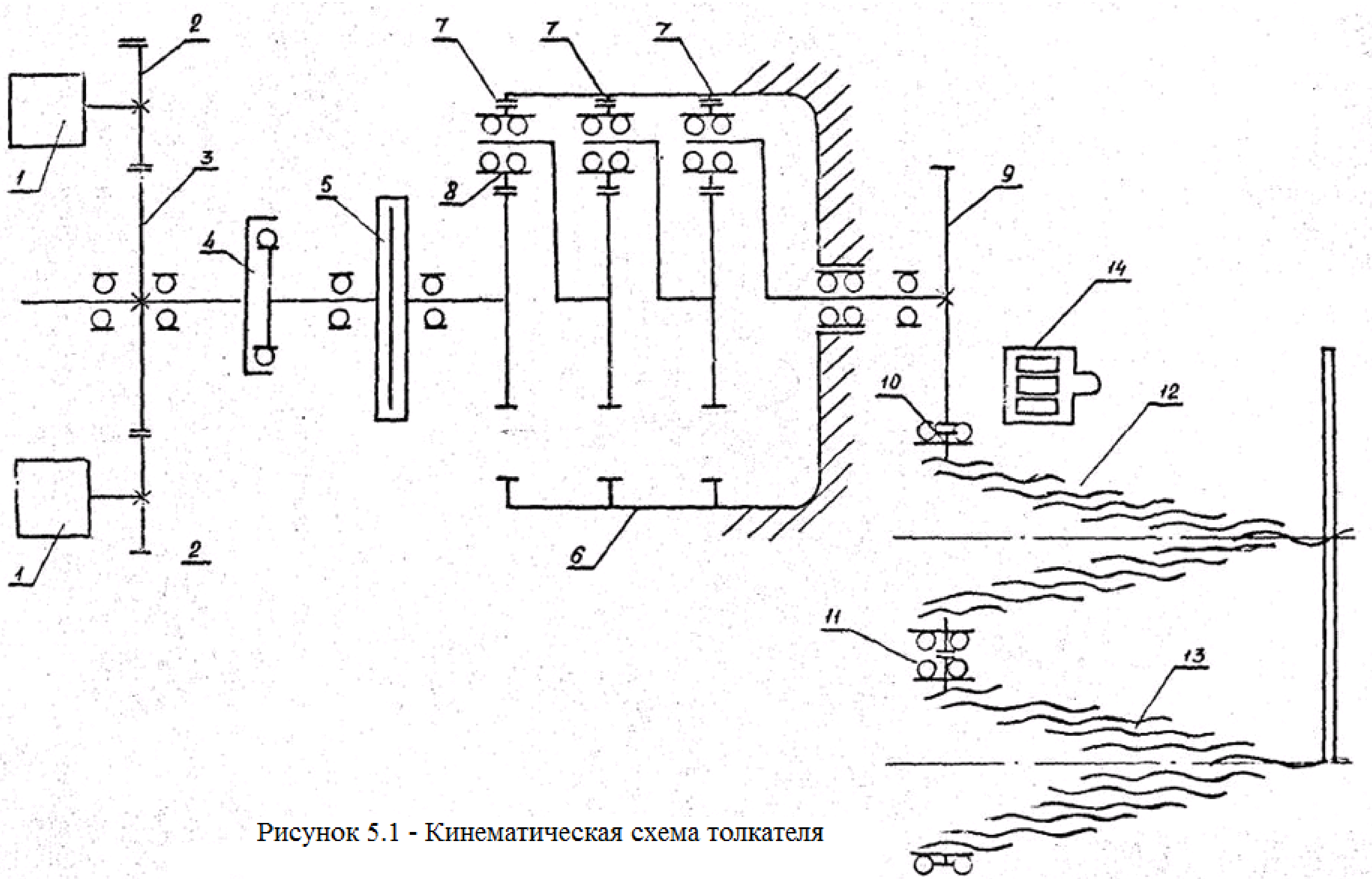


Рисунок 5.1 - Кинематическая схема толкателя

Электро-мехнический толкатель включает в себя: электропривод, сам толкатель и блок концевых переключателей (БКП) исходного положения.

В корпусе электропривода размещены:

два электродвигателя 1, на валах которых установлены шестерни 2;

паразитная шестерня 3;

предохранительная муфта 4;

двухсторонняя необратимая муфта 5;

планетарный редуктор 6;

Предохранительная муфта шарикового типа обеспечивает работу электродвигателей без перегрузки в случае увеличения усилия на толкателе выше допустимого.

Двухсторонняя необратимая муфта роликового типа обеспечивает удержание толкателя от перемещения при действия на него внешней нагрузки при обесточенных электродвигателях.

Планетарный редуктор имеет три ступени 7, в каждой из которых имеется по три шестерни 8, расположенных равномерно по окружности.

На выходном валу планетарного редуктора закреплена шестерни 9, которая приводит в движение шестерни 10 и 11 толкателя.

Толкатель представляет собой винтовой телескопический механизм и состоит из двух наборов штоков: один с правой наружной и внутренней резьбой (12), другой - с левой наружной и внутренней резьбой (13). При заклинивании винтовых пар одного из толкателей весь механизм отказывает.

Исходное положение толкателя определяется срабатыванием блока концевых переключателей (БКП) 14, конечное - механическим упором.

Блок концевых переключателей состоит из трёх выключателей, включенных в электрическую схему с логикой "не менее два из трех". То есть, БКП выдаёт информацию об исходном положения толкателя, если срабатывает не менее двух выключателей из трех.

На схеме также показано расположение подшипников качения. Считается, что при разрушении подшипников происходит заклинивание электромеханического толкателя. Возможными отказами зубчатых передач являются заклинивания.

Согласно техническому задано дано:

время одного цикла работы толкателя 0,11 часов;

время эксплуатации толкателя в составе изделия 120 суток;

количество циклов штатной работы толкателя n . (В данной работе для каждого студента свое количество циклов).

5.2 Задания

Оценить показатель надёжности и среднее время наработки до отказа толкателя при количестве циклов штатной работы толкателя, представленном в таблице 5.1. При расчете принять, что надежность составляющих элементов подчиняется экспоненциальному закону.

Таблица 5.1 – Варианты заданий

Нсмер зада-ния	Количество циклов, n	Номер зада-ния	Количество циклов n	Номер зада-ния	Количество циклов, n
I	22	11	1000	21	11000
2	100	12	2000	22	I20O0
3	200	13	3000	23	13000
4	300	14	4000	24	14000
5	400	15	5000	25	15000
6	500	16	6000	26	16000
7	600	17	7000	27	17000
8	700	18	8000	28	18000
9	800	19	9000	29	19000
10	900	20	10000	30	

5.3 Указания к выполнению работы

В соответствия с кинематической схемой толкателя (рас. 5.1) и логикой работы толкателя составить структурную схему надежности. В структурной схеме принять следующие обозначения:

МI, М2- электродвигатели;

МП - муфта предохранительная;

МТ -муфта тормозная;

ЗП - зубчатая передача;

Пп – подшипники привода;

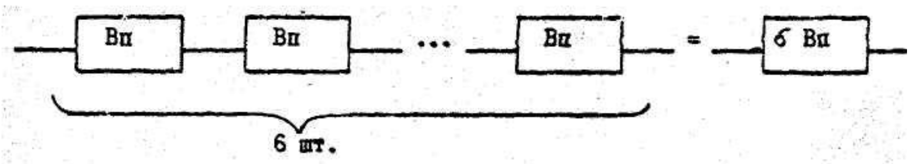
Вп - винтовая передача;

Пк - подшипники качения;

БКВ - блок концевых переключателей;

Вк – выключатель.

Допускается ври большом количестве одинаковых элементов, соединённых последовательно, изображать один элемент с цифрой перед буквенным обозначением элемента, показывающей количество данных элементов, например.



При определении надежности элементов следует учитывать возможность отказов не только во время рабочих циклов толкателя, но и во время их хранения. То есть каждый элемент может быть представлен в виде последовательного соединения двух фиктивных элементов: элемента во время работы толкателя и элемента во время хранения толкателя.

При определении среднего времени наработки толкателя (или элементов) до отказа необходимо учитывать только время работы толкателя без учета времени хранения.

Интенсивность отказов элементов при испытании в режиме номинальной нагрузки и повышенной температуры представлены в таблице 5.2. Интенсивность отказов элемента в режиме эксплуатации (при штатной работе элемента) λ_p есть произведение интенсивности отказов при испытании в режиме номинальной нагрузки $\lambda_н$ и коэффициента эксплуатации $k_э$, то есть

$$\lambda_p = \lambda_н \cdot K_э. \tag{5.1}$$

Таблица 5.2 - Интенсивность отказов элементов при испытании

Наименование элемента	Интенсивн. отказов $\lambda_н$,1/час	Коэффициент эксплуатации, $k_э$	Коэффициент, учит. Хранение $k_х$
I. Электродвигатели	$5{,}36 \cdot 10^{-6}$	0,3	$0{,}6 \cdot 10^{-3}$
2. Муфта предохранительная	$0{,}63 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}
3. Муфта тормозная	$0{,}4 \cdot 10^{-6}$	1	10^{-3}
4. Зубчатая передача	$0{,}2 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}
5. Подшипники привода	$0{,}2 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}
6. Винтовая передача	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}
7' Подшипника качения	$0{,}2 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}
8, Блок концевых переключателей	$0{,}63 \cdot 10^{-6}$	I	10^{-3}

Аналогично интенсивность отказов элементов в режиме хранения (при бездействии элементов) определяется произведением интенсивности отказов при испытании в режиме номинальной нагрузки $\lambda_н$ и коэффициента, учитывающего хранение $k_х$, то есть

$$\lambda_х = \lambda_н \cdot K_х. \tag{5.2}$$

Время работа толкателя t_p определяется, исходя из времени работы одного цикла толкателя t_1 и количества всех циклов работы n:

$$t_p = t_1 \cdot n. \tag{5.3}$$

Время хранения $t_х$ рассчитывается как разность между временем штатной эксплуатации изделия $t_э$ и временем работы толкателя

$$t_х = t_э - t_р.$$

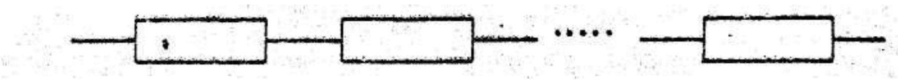
5.4 Некоторые сведения из теории надежности систем

под системой понимают любое устройство, состоящее из элементов, надёжность которых известна.

Элементы по надёжности могут быть соединены между собой в систему последовательно, параллельно и смешанно.

5.4.1 Последовательное соединение элементов

Последовательным соединением элементов по надежности называется такое соединение, при котором необходимым и достаточный условием безотказной работы системы является безотказная работа всех ее элементов. Графически последовательное соединение изображается следующим образом:



При последовательном соединении независимых по отказам элементов надежность системы определяется произведением показателей надёжности входящих элементов, то есть

$$H_c = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_N = \prod_{i=1}^{N} H_i, \qquad (5.5)$$

где H_c – показатель надежность системы;

H_i – показатели надежность входящих элементов;

N - количество элементов.

Если показатели надежности всех входящих элементов одинаковы и равны H то надежность системы выразится так:

$$H_c = H^N. \qquad (5.6)$$

При экспоненциальном законе надежности элементов

$$H_i = \exp(-\lambda \cdot t)$$

надежность системы, составленной из этих элементов последовательно также будет подчиняться экспоненциальному закону, т.е. справедливо следующее соотношение:

$$H_c = exp(-\lambda_c t). \tag{5.7}$$

При этом интенсивность отказов системы λ_c будет равна сумме интенсивностей отказов составляющих элементов

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i. \tag{5.8}$$

Если один к и тот же элемент может отказать как в режиме работы, так и в режиме хранения, то его можно представить в виде двух фиктивных элементов, последовательно соединенных, и показатель надёжности подсчитывается следующим образом:

$$H = exp[-(\lambda_p t_p + \lambda_x t_x)]. \tag{5.9}$$

Для высоконадежных элементов допустило пользоваться приближёнными зависимостями при подсчете надежности:

$$H = exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t, \tag{5.10}$$

а вместо формулы (5.9) будет следующее соотношение

$$H = 1 - (\lambda_p t_p + \lambda_x t_x). \tag{5.11}$$

Надёжность системы при N одинаковых по надёжности элементах, соединенных последовательно, соответственно составит

$$H_c = 1 - N\lambda t \tag{5.12}$$

и

$$H_c = 1 - N(\lambda_p t_p + \lambda_x t_x). \tag{5.13}$$

Среднее время наработки системы $t_{ср.с}$ при последовательном соединении элементов по надежности определяется следующий образом

$$t_{ср.с} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{t_{ср.1}} + \frac{1}{t_{ср.2}} + \dots + \frac{1}{t_{ср.N}} \right), \tag{5.14}$$

где $t_{ср.i}$ - среднее время наработки до отказа i -го элемента. Для одинаковых элементов имеем

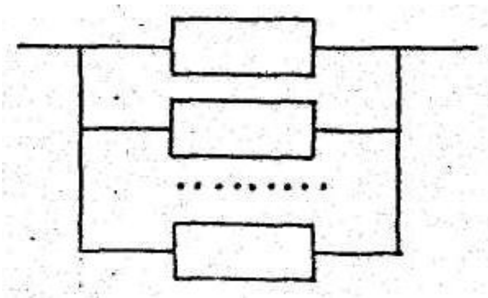
$$t_{ср.с} = \frac{t_{ср}}{N}, \tag{5.15}$$

где $t_{ср}$ - среднее время наработки до отказа элемента.

Напомним, что формулы (5.7) и (5.9) - (5.15) справедливы для экспоненциальных законов надежности входящих в систему элементов.

5.4.2 Параллельное соединение элементов

Параллельным соединением элементов по надежности называется такое соединение, при котором необходимым и достаточным условием отказа системы является отказ всех ее элементов. Графически параллельное соединение изображается следующим образом:



При параллельном соединении независимых по надежности элементов надежность системы определяется по следующей зависимости:

$$H_c = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - H_i), \tag{5.16}$$

где H_i – показатели надёжности входящих в систему элементов.

Если все элементы имеют один и тот же показатель надёжности H, то

$$H_c = 1 - (1 - H)^N. \tag{5.17}$$

Если к тому же функция надежности входящих элементов подчиняется экспоненциальному закону, то

$$H_c(t) = 1 - [1 - exp(-\lambda t)]^N. \tag{5.18}$$

Для высоконадёжных систем вместо формулы (5.18) можно пользоваться следующим приближенным выражением

$$H_c(t) = 1 - (\lambda t)^N. \tag{5.19}$$

Если необходимо учесть, что один и тот же элемент может отказать как в режиме работы, так и в режиме хранения, то для высоконадежных элементов можно записать

$$H_c(t) = 1 - (\lambda_p t_p + \lambda_x t_x)^N. \tag{5.20}$$

Среднее время наработки системы с параллельно соединенными одинаковыми элементами, подчиняющимися экспоненциальному закону надежности, вычисляется следующим образом

$$t_{ср.с} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}\right), \tag{5.21}$$

где λ - интенсивность отказов элементов;

N - количество элементов.

Следует отметить, что интенсивности отказов не складываются при параллельном соединении элементов.

5.4.3 Надежность системы по схеме «не менее *m* из *N*»

В некоторых системах для безотказной работы требуется безотказная работа не менее m элементов из имеющихся N элементов системы. В этом случае при одинаковых элементах надежность определяется с привлечением биномиального закона распределения случайных величин:

$$H_c = \sum_{x=m}^{N} C_N^x H^x (1-H)^{(N-x)}, \qquad (5.22)$$

где C_N^x - число сочетаний из N по x , которое определяется следующим образом:

$$C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!}$$

В частном случае для системы "не менее 2 из 3-х" формула (5.22) привянет вид

$$H_c = 3H^2 - 2H^3, \qquad (5.23)$$

где Н - надежность элемента.

5.4.4 Особенности построения структурных, схем надежности

Структурная схема является графическим образом системы, она отражает ее структурные свойства, то есть методы соединения элементов. При этом понятие соединения в структурных схемах отличается от аналогичного понятия в электрических схемах и конструкциях и отображает не фактическое соединение, а лишь условную связь. Например, пробой одного из двух конденсаторов, включенных в работу параллельно (рис. 5.2а) приводит к отказу всей группы конденсаторов. В этом случае элементы в структурной схеме надежности должны быть соединены последовательно

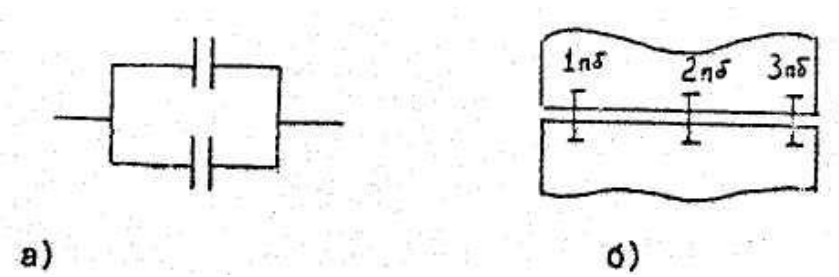


Рисунок 5.2 - К вопросу построения структурных схем надежности

Обрыв же цепа в одном из конденсаторов не всегда может привести к отказу системы. В этом случае в структурной схеме надёжности элементы должны быть соединены параллельно. (Следует отметить, что отказы в этом случае уже не будут независимыми).

Рассмотрим еще один пример. Проанализируем работу пироболтов, соединяющих части летательного аппарата (рис. 5.2*б*). До момента разделения болты можно считкть соединенными в смысле надежности параллельно, так как отказ системы наступит, если все болты откажут (в данном случае самопроизвольно сработают). Если же рассматривать момент разделения, то болты в структурной схеме надежности следует соодинить последовательно, так как для безотказной работы системы разделения должны безотказно работать (разорваться) все болты.

Чтобы по структурной схеме можно было рассчитать надежность системы, то есть записать функцию надежности системы, структурную схему разбивают на такие части, в которых элементы соединены толь ко последовательно или только параллельно, и рассчитывают надёжность этих частей.. Затем определяют как соединены частим между собой (последовательно или параллельно) и рассчитывают надёжность этиж более крупных частей. И так объединяют все части в более крупные, пока не будет рассчитана вся система.

5.6. Вопросы для контроля

1. Расскажите о работе толкателя по кинематической схеме.
2. Дайте характеристики отказов элементов.
3. Дайте определение последовательного и параллельного соединения элементов в смысле надежности.
4. В чем отличие последовательного и параллельного соединения элементов в смысле надежности системы от последовательного и параллельного соединения элементов в электрических и механических схемах?
5. Приведите формулы вычисления надежности системы при

последовательном и параллельном соединении элементов.

6. Чему равно среднее время наработки и интенсивность отказов системы при последовательном соединении элементов ?

7. Чему разно среднее время наработки системы при параллельном соединении одинаковых элементов с экспоненциальным законом надежности?

8. Приведите формулы функции надежности системы при последовательном и параллельном соединении элементов с экспоненциальным законом надежности.

9. Приведите приближенные формулы для расчета высоконадежных систем.

10. Как определить функцию надежности элемента, если он может отказать как во время работы, так и во время хранения, если принять закон изменения надежности экспоненциальным

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

6 ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ СИСТЕМ БЕЗУДАРНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Цель занятия: уяснение сущности методе статистических испытаний и закрепление навыков студентов в применении этого метода для оценки надежности простейших систем безударного разделения ракетно-космической техники (РКТ).

Задачи состоят в том, что студент, выполнивший работу должен:

С этой целью студент должен:

уметь сформулировать критерий безударного разделения частей конструкций РКТ;

уметь составлять дифференциальные уравнения движения разделяющихся частей РКТ;

понять смысл метода статистической линеаризации и метода статистических испытаний;

знать сущность метода получения нормированной случайной величины с нормальным законом распределения по случайной величине с равномерным законом распределения плотности случайной величины;

уметь рассчитать реализацию случайной величины с нормальным законом распределения и заданными моментами по реализации нормированной случайной величины с нормальным законом распределения;

уметь с помощью полученных реализаций случайных величин по известной модели движения частей ЛА вычислить значений величин, характеризующих параметры отделения, и обрабатывать полученные результаты методами статистики;

знать отличия модифицированного метода статистических испытаний от обычного метода статистических испытаний.

6.1 Надежность безударного отделения элементов РКТ

6.1.1 Основные положения

В общем случае пространственного движения разделяемых масс параметрами состояния являются относительные линейные и угловые скорости и перемещения как случайные функции времени. Математическая формулировка задачи запишется следующим образом:

$$H = P\left(x_i > L_i;\, \dot{x}_i > V_i\right), \tag{6.1}$$

где P - символ вероятности;

x_i и $\dot{x}_i$ - обобщенные перемещения и обобщенные скорости отделяемых частей ЛА (как линейные, так и угловые);

L_i и V_i - ограничения.

В общем случае постановка и решение задач оценки надежности безударного разделения с учетом пространственного линейного и углового движений отделяемых частей летательного аппарата с учетом действия аэродинамических сил требует составления системы дифференциальных уравнений движения и их использования в качестве оператора связи между входными и выходными параметрами. Решение такого рода задач возможно, например, методом статистических испытаний, который рассматривается в следующем подразделе. Для иллюстрации же возможностей метода линеаризации рассмотрим задачу безударного отделения в упрощенной постановке, то есть ограничимся рассмотрением вариантов разделения по одной координате и без вращения отделяемых частей.

Рассмотрим в качестве простейшего примера отделение головной части ракеты способом торможения ступени (см. схему на рис. 7.6). Как известно, этот способ нашел широкое применение в ракетной технике. Например, тормозные двигатели используются для разделения на ракете «Сатурн V».

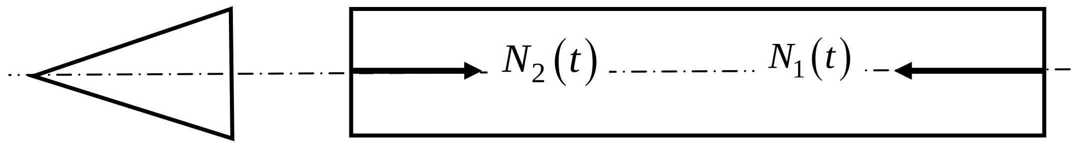


Рисунок 6.1 - Расчетная схема отделения головной части от ракетного бока

Примем следующую схему отделения. Подается команда на выключение ракетного двигателя. Тяга ракетного двигателя $N_1(t)$ падает не мгновенно и возникает так называемый импульс последействия, вследствие воздействия которого создается опасность догона ракетным блоком головной части и их соударения. Подается команда на включение тормозного двигателя, тяга которого $N_2(t)$ также изменяется во времени. Затем подается команда на отделение головной части.

В этом случае для обеспечения надежности безударного разделения достаточно, чтобы скорость относительного движения отделяемых частей была больше нуля: $\dot{X}_i > 0$. Тогда за показатель надежности можно принять вероятность того, что скорость относительного движения отделяемых частей была больше нуля:

$$H = P(\dot{X} > 0) = P(V > 0), \qquad (6.2)$$

где V – скорость отхода головной части от корпуса ракеты.

Для расчета скорости отхода головной части от корпуса ракеты составим дифференциальное уравнение продольного относительного движения ступени и головной части под действием суммарного воздействия тормозных двигателей $N_2(t)$ и основного двигателя $N_1(t)$. Схема действия сил в различные моменты процесса разделения представлена на рис. 6.2.

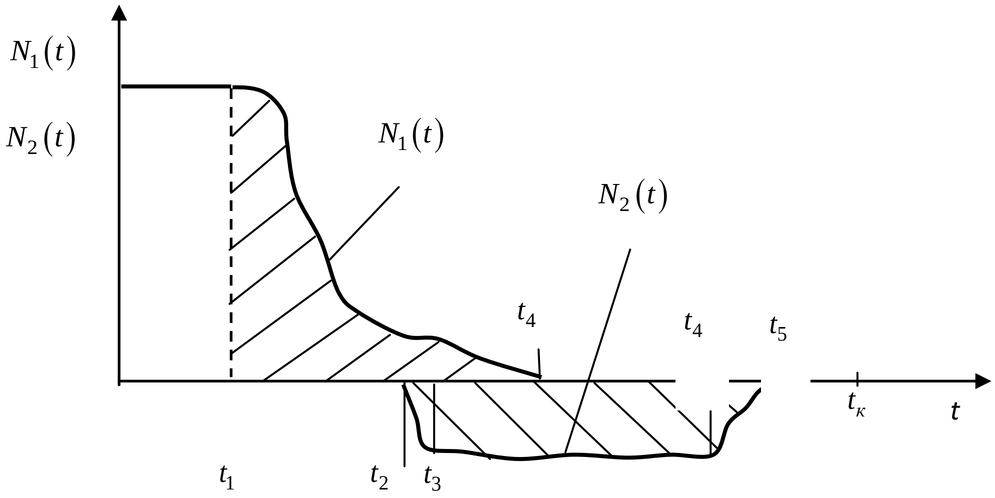


Рисунок 6.2 - Схема изменения действия сил во времени

Обе силы $N_1(t)$ и $N_2(t)$ – случайные функции времени и действуют на последнюю ступень ракеты массой М, которая также является случайной величиной вследствие допуска на массу конструкции, а главным образом – вследствие вариации остатков топлива.

Рассматриваемое относительное движение описывается уравнением:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{N_2(t) - N_1(t)}{M}.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$V_K = \frac{1}{M}\left[\int_0^{t_K} N_2(t)dt - \int_0^{t_K} N_1(t)dt\right], \qquad (6.3)$$

где $t_к$ – время, соответствующее окончанию действия всех сил.

Здесь величина *M* вынесена из под знака интеграла потому, что изменение массы за время (0, $t_к$) мало по сравнения с изменением сил $N_1(t)$ и $N_2(t)$ на том же промежутке времени.

Введем следующие обозначения:

$Q = \int_0^{t_K} N_1(t)dt$ - импульс последействия двигателей ракеты;

$I = \int_0^{t_\kappa} N_2(t)\,dt$ - импульс последействия тормозных двигателей.

Тогда выражение (7.11) приобретает вид:

$$V_\kappa = \frac{1}{M}\left[I - Q\right]. \qquad (6.4)$$

Таким образом, конечная относительная скорость V_κ разделяемых частей является известной функцией трех независимых случайных величин: *M, I* и *Q*.

6.1.2 Метод линеаризации

Будем считать, что известны математические ожидания m_M, m_Q, m_I и среднеквадратические отклонения D_M, D_Q, D_I случайных величин *M, I* и *Q*. Воспользуемся для определения математического ожидания m_V и среднеквадратичного отклонения D_V относительной скорости V_κ методом статической линеаризации. В результате получим следующие выражения:

$$m_V = \frac{m_I - m_Q}{m_M}; \qquad (6.5)$$

$$D_V^2 = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}\right)_m\right]^2 D_I^2 + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\right)_m\right]^2 D_Q^2 + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial M}\right)_m\right]^2 D_M^2, \qquad (6.6)$$

где через φ условно обозначена функция (6.4).

Индекс *m* показывает, что после расчета производной вместо переменных подставляются их математические ожидания: m_M, m_Q, m_I.

Найдем частные производные от функции φ, входящие в уравнение (6.6):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial I} = -\frac{1}{M}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial Q} = \frac{1}{M}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial M} = -\frac{I - Q}{M^2}.$$

Тогда уравнение (6.6) примет вид

$$D_V^2 = \frac{D_I^2}{m_M^2} + \frac{D_Q^2}{m_M^2} + \left(-\frac{m_I - m_Q}{m_M^2} \right)^2 D_M^2 .$$

Учитывая выражение (6.5) окончательно получаем

$$D_V^2 = \frac{1}{m_M^2}\left(D_I^2 + D_Q^2 + m_V^2 D_M^2 \right) . \qquad (6.7)$$

Таким образом, задача статистической динамики решена. Далее перейдем к определению надежности системы безударного отделения головной части от ракетного блока.

Показатель надежности системы разделения для условий нашей задачи определим с помощью метода расчета надежности как вероятностной прочности. Примем, что случайная величина скорости V подчиняется нормальному закону распределения и используем выражение. В этом выражении полагаем, что математическое ожидание обобщенной нагрузки и ее среднеквадратическое отклонение равны нулю, то есть $m_N = 0$ и $D_N = 0$, получаем

$$H = \Phi\left(\frac{m_V}{D_V} \right), \qquad (6.8)$$

где $\Phi(\cdot)$ – условное обозначение функции распределения нормированного нормального закона.

Пример. Пусть дано: m_M=1000 кг, D_M =50 кг, $m_I = 0{,}03\,MHc$, $D_I = 3000\,Hc$, $m_Q = 0{,}02\,MHc$, $D_Q = 4000\,Hc$. Определить надежность системы разделения по рассмотренной выше схеме.

Решение. Расчет производим по формулам (6.5) и (6.8) и получаем

$$m_V = \frac{m_I - m_Q}{m_M} = \frac{0{,}03 \cdot 10^6 - 0{,}02 \cdot 10^6}{1000} = 10\ \text{м}/c ;$$

$$D_V = \sqrt{\frac{1}{1000^2} \cdot \left(3000^2 + 4000^2 + 10^2 \cdot 50^2 \right)} = 5{,}003\ \text{м}/c ;$$

$$H = \Phi\left(\frac{10}{5,003}\right) = \Phi(1,98) = 0,9762$$
.

6.1.3 Метод статистических испытаний

Оценить надежность сложных систем с использованием простейших аналитических методов статической динамики (в том числе с помощью метода статистической линеаризации) не всегда представляется возможным, так как, например, дифференциальные уравнения аналитически могут не решаться или их решение представляет собой громоздкие выражения. Поэтому применяют другие методы.

Рассмотрим один из них: метод статических испытаний, или как его еще называют – метод Монте-Карло. Это один из методов решения задач статической динамики и применяется для исследования сложных задач, которым трудно применить аналитические методы.

Согласно этому методу в ЭВМ вводят числовые характеристики случайных величин входных параметров системы. В программе организуют цикл для определения случайных реализаций указанных величин с заданными законами распределения. С этими реализациями на каждом шаге цикла выполняют действия, предусмотренные оператором связи $y = \varphi(x)$. Причем в качестве оператора связи могут использоваться не только функции (см. метод линеаризации), но и дифференциальные уравнения, алгоритмические зависимости и т.п. В результате получают случайную реализацию выходного параметра системы. Набрав необходимое количество таких реализаций (согласно требуемой точности), определяют числовые характеристики (моменты) выходного параметра как случайной величины.

Последовательность действий при реализации метода статистических испытаний иллюстрируется на рис. 7.8 стрелками.

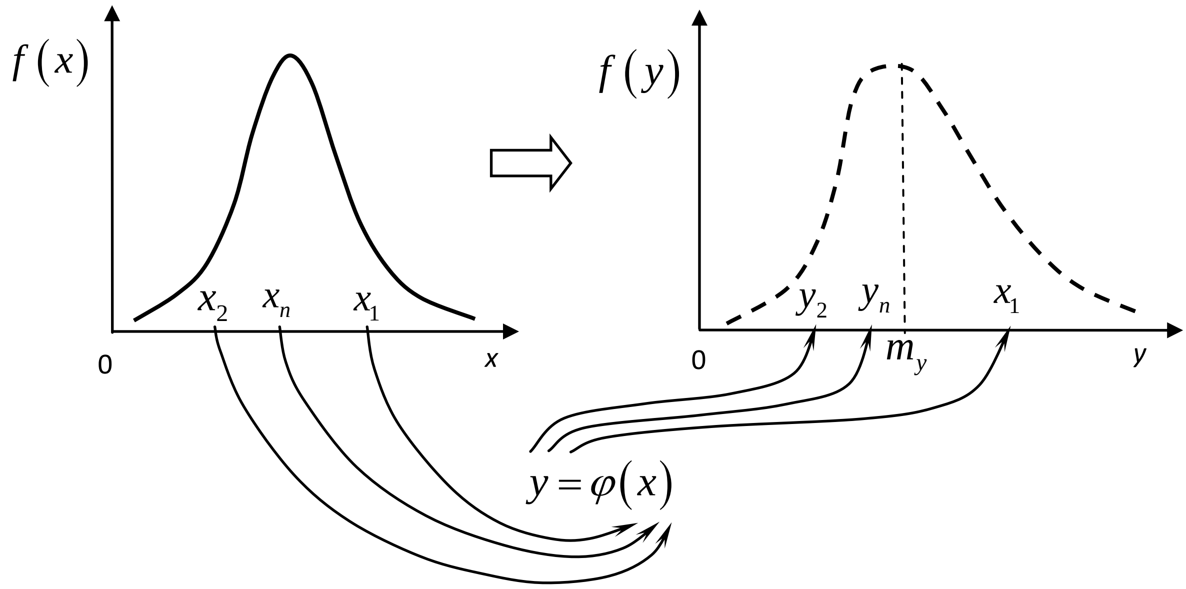


Рисунок 6.3 - Иллюстрация метода статистических испытаний

Реализация x_i случайной величины подставляется в оператор связи $y=\varphi(x)$ и получается реализация случайной величины y. После выполнения N статистических испытаний подсчитываются значения математического ожидания и дисперсии случайной величины y по обычным формулам статистики:

$$m_y = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N};$$

$$D_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - m_y\right)^2}{N-1}.$$

По реализациям случайной величины y можно построить и функцию плотности этой величины, как это схематично показано на рис. 6.3. пунктирной линией.

В этом методе обычно используют несколько тысяч статистических испытаний. Если вычисления по оператору связи требуют много машинного времени (например, когда эта связь выражена дифференциальными уравнениями, которые необходимо решать численными методами на каждом шаге), то в этом случае предпочтительнее использовать модифицированный метод статистических испытаний.

При модифицированном методе статистических испытаний полученные реализации выходного параметра разбиваются на разряды, строится гистограмма распределения, определяется теоретический закон распределения по гистограмме с применением методов математической статистики, и уже по теоретическому закону распределения находятся необходимые параметры, например, для аналитического определения надежности системы.

Прежде чем рассмотреть метод статистических испытаний применительно к задачам статистической динамики, решим вопрос о том, как получить на ЭВМ реализации случайных величин с заданными законами распределения.

6.1.4 Моделирование реализаций случайных величин на ЭВМ

Если можно аналитически выразить обратную функцию какого-то закона распределения, то реализация такого закона на ЭВМ не трудна. Пусть, например, имеем экспоненциальный закон распределения

$$F(x) = 1 - e^{-ax},$$

где a - параметр распределения.

Обратная функция будет следующей:

$$x = -\frac{\ln(1-F)}{a}. \tag{6.9}$$

Теперь, если вызывать реализации случайного числа Z с равномерным законом распределения на отрезке [0, 1] и подставлять их в уравнение (6.9) вместо значения F, то мы получим реализации случайного числа x с экспоненциальным законом распределения.

В том случае, если аналитически выразить обратную функцию какого-то закона распределения не удается, для реализации на ЭВМ случайных величин с данным законом распределения используется индивидуальный подход.

Рассмотрим один из таких индивидуальных подходов на примере моделирования случайных величин с нормальным законом распределения.

Моделирование основано на одной из центральных предельных теорем теории вероятностей, в которой говорится о том, что если на объект действует множество случайных величин с произвольными законами распределения, и эти величины не слишком выделяются по значению друг от друга (нет превалирующих), то результирующий закон стремится к нормальному закону.

Поэтому обычно берут несколько реализаций случайной величины с равномерным законом распределения, складывают их и получают реализацию случайного числа с нормальным законом распределения. Однако, чтобы получать реализации еще и с заданными характеристиками математического ожидания и дисперсии, необходимо определенным образом организовать этот процесс. Покажем, как это делается.

Известны свойства равномерного закона распределения:

$$m_x = \frac{a+b}{2};$$

$$D_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

где a и b - начальное и конечное значение интервала, на котором имеется равномерное распределение случайной величины.

Если a = 0 и b = 1, то эти выражения принимают вид:

$$m_x = \frac{1}{2}; \tag{6.10}$$

$$D_x^2 = \frac{1}{12}. \tag{6.11}$$

Для получения реализации нормального закона распределения с нормированным нормальным законом распределения используем следующую вспомогательную функцию:

$$z = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6, \tag{6.12}$$

где x_i - реализации случайной величины с равномерным законом распределения на отрезке [0, 1].

Нормальный закон распределения получается благодаря тому, что складываются 12 чисел с равномерным законом распределения, а нормированный нормальный закон - благодаря тому, что от суммы реализаций отнимается детерминированное число 6.

Покажем, что с использованием этой функции действительно получается нормированный нормальный закон.

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины у, учитывая выражения (6.10) и (6.11):

$$M[z] = m_z = M\left[\sum_{i=1}^{12} x_i - 6\right] = M\left[\sum_{i=1}^{12} x_i\right] - M[6] =$$

$$= \sum_{i=1}^{12} M[x_i] - 6 = \sum_{i=1}^{12} m_x - 6 = 6 - 6 = 0;$$

$$D^2[z] = D_z^2 = D^2\left[\sum_{i=1}^{12} x_i - 6\right] = D^2\left[\sum_{i=1}^{12} x_i\right] - D^2[6] =$$

$$= \sum_{i=1}^{12} D^2[x_i] - 0 = \sum_{i=1}^{12} D_x^2 = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины z равно единице, а дисперсия – нулю, что характерно для нормированной случайной величины.

Для получения реализации случайного числа y с нормальным законом распределения и с заданными характеристиками математического ожидания

m_y и дисперсии D_y^2 воспользуемся уравнением нормировки случайной величины

$$z = \frac{y - m_y}{D_y}$$

и найдем из него искомое случайное число y, которое имеет нормальный закон распределения с характеристиками m_y и D_y^2:

$$y = z \cdot D_y + m_y. \qquad (6.13)$$

Таким образом, для получения реализации случайного числа с нормальным законом распределения и заданными характеристиками математического ожидания m_y и среднеквадратическим отклонением D_y необходимо вызвать 12 реализаций случайного числа x_i с равномерным законом распределения на отрезке [0, 1], подставить их в формулу (7.20), а затем полученную реализацию случайной величины у (с нормированным нормальным законом распределения) подставить в уравнение (6.13).

Последовательность получения реализаций случайного числа с нормальным законом распределения изображена на рис. 6.4.

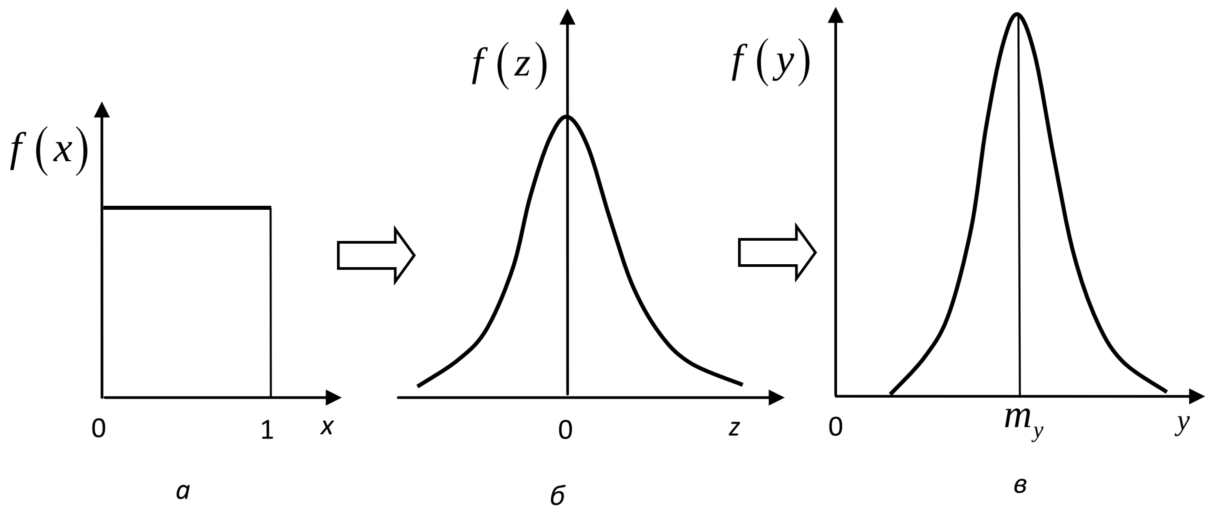


Рисунок 6.4 - Схема реализации нормального закона распределения

На этом рисунке представлены следующие схемы: а - равномерный закон распределения на отрезке [0, 1]; б - нормированный нормальный закон распределения; в - нормальный закон распределения с заданными характеристиками математического ожидания и дисперсии.

6.1.5 Программная реализация моделирования реализаций случайных величин с нормальным законом распределения

Блок схема реализации нормального закона распределения на ЭВМ приведена на рис. 7.10. Последовательность действий ясна из комментариев.

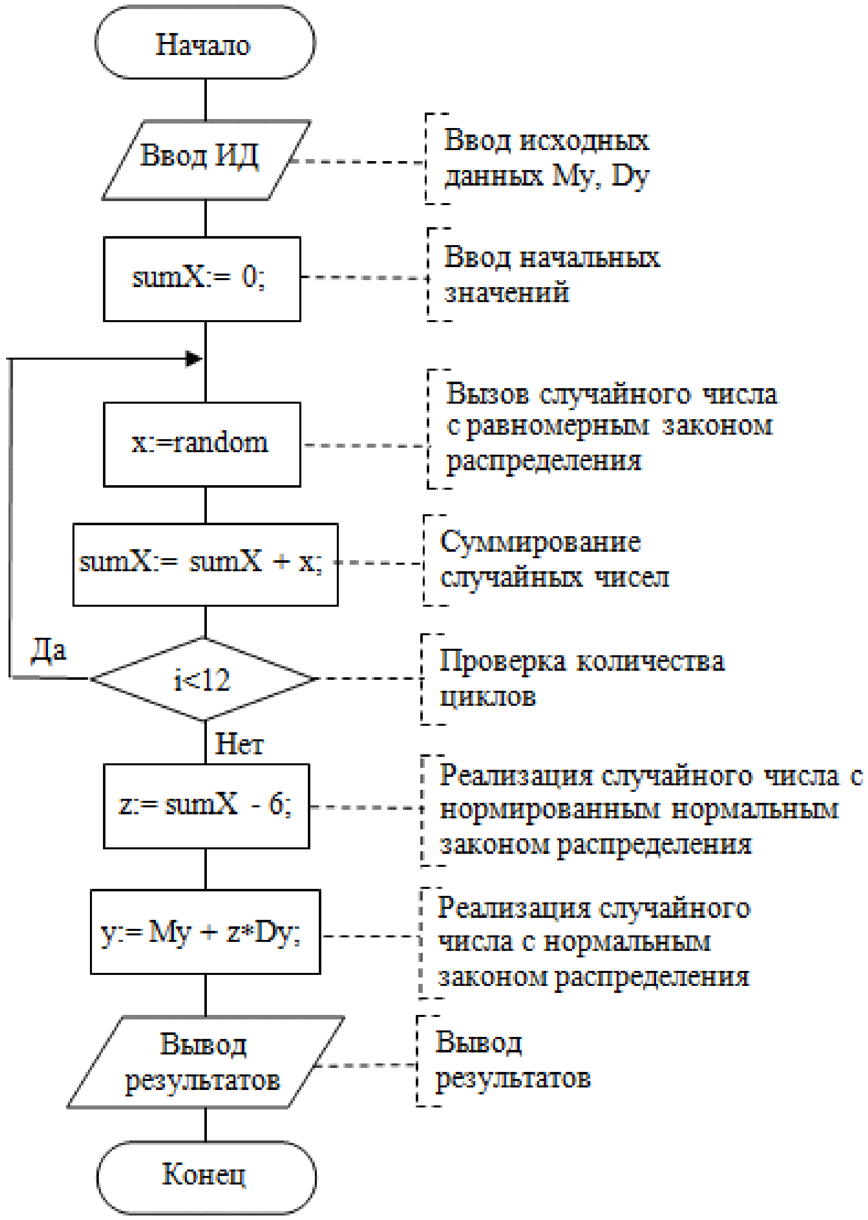


Рисунок 6.5 - Блок-схема реализации нормального закона распределения на ЭВМ

В программном исполнении на языке Object Pascal процедура реализации случайного числа с нормальным законом распределения будет выглядеть следующим образом:

```
Procedure Norm_Y(My, Dy: real; var y:real);
  var x, z, sumX:real;
  i:integer;
  begin
     sumX:= 0;
     Randomize;
     for i=1 to 12 do
       begin
          x:= Random;
          sumX:= sumX + x;
        end;
     z:= sumX - 6;
     y:= My + z*Dy;
  end;
```

Заметим, что в конце процедуры ставится точка с запятой, а не точка (как это принято в конце предложения).

Обозначения в этой процедуре похожи (но без индексов) с обозначениями, представленными в выражениях (6.12) и (6.13).

Оператор Randomize введен для лучшего «перемешивания» случайных чисел с равномерным законом распределения при каждой новой реализации. Это достигается с помощью использования параметра системного времени в качестве начальных значений псевдослучайной величины, создаваемой с помощью генератора случайных чисел.

6.1.6 Особенности использования метода статистических испытаний в задачах оценки надежности безударного разделения

Метод статистических испытаний, как упоминалось, годится для решения задач статистической динамики любой сложности. Тем не менее, чтобы не загружать учебный материал составлением, например, дифференциальных уравнений, при обсуждении которых может потеряться суть анализируемого метода, обсудим алгоритм решения задачи статистической динамики методом статистических испытаний на том же примере.

Следует отметить, что при оценке надежности безударного отделения методом статистических испытаний возможно несколько подходов:

- непосредственное вычисление показателя надежности по относительному количеству благоприятных исходов (в этом случае используется неявное решение задачи статистической динамики);

- определение показателя надежности в два этапа: сначала решается задача статистической динамики в явном виде (для определения математического ожидания и дисперсии выходной величины), затем подсчитывается аргумент функции распределения и по этой функции определяется искомый показатель надежности.

Начнем рассмотрение с первого подхода - с непосредственного вычисления показателя надежности по относительному количеству благоприятных исходов. Блок-схема алгоритма реализации метода статистических испытаний применительно к рассматриваемой задаче приведена на рис. 6.6. В данной задаче безударного разделения считаются известными (исходными данными) математические ожидания m_M, m_Q, m_I и среднеквадратические отклонения D_M, D_Q, D_I входных случайных величин M, I и Q.

Пояснения к блок-схеме алгоритма приведены на поле рисунка (справа от блоков).

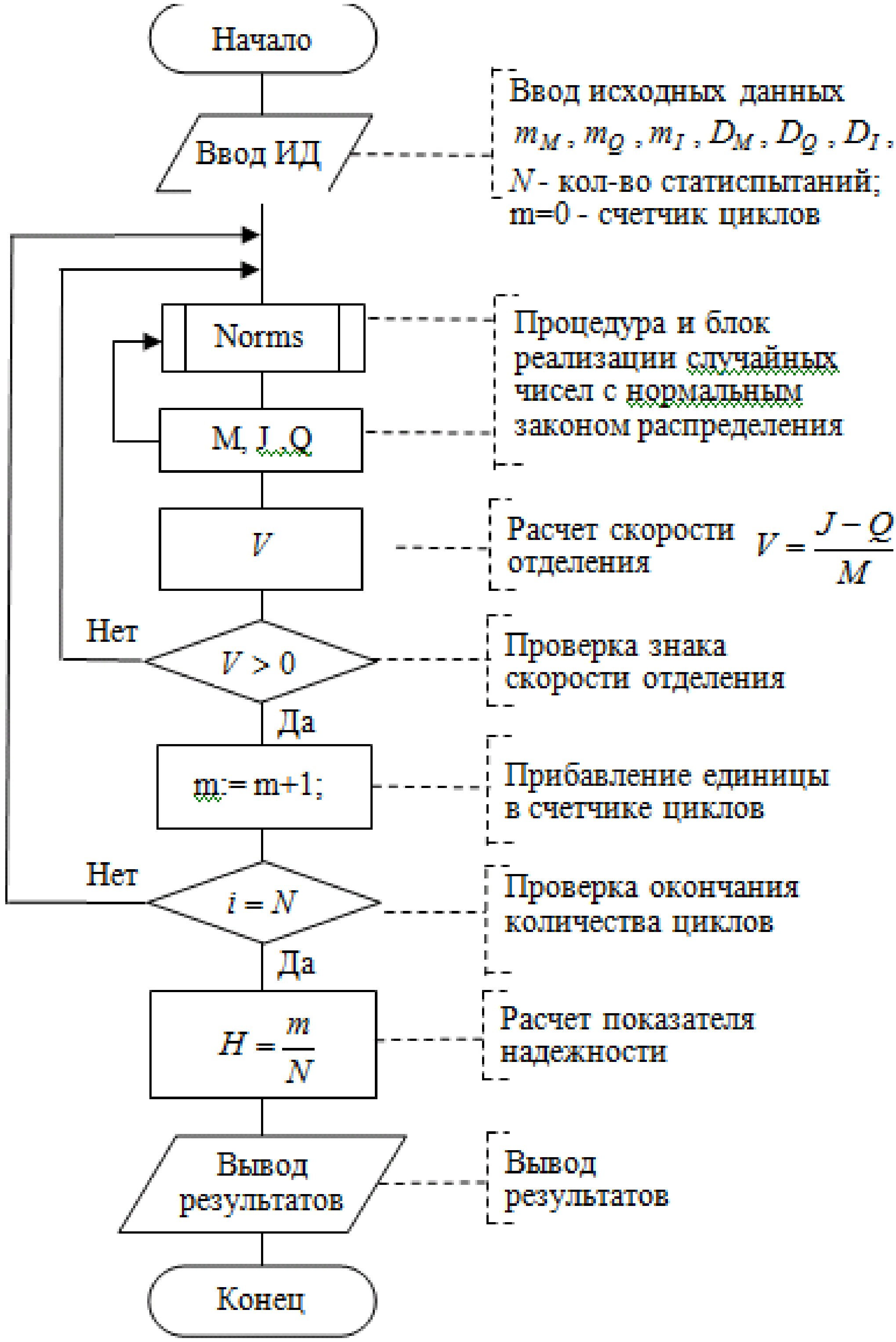


Рисунок 6.6 - Блок-схема алгоритма реализации метода статистических испытаний с помощью непосредственного вычисления показателя надежности

После получения случайной реализации величины скорости V в каждом цикле расчета эта величина сравнивается с предельно допустимой скоростью, которая в нашем случае равна нулю. Далее подсчитывается количество реализаций m, удовлетворяющих условию $V > 0$. Надежность подсчитывается по формуле $H = m/N$, где N – общее число статистических испытаний (число циклов).

Перейдем к следующему подходу для оценки надежности Безударного разделения методом статистических испытаний, а именно, когда сначала решается задача статистической динамики, а затем используется теоретический закон распределения случайной величины для оценки показателя надежности. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 6.7.

В отличие от рассмотренного выше подхода в данном подходе не выделяется количество реализаций, при которых скорость отделения больше нуля, а записывается массив значений скорости независимо от знака скорости (со знаком «плюс» или «минус»). Далее вычисляется математическое ожидание и дисперсия скорости по обычным формулам математической статистики:

$$m_V = \frac{\sum V[i]}{N} \quad \text{и} \quad D_V^2 = \frac{\sum \left(V[i] - m_V\right)^2}{N-1}.$$

Остальные действия ясны из пояснений к блок-схеме алгоритма, которые приведены на поле рисунка (справа от блоков).

Следует заметить, что при определении показателя надежности по функции нормального закона распределения в программном обеспечении необходимо задать табличные значения нормального закона распределения или рассчитывать значение функции распределения, проводя интегрирование функции плотности.

Чтобы избежать задания в программе такого рода табличных значений или вычисления интеграла для расчета функции нормального закона распределения, можно воспользоваться следующей зависимостью, полученной с помощью разложения в ряд:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

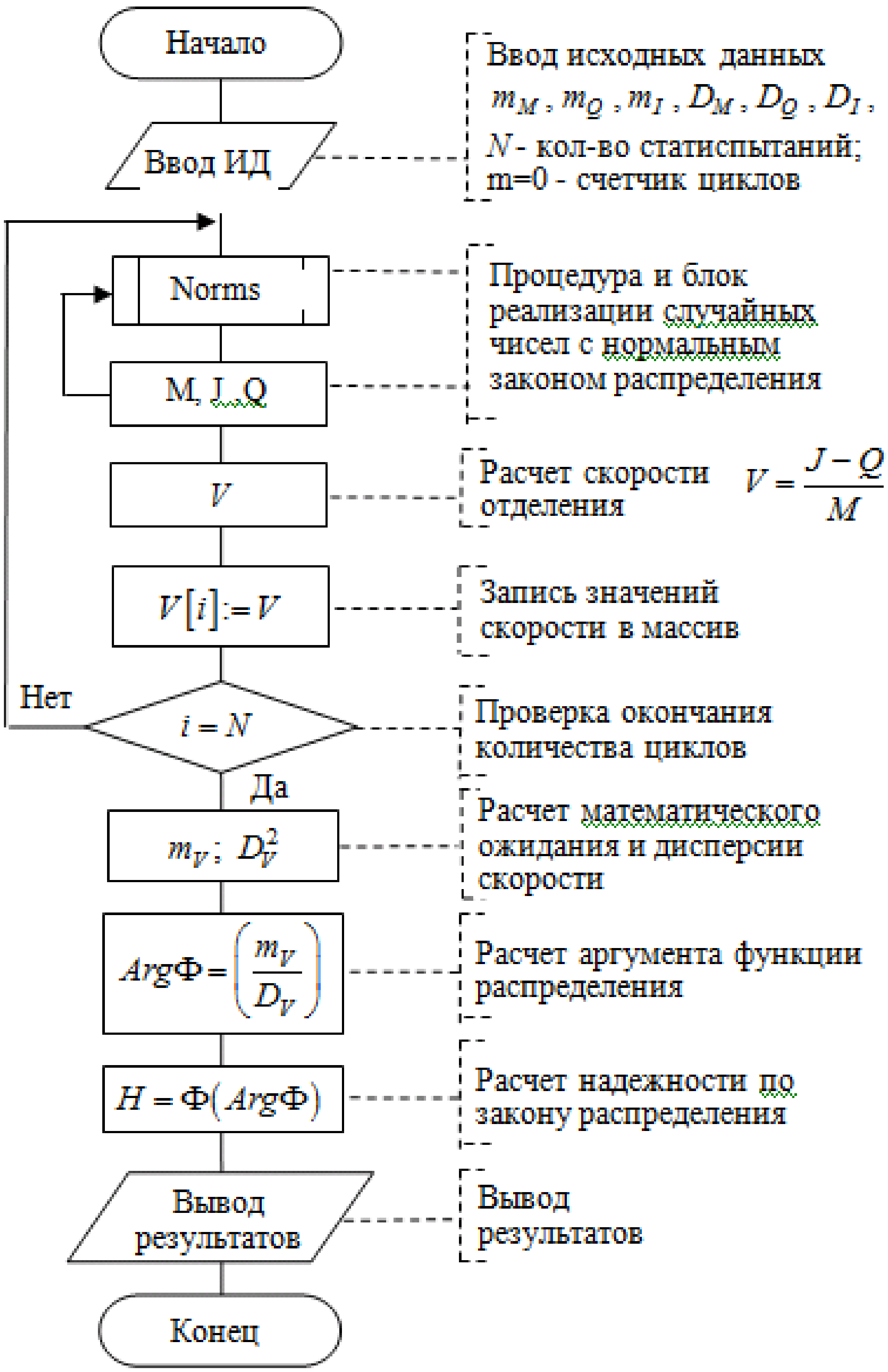


Рисунок 6.7 - Блок-схема алгоритма реализации метода статистических испытаний на основе решения задачи статистической динамики

Для уменьшения времени счета значение функции нормального закона распределения с погрешностью $7,5\cdot 10^{-8}$ можно вычислять с помощью следующей полиномиальной аппроксимации:

$$\Phi(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(b_1t+b_2t^2+...+b_5t^5\right),$$

где $t=1/(1+0,2316419\cdot x)$; $b_1=0,31938153$; $b_2=-0,356563782$; $b_3=1,781477937$; $b_4=-1,821255978$; $b_5=1,330274429$.

Таким образом, здесь была рассмотрена простейшая задача безударного разделения. Для решения более сложных задач, например, с учетом трехмерного движения разделяемых частей конструкции летательного аппарата с их вращением, а также с учетом аэродинамических сил, в качестве уравнений связи между входными и выходными параметрами, как упоминалось, используются соответствующие дифференциальные уравнения (см., например, работы [5, 14]).

В общем случае пространственного движения разделяемых масс, как упоминалось, параметрами состояния являются относительные линейные и угловые скорости и перемещения как случайные функции времени.

Ограничения L_i относительного пути X_i в выражении (6.1) представляет собой безопасные расстояния (как линейные, так и угловые), на которые нужно развести разделяемые массы, чтобы избежать их соударения в процессе начального этапа разделения. Это ограничение имеет смысл использовать в расчетах надежности систем отделения, когда разделение происходит в атмосфере (хотя и разреженной) или когда происходит поворот крупногабаритных отделяемых частей (при отделении ракетных блоков первой ступени ракеты- носителя или сброса головного обтекателя) и т. п.

Введение ограничений L_i в выражение (6.1) объясним на примере задачи безударного отделения головной части от ракетного блока, но только не будем пренебрегать действием аэродинамических сил.

В начальные моменты после выдачи команды на отделение ракетный блок летит как бы «в аэродинамической тени» головной части. Малое аэродинамическое сопротивление цилиндрического корпуса ракеты (по сравнению с аэродинамическим сопротивлением головной части) препятствует его отходу от головной части, создавая опасность догона и соударения. Кроме того, как упоминалось, догон возможен за счет тяги последствия двигателя ракеты. Когда же корпус отделяемого ракетного блока выходит из аэродинамической тени головной части, сопротивление его переднего торца резко возрастает, превышая аэродинамическое сопротивление головной части. Разность указанных сил меняет знак, способствуя дальнейшему разлету движущихся частей.

Этим обстоятельством и определяется ограничение L_i на расстояние в формуле (6.1).

Обычно надежность систем летательных аппаратов имеет значение, близкое к единице. В этой связи число экспериментов при приемлемой точности расчета оказывается порядка нескольких десятков тысяч, поэтому и время расчета на ЭВМ методом статических испытаний становится большим. Чтобы уменьшить время счета, как упоминалось, используют модифицированный метод статистических испытаний.

6.2 Задания

Рассчитать надежность системы безударного отделения головной части ракеты при разделении по схеме, рассмотренной на рис. 6.1 и 6.2 двумя методами:

−методом статистической линеаризации;

−методом статистических испытаний.

В качестве исходной модели (функциональной связи) взять уравнение (6.4). Характеристики случайных величин, входящих в это уравнение следующие:

−математическое ожидание массы = 1000 кг,

- среднеквадратическое отклонение массы = 50 кг,

–математическое ожидание тормозного импульса 30 000 Нс,

–математическое ожидание импульса последействия 20000 Нс,

–среднеквадратические отклонения тормозного импульса D_j и импульса последействия D_Q для каждого студента разные, варианты представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 - Варианты параметров случайных величин

Номер варианта	D_J, Нс	D_Q, Нс	Номер варианта	D_J, Не	D_Q, Нс
I	3 000	4 000	14	5 000	7 000
2	3 000	5 000	15	5 000	8 000
3	3 000	6 000	16	6 000	4 000
4	3 000	7 000	17	6 000	5 000
5	3 000	8 000	18	6 000	6 000
6	4 000	4 000	19	6 000	7 000
7	4 000	5 000	20	6 000	8 000
8	4 000	6 000	21	7 000	4 000
9	4 000	7 000	22	7 000	5 000
10	4 000	8 000	23	7 000	6 000
11	5 000	4 000	24	7 000	7 000
12	5 000	5 000	25	7 000	8 000
13	5 ОВД	6 000			

Работа выполняется с применением компьютерной программы в диалоговом режиме. Рекомендуется брать несколько значений числа статистических испытаний: 300, 1000 и 2000, 10000. При каждом значении статистических испытаний рекомендуется проводить несколько вариантов испытаний (не менее трёх)

6.4 Вопросы для контроля

1. Запишите математическую формулировку задачи безударного разделения частей в общем виде.

2. Составьте дифференциальное уравнение относительного движения разделяемых частей РКТ для наиболее простого случая одноосного разделения.

3. В чем заключается метод статистических испытаний? Расскажите его сущность.

4. Чем отличается модифицированный метод статистических испытаний от обычного метода?

5. Как можно смоделировать на ЭВМ случайно число с нормированным нормальным законом распределения на основе случайных чисел с равномерными законами распределения?

6. Как смоделировать на компьютере случайнее число с нормальным законом распределения и с заданными величинами математического ожидания в дисперсии?

7. Расскажите об алгоритме получения реализации случайных величин с нормальным законом распределения по случайной величине с равномерным законом распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В лабораторном практикуме изложены основные положения для выполнения лабораторных работ по надежности изделий и систем ракетно-космической техники. Приведенные в лабораторных работах методы используются в процессе создания надежных элементов и систем ракетно-космической техники.

В то же время много вопросов из-за ограниченности объема лабораторных работ осталось вне поля нашего зрения. Желающих более глубоко изучить вопросы, связанные с надежностью изделий, можно отослать к литературе, приведенной в списке использованных источников.

Следует также отметить, что создание надежных изделий ракетно-космической техники в значительной степени определяется опытом работы конструкторских бюро, заводов, эксплуатирующих организаций, их кооперацией и взаимодействием соответствующих служб.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

2. Кузнецов А. А. Математическое обеспечение надежности ЛА. — М.; МАИ, 1982. — 72 с.

3. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 604 с.

4. Кузнецов А. А. Надежность конструкций баллистических ракет. — М.: ;Чашиностроение, J978. — 256 с.

5. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970, - 104с.

6. Болшев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983, - 416 с.

7. Волков Л.И.. Шишкевич А.М. Надежность летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1975, 294 с.

8. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А.,Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. –М.:Атомиздат, 1978, - 232 с.

9. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.:Наука, 1979, -496 с.

10. Калабро С. Р. Принципы и практические вопросы надежности / Пер. с англ.-М,: Машиностроение, 1966, - 376 с.

11. Синпков А.М. Конструкция управляемых баллистических ракет. М.: Воениздат, 1969, - 444 с.

12. Надежность механических частей конструкций летательных аппаратов. /А.А.Кузнецов, А.А.Золотов, В.А.Комягин, М.И.Титов. U.: лйшиностроение, 1979, - 144 с.

13. Ермаков СМ., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982, - 296 с.

Приложение А

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ -

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2.2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	$0,9_2$	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	$0,9_2$	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2.6	$0,9_2$	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	$0,9_2$	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	$0,9_2$	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	$0,9_2$	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605

Окончание таблицы

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	$0{,}9_2$	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999
2.1	$0{,}9_3$	0324	0646	0957	1260	1553	1836	21)2	2378	2636	2886
3,2	0.9_3	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	$0{,}9_3$	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	$0{,}9_3$	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	$0{,}9_3$	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	$0{,}9_3$	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	$0{,}9_3$	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	$0{,}9_4$	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	$0{,}9_4$	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	$0{,}9_4$	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	$0{,}9_4$	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4.2	$0{,}9_4$	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	$0{,}9_5$	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	$0{,}9_5$	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	$0{,}9_5$	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	$0{,}9_5$	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	$0{,}9_5$	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	$0{,}9_6$	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958
4,9	$0{,}9_6$	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	$0{,}9_6$	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	$0{,}9_6$	8302	8389	8472	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	$0{,}9_7$	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	$0{,}9_7$	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	$0{,}9_7$	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	$0{,}9_7$	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	$0{,}9_7$	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	$0{,}9_8$	40	44	47	50	53	55	58	60	63	65
5,8	$0{,}9_8$	67	69	71	72	74	75	77	78	79	81
5,9	$0{,}9_8$	82	83	81	85	86	87	87	88	89	90

П р и м е ч а н и я:

1. Для отрицательных значений аргумента $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
2. Индекс у цифры 9 означает ее повторение, например при $x = 3{,}95$ имеем $\Phi(x) = 0{,}9_4 6092 = 0{,}99996092$.

Приложение Б

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Значения t_γ, удовлетворяющие равенству $\int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} S_{n-1}(t)\,dt=\gamma$, в зависимости от ν и γ (квантили распределения Стьюдента).

Таблица Б1 - Квантили распределения Стьюдента

$\vartheta=n-1$	$\gamma=0.9$	$\gamma=0.95$ $\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$ $\gamma=0.99$
1	6,314	12,71	63,66
2	2,920	4,303	9,965
3	2,353	3,181	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
12	1,782	2,179	3,055
14	1,761	2,145	2,997
16	1,746	2,120	2,931
18	1,734	2,101	2,878
20	1,725	2,086	2,845
25	1,703	2,060	2,787
30	1,697	2,042	2,750
60	1,671	2,000	2,660
∞	1,645	1,960	2,578

Примечание. ν - назывется количеством степеней свободы.

Приложение В

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА

Таблица В1 - Квантили распределения Пирсона (χ^2)

$\vartheta = n-1$	α					
	0,995	0,975	0,95	0,05	0,025	0,005
1	0,000	0,001	0,004	3,841	50,24	7,879
2	0,010	0,051	0,103	5,991	7,378	10,597
3	0,0717	0,216	0,352	7,815	9,348	12,838
4	0,207	0,484	0,711	9,488	11,143	14,860
5	0,412	0,831	1,145	11,070	12,832	16,750
6	0,676	1,237	1,635	12,592	14,449	18,548
7	0,989	1,690	2,167	14,067	13,013	20,278
8	1,344	2,180	2,733	15,507	17,535	21,955
9	1,735	2,700	3,325	16,919	19,023	23,589
10	2,156	3,247	3,940	18,307	20,483	25,188
11	2,603	3,816	4,575	19,675	21,920	26,757
12	3,074	4,404	5,226	21,026	23,336	28,300
13	3,565	5,009	5,892	22,362	24,736	29,819
14	4,075	5,629	6,571	23,685	26,119	31,319
15	4,601	6,262	7,261	24,996	27,448	32,801
16	5,142	6,908	7,962	26,296	28,845	34,267
17	5,697	7,564	8,762	27,587	30,191	35,718
18	6,265	8,231	9,930	28,869	31,526	37,156
19	6,844	8,907	10,117	30,144	32,852	38,582
20	7,434	9,591	10,851	31,410	34,170	39,997
21	8,034	10,283	11,591	32,671	35,479	41,401
22	8,643	10,982	12,338	33,924	36,781	42,796
23	9,260	11,688	13,091	35,172	38,076	44,181
24	9,886	12,401	13,848	36,415	39,364	45,558
25	10,520	13,120	14,611	37,652	40,646	46,928
26	11,160	13,844	15,379	38,885	41,923	48,920
27	11,808	14,573	16,151	40,113	43,194	49,645
28	12,461	15,308	16,928	41,337	44,461	50,993
29	13,121	16,047	17,708	42,557	45,722	52,336
30	13,787	16,791	18,493	43,773	46,979	53,672

Приложение Г

ЗНАЧЕНИЯ СТАТИСТИК ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О РЕЗКО ВЫДЕЛЯЮЩИХСЯ ЧЛЕНОВ ВЫБОРКИ

Значения статистик r_{max} (или r_{min})для Различных уровней значимости α

Число степеней свободы	α			
	0,10	0,05	0,025	0,01
1	1,406	1,414	1,414	1,414
2	1,645	1,689	1,710	1,723
3	1,791	1,869	1,917	1,955
4	1,894	1,996	2,067	2,130
5	1,974	2,093	2,182	2,265
6	2,041	2,172	2,273	2,374
7	2,097	2,237	2,349	2,464
8	2,146	2,294	2,414	2,540
9	2,190	2,343	2,470	2,606
10	2,229	2,387	2,519	2,663
11	2,264	2,426	2,562	2,714
12	2,297	2,461	2,602	2,759
13	2,326	2,493	2,638	2,800
14	2,354	2,523	2,670	2,837
15	2,380	2,551	2,701	2,871
16	2,404	2,577	2,728	2,903
17	2,426	2,600	2,754	2,932
18	2,447	2,623	2,778	2,959
19	2,467	2,644	2,801	2,984
20	2,486	2,664	2,823	3,008
21	2,504	2,683	2,843	3,030
22	2,520	2,701	2,862	3,051
23	2,537	2,717	2.880	3,071

Приложение Д

ЗНАЧЕНИЯ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О РАВЕНСТВЕ ДВУХ ДИСПЕРСИЙ

(СТАТИСТИКА ФИШЕРА)

Значения $F_{0,05;\nu_1;\nu_2}$ для различных степеней свободы

ν_2	ν_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	252	253	254
2	18,51	19,00	19,10	19,25	19,30	19,33	19,35	19,17	19,38	19,39	19,44	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,58	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,70	5,66	5,63
5	6,01	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,44	4,41	4,36
7	5,59	4,74	4,35	4,13	3,97	3,89	3,79	3,67	3,64	3,64	3.44	3,32	3,27	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,64	2,59	2,54
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	1,97	1,91	1,84
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2.29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,78	1,60	1,52	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,68	1,48	1,39	1,28
	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,35	1,24	1,0

Автор
Владимир Иванович Куренков

НАДЁЖНОСТЬ ИЗДЕЛИЙ И СИСТЕМ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Лабораторный практикум