МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА (национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

А.А. Дегтярев

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТЫХ СХЕМ

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Электронное методическое пособие

САМАРА

2011

Автор: ДЕГТЯРЕВ Александр Александрович

Методическое пособие содержит комплекты задач для практических занятий и самостоятельной работы студентов по курсу «Численные методы математической физики».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 – «Прикладная математика и информатика».

СОДЕРЖАНИЕ

1..Задачи к практическому занятию по теме «Повторение».

Задача 1. Дать определение функции, ограниченной относительно другой функции $\left[g(x)=O\left(f(x)\right)\right]$:

а) на некотором множестве;

б) при $x\to\infty$.

Задача 2. Дать определение бесконечно малой функции $\varepsilon(x)$ при $x\to a$.

Задача 3. Дать определение бесконечно малой функции более высокого порядка малости, чем некоторая другая бесконечно малая функция при $x\to a$ $\left[g(x)=o\left(f(x)\right)\right]$.

Задача 4. Показать, что при $x\to a$ справедливо:

а) $o\Big(o\big(f(x)\big)\Big)=o\big(f(x)\big)$;

б) $O\Big(o\big(f(x)\big)\Big)=o\big(f(x)\big)$;

в) $o\Big(O\big(f(x)\big)\Big)=o\big(f(x)\big)$;

г) $O\Big(O\big(f(x)\big)\Big)=O\big(f(x)\big)$;

д) $O\big(f(x)\big)+o\big(f(x)\big)=O\big(f(x)\big)$.

Задача 5. Пусть $n>0$, $m>0$, $n<m$. Показать, что при $x\to 0$ справедливо:

а) $cO\left(x^n\right)=O\left(x^n\right)$, где $c-const$, $c\neq 0$;

б) $O\left(x^n\right)+O\left(x^m\right)=O\left(x^n\right)$;

в) $O\left(x^n\right)O\left(x^m\right)=O\left(x^{n+m}\right)$.

Задача 6. Дать определение:

а) линейного пространства;

б) нормированного пространства;

в) полного нормированного пространства.

Задача 7. Будет ли являться нормой функционал $\varphi(x)$:

а) $\varphi(x)=|x_{n-1}|$ в R^n;

б) $\varphi(x)=\sum\limits_{i}^{n} x_i^4$ в R^n;

в) $\varphi(x)=|x(b)-x(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|$ в $C^1_{[a,b]}$;

г) $\varphi(x)=|x(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|$ в $C^1_{[a,b]}$.

2 Задачи к практическому занятию по теме «Аппроксимация».

Задача 1. Оценить, с каким порядком по шагу h разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} + \left(u_{i+1}+u_i\right)\cos x_i = \sin 2x_i, \quad i=\overline{0,\, I-1}; \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

локально аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + 2u\cos x = \sin 2x, \quad x \in \left[0,\ 1\right]; \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

на ее решении, если для записи схемы использована следующая сетка:

$$x_i = ih; \quad h = \frac{1}{I}; \quad i = \overline{0,\, I}.$$

Задача 2. Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + u_i = x_i + 1, \quad i=\overline{1,\, I-1}; \\ u_0 = 0; \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

на равномерной сетке $x_i = ih;\ \ i=\overline{0,\, I};\ \ h=\dfrac{1}{I}$.

Аппроксимирует ли эта разностная схема следующую дифференциальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + u = x + 1, \quad x \in \left[0,\ 1\right]; \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

со вторым порядком по шагу h? Если нет, то видоизменить схему так, чтобы обеспечить второй порядок аппроксимации.

(Ответ: $u_1 = h$)

Задача 3. При каких значениях параметров α, β, γ разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+\left(\alpha u_{i+1}+\beta u_i+\gamma u_{i-1}\right)=\varphi\left(x_i\right)+\dfrac{h^2}{12}\varphi''\left(x_i\right), \quad i=\overline{1,\ I-1}; \\ u_0=0; \\ u_I=0, \end{cases}$$

записанная на сетке $x_i=ih; \quad i=\overline{0,\ I}; \quad h=\dfrac{1}{I}$,

аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}+u=\varphi\left(x\right), \quad x\in\left[0,\ 1\right]; \\ u\left(0\right)=0; \\ u\left(1\right)=0 \end{cases}$$

с четвертым порядком по шагу h?

(Ответ: $\alpha=\gamma=\dfrac{1}{12}; \quad \beta=\dfrac{10}{12}$)

Задача 4. С каким порядком разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+3\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-4u_i=0, \quad i=\overline{1,\ I-1}; \\ u_0=1; \\ \dfrac{u_1-u_0}{h}=-1 \end{cases}$$

на сетке $x_i=ih; \quad i=\overline{0,\ I}; \quad h=\dfrac{1}{I}$

локально аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}+3\dfrac{du}{dx}-4u=0, \quad x\in\left[0,\ 1\right]; \\ u\left(0\right)=1; \\ \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=0}=-1? \end{cases}$$

Видоизменить схему так, чтобы повысить порядок аппроксимации на единицу.

Задача 5. Найти зависимость между шагами h_t и h_x, при которой дифференциальное уравнение $u'_t = u_{xx}''$ аппроксимируется разностным

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}$$

с погрешностью $O\left(h_t^2,\ h_x^4\right)$, если сетка определяется следующим образом:

$$x_i = ih_x; \quad i = \overline{0,\ I}; \quad h_x = \frac{1}{I};$$

$$t_k = kh_t; \quad i = \overline{0,\ K}; \quad h_t = \frac{1}{K}.$$

Задача 6. Оценить порядки аппроксимации по шагам h_t и h_x дифференциального уравнения

$$u'_t = u_{xx}'', \quad x \in \left[0,\ 1\right], \quad t \in \left[0,\ 1\right]$$

следующим разностным уравнением:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \theta \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} + \left(1 - \theta\right) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}$$

при условии $\theta = \frac{1}{2} - \frac{h_x^2}{12h_t}$.

Задача 7. С каким порядком дифференциальный оператор $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$ аппроксимируется следующим разностным оператором

$$L_n u_n = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2}$$

на сетке $x_i = ih; \quad i = \overline{0,\ I}; \quad h = \frac{1}{I}.$

Задача 8. Применяя метод неопределенных коэффициентов, построить разностную схему максимального порядка аппроксимации для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - u = \varphi(x), \quad x \in \left[0,\ 1\right]; \\ u\left(1\right) = 1. \end{cases}$$

Использовать равномерную сетку по переменной x, а также шаблон, изображенный на рисунке 1.

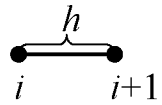

Рисунок 1 Двухточечный одномерный шаблон

(Ответ: Схема имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} - \dfrac{u_{i+1}+u_i}{2} = \dfrac{\varphi(x_{i+1})+\varphi(x_i)}{2}, & i=\overline{0,\ I-1}; \\ u_I = 1 \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации максимального порядка характеризуется функцией $O(h^2)$).

Задача 9. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему

а) первого порядка аппроксимации относительно шага сетки;

б) второго порядка аппроксимации относительно шага сетки;

в) наивысшего порядка аппроксимации относительно шага сетки

для следующей дифференциальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in [0,\ 1]; \\ u(0) = a; \\ u(1) = b, \end{cases}$$

используя равномерную сетку и шаблон, изображенный на рисунке 2:

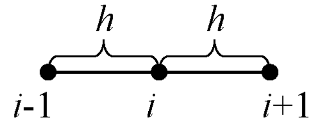

Рисунок 2 Трехточечный одномерный шаблон

2 Задачи к практическому занятию по теме «Устойчивость». Исследование устойчивости по определению.

Задача 1. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}+a^2\dfrac{u_i^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{h_x}=0, \quad i=\overline{1,\,I}, \quad k=\overline{0,\,K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \quad i=\overline{0,I}; \\ u_0^k=u_I^k, \quad k=\overline{0,\,K}, \end{cases}$$

где h_t и h_x - шаги сетки: $h_x=\dfrac{1}{I}$; $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема безусловно устойчива.)

Задача 2. Показать, что следующая разностная схема является неустойчивой:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}+a^2\dfrac{u_{i+1}^{k}-u_{i}^{k}}{h_x}=0, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\,K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \end{cases}$$

где h_t и h_x - шаги сетки: $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

Указание: задать возмущение правой части начального условия в следующем виде: $\psi_i=(-1)^i\varepsilon$, где ε - произвольное положительное число.

Задача 3. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}-a^2\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-u_{i}^{k+1}}{h_x}=0, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\,K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \end{cases}$$

где h_t и h_x - шаги сетки: $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема безусловно устойчива).

Задача 4. При выполнении какого условия разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} - a^2\,\dfrac{u_{i+1}^k-u_i^k}{h_x} = 0, \quad i=0,\pm 1,\dots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i \end{cases}$$

будет устойчивой, если $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа?

(Ответ: схема устойчива, если $\dfrac{h_t}{h_x}\le\dfrac{1}{a^2}$,

при $\dfrac{h_t}{h_x}>\dfrac{1}{a^2}$ схема неустойчива.)

Задача 5. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-\dfrac{u_{i+1}^k+u_{i-1}^k}{2}}{h_t} - \dfrac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h_x} = \varphi_i^k, \quad i=\overline{0,\ I-1}, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \quad i=\overline{0,I}; \\ u_0^k=u_I^k \end{cases}$$

где $h_x=\dfrac{1}{I}$; $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема условно устойчива;

условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{h_t}{h_x}\le 1$.)

Задача 6. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = a^2\,\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_x^2}+b^2u_i^k, \quad i=0\pm 1,\pm 2,\dots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \quad i=0\pm 1,\pm 2,\dots, \end{cases}$$

где $h_t=\dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема условно устойчива;

условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{a^2h_t}{h_x^2}\le\dfrac{1}{2}$.)

Задача 7. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = a^2\,\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} - b^2 u_i^{k+1} + \varphi_i^{k+1}, \quad i=\overline{1,\, I}, \quad k=\overline{0,\, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i=\overline{0, I}; \\ u_0^k = u_I^k, \quad u_1^k = u_{I+1}^k, \quad k=\overline{0,\, K}, \end{cases}$$

где $h_x = \dfrac{1}{I}$; $h_t = \dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема безусловно устойчива).

Задача 8. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = a^2\,\dfrac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{h_x^2} - b^2 u_i^{k}, \quad i=\overline{1,\, I}, \quad k=\overline{0,\, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i=\overline{0, I}; \\ u_0^k = u_I^k, \quad u_1^k = u_{I+1}^k, \quad k=\overline{0,\, K}, \end{cases}$$

где $h_x = \dfrac{1}{I}$; $h_t = \dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема условно устойчива;
условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{a^2 h_t}{h_x^2} \le \dfrac{1}{2}$.)

Задача 9. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = a^2\,\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} + b^2 u_i^{k+1} + \varphi_i^{k+1}, \quad i=\overline{1,\, I}, \quad k=\overline{0,\, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i=\overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \quad u_I^k = \beta^k, \quad k=\overline{1,\, K}, \end{cases}$$

где $h_x = \dfrac{1}{I}$; $h_t = \dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема безусловно устойчива).

Задача 10. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} - b^2 u_i^k + \varphi_i^k, \ i = \overline{1, I-1}, \ k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \qquad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \gamma^k, \qquad k = \overline{1, K}; \\ \dfrac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} = -2a^2 \dfrac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x^2} - b^2 u_I^k + \varphi_I^k, \qquad k = \overline{1, K}, \end{cases}$$

где $h_x = \dfrac{1}{I}$; $h_t = \dfrac{T}{K}$, T - положительная константа.

(Ответ: схема безусловно устойчива).

Задача 11. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon_i^{k+1} - \upsilon_i^k}{h_t} = \dfrac{p^2}{r_i} \dfrac{\upsilon_{i+1}^k - \upsilon_{i-1}^k}{2h_r} + p^2 \dfrac{\upsilon_{i+1}^k - 2\upsilon_i^k + \upsilon_{i-1}^k}{h_r^2} - q^2 \upsilon_i^k + \varphi_i^k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ \dfrac{\upsilon_0^{k+1} - \upsilon_0^k}{h_t} = 4p^2 \dfrac{\upsilon_1^k - \upsilon_0^k}{h_r^2} - q^2 \upsilon_0^k + \varphi_0^k, \qquad k = \overline{0, K-1}; \\ \upsilon_I^k = \alpha^k, \qquad k = \overline{1, K}; \\ \upsilon_i^0 = \psi_i, \qquad i = \overline{0, I}, \end{cases}$$

где h_t и h_r - шаги сетки: $h_r = \dfrac{R}{I}$, $h_t = \dfrac{T}{K}$, R и T - положительные константы; r_i - значение радиальной координаты полярной системы координат: $r_i = ih_r$, $i = \overline{0, I}$.

(Ответ: схема условно устойчива;
условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{p^2 h_t}{h_r^2} \le \dfrac{1}{4}$.)

Задача 12. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon_i^{k+1}-\upsilon_i^k}{h_t}=\dfrac{p^2}{r_i}\dfrac{\upsilon_{i+1}^{k+1}-\upsilon_{i-1}^{k+1}}{2h_r}+p^2\dfrac{\upsilon_{i+1}^{k+1}-2\upsilon_i^{k+1}+\upsilon_{i-1}^{k+1}}{h_r^2}-q^2\upsilon_i^{k+1}+\varphi_i^{k+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,I-1},\quad k=\overline{0,K-1}; \\ \dfrac{\upsilon_0^{k+1}-\upsilon_0^k}{h_t}=4p^2\dfrac{\upsilon_1^{k+1}-\upsilon_0^{k+1}}{h_r^2}-q^2\upsilon_0^{k+1}+\varphi_0^{k+1},\qquad k=\overline{0,K-1}; \\ \dfrac{\upsilon_I^{k+1}-\upsilon_I^k}{h_t}=2p^2\dfrac{\upsilon_{I-1}^{k+1}-\upsilon_I^{k+1}}{h_r^2}-q^2\upsilon_0^{k+1}+\varphi_I^{k+1},\qquad k=\overline{0,K-1}; \\ \upsilon_i^0=\alpha_i,\qquad i=\overline{0,I}, \end{cases}$$

где h_t и h_r - шаги сетки: $h_r=\dfrac{R}{I},\ h_t=\dfrac{T}{K},$ R и T - положительные константы;

r_i - значение радиальной координаты полярной системы координат: $r_i=ih_r,\ i=\overline{0,I}$.

(Ответ: схема безусловно устойчива).

Задача 13. Исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon_i^{k+1}-\upsilon_i^k}{h_t}=\dfrac{2p^2}{r_i}\dfrac{\upsilon_{i+1}^{k}-\upsilon_{i-1}^{k}}{2h_r}+p^2\dfrac{\upsilon_{i+1}^{k}-2\upsilon_i^{k}+\upsilon_{i-1}^{k}}{h_r^2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,I-1},\quad k=\overline{0,K-1}; \\ \dfrac{\upsilon_0^{k+1}-\upsilon_0^k}{h_t}=6p^2\dfrac{\upsilon_1^{k}-\upsilon_0^{k}}{h_r^2},\qquad k=\overline{0,K-1}; \\ \upsilon_I^k=\alpha^k,\qquad k=\overline{1,K}; \\ \upsilon_i^0=\psi_i,\qquad i=\overline{0,I}, \end{cases}$$

где h_t и h_r - шаги сетки: $h_r=\dfrac{R}{I},\ h_t=\dfrac{T}{K},$ R и T - положительные константы; r_i - значение радиальной координаты сферической системы координат: $r_i=ih_r,\ i=\overline{0,I}$.

(Ответ: схема условно устойчива;

условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{p^2h_t}{h_r^2}\le\dfrac{1}{6}$.)

4 Задачи к практическому занятию по теме «Необходимый признак устойчивости Неймана».

Задача1. Исследовать устойчивость разностной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}+a^2\,\dfrac{u_{i+1}^k-u_i^k}{h_x}=\varphi_i^k, \qquad i=0,\pm1,\ldots, \qquad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \end{cases}$$

используя признак Неймана.

Указание. Поскольку признак Неймана является необходимым, то возмущение правой части разностного уравнения можно положить равным нулю, т.е. $\varphi_i^k=0$. Затем следует найти выражение для $\left|\lambda(\alpha)\right|$ и проверить выполнение условия $\left|\lambda(\alpha)\right|\le 1+C_1h_t$.

(Ответ: схема неустойчива.)

Задача2. Исследовать устойчивость разностной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}-a^2\,\dfrac{u_i^k-u_{i-1}^k}{h_x}=0, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i, \end{cases}$$

используя признак Неймана.

Указание. Найти выражение для $\left|\lambda(\alpha)\right|$ и проверить выполнение условия $\left|\lambda(\alpha)\right|\le 1+C_1h_t$.

(Ответ: схема неустойчива.)

Задача 3. Применить признак Неймана для исследования устойчивости разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}-a^2\,\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-u_i^{k+1}}{h_x}=\varphi_i^{k+1}, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i. \end{cases}$$

Указание. Поскольку признак Неймана является необходимым, то возмущение правой части разностного уравнения можно положить равным нулю, т.е. $\varphi_i^k = 0$. Затем следует найти $\left|\lambda(\alpha)\right|$ и проверить выполнение условия $\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1 + C_1 h_t$.

(Ответ: условие признака Неймана выполняется.)

Задача 4. Найти условие, при котором разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \qquad i = 0, \pm 1, \ldots, \qquad k = \overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i \end{cases}$$

будет неустойчивой.

(Ответ: схема неустойчива, если $a^2 \dfrac{h_t}{h_x^2} > \dfrac{1}{2}$).

Задача 5. Исследовать устойчивость разностной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_x} = \varphi_i^k, \qquad i = 0, \pm 1, \ldots, \qquad k = \overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \end{cases}$$

используя признак Неймана.

(Ответ: схема неустойчива).

Задача 6. Применить признак Неймана для исследования устойчивости разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a^2 \dfrac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h_x} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \ldots, \quad k = \overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i. \end{cases}$$

(Ответ: условие признака Неймана выполняется).

Задача 7. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_x} - a^2 \dfrac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h_x} = \varphi_i^k, \quad i = 0, \pm 1, \ldots, \quad k = \overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \end{cases}$$

используя признак Неймана.

(Ответ: схема неустойчива, если $a^2 \dfrac{h_t}{h_x} > 1$).

Задача 8. Применить признак Неймана для исследования устойчивости разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}=a^2\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2}+\varphi_i^{k+1}, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i. \end{cases}$$

(Ответ: условие признака Неймана выполняется).

Задача 9. Применить признак Неймана для исследования устойчивости разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}=a^2\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2}-b^2u_i^{k+1}+\varphi_i^{k+1}, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i. \end{cases}$$

(Ответ: условие признака Неймана $\left|\lambda(\alpha)\right|\le 1+C_1h_t$ выполняется, поскольку $\lambda(\alpha)=\dfrac{1}{1+4\gamma\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+h_tb^2}$, где $\gamma=\dfrac{a^2h_t}{h_x^2}$.)

Задача 10. Найти условие, при котором разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}=a^2\dfrac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{h_x^2}-b^2u_i^{k}+\varphi_i^{k}, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{0,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i \end{cases}$$

будет неустойчивой.

(Ответ: схема неустойчива, если $a^2\dfrac{h_t}{h_x^2}>\dfrac{1}{2}$.)

Задача 11. Применить признак Неймана для исследования устойчивости разностной схемы:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-2u_i^k+u_i^{k-1}}{h_t^2}=a^2\dfrac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{h_x^2}, \quad i=0,\pm1,\ldots, \quad k=\overline{1,\ K-1}; \\ u_i^0=\psi_i \end{cases}$$

(Ответ: условие признака Неймана будет выполнено, если $a\dfrac{h_t}{h_x}<1$).

5 Задачи для самостоятельного решения.

Тема: «Линейные разностные уравнения»

Найти общее решение разностного уравнения:

1. $16u_{i+1}+24u_i+9u_{i-1}=0$.
2. $u_{i+1}+20u_i+25u_{i-1}=0$.
3. $6u_{i+1}-5u_i+u_{i-1}=0$.
4. $2u_{i+1}-5u_i+2u_{i-1}=0$.
5. $u_{i+1}-4u_i+4u_{i-1}=0$.
6. $9u_{i+1}-6u_i+u_{i-1}=0$.
7. $u_{i+1}-4u_i-5u_{i-1}=0$.
8. $24u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}=0$.
9. $49u_{i+1}-14u_i+u_{i-1}=0$.
10. $u_{i+1}+6u_i+8u_{i-1}=0$.

Найти общее вещественное решение разностного уравнения

11. $u_{i+1}+9u_{i-1}=0$.
12. $5u_{i+1}-6u_i+5u_{i-1}=0$.
13. $u_{i+1}-\sqrt{3}u_i+u_{i-1}=0$.
14. $5u_{i+1}+8u_i+5u_{i-1}=0$.
15. $u_{i+1}+2u_i+2u_{i-1}=0$.
16. $4u_{i+1}-4u_i+5u_{i-1}=0$.
17. $49u_{i+1}+4u_{i-1}=0$.
18. $9u_{i+1}-18u_i+10u_{i-1}=0$.
19. $u_{i+1}+\sqrt{2}u_i+u_{i-1}=0$.
20. $u_{i+1}-u_i+u_{i-1}=0$.

Найти произвольное частное решение неоднородного разностного уравнения:

21. $u_{i+1}-u_i+u_{i-1}=1$.
22. $u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}=(-1)^{i+1}$.
23. $u_{i+1}-u_i+u_{i-1}=(-1)^i$.

24. $u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \sin\frac{\pi i}{2}$.

25. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} = \cos\frac{\pi i}{2}$.

26. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} + u_{i-2} = \sin^2\frac{\pi i}{2}$.

27. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} = 1$.

28. $u_{i+1} - 2u_i + 2u_{i-1} - u_{i-2} = \sin^2\frac{\pi(i+1)}{2}$.

29. $u_{i+1} - u_i - u_{i-1} + u_{i-2} = \cos\pi i$.

30. $u_{i+2} - u_i + u_{i-2} = 1$.

31. Найти при $i \geq 0$ ограниченное решение разностного уравнения $u_{i+1} - \frac{10}{3}u_i + u_{i-1} = 0$, удовлетворяющее условию $u_0 = 1$.

32. Найти миллионный член последовательности чисел Фибоначчи
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

33. Найти решение разностной краевой задачи

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 0,\ i = \overline{1, n-1},$$
$$u_0 = a,\ u_n = b.$$

Решить спектральную задачу:

34. $$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = -\lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, \quad u_n = 0. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, \quad u_n = 0. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, \quad u_n = u_{n-1}. \end{cases}$$

37. $\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=\lambda u_i, \quad i=\overline{1,n-1}, \\ u_0=u_1, \quad u_n=u_{n-1}. \end{cases}$

Краткая теория

Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное разностное уравнение вида

$$a_i^0 y_i + a_i^1 y_{i+1} + a_i^2 y_{i+2} + \ldots + a_i^m y_{i+m} = f_i; \quad i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{1}$$

Если $a_i^0 \neq 0$ и $a_i^m \neq 0$, то уравнение (1) является разностным порядка m.

Рассмотрим однородное линейное разностное уравнение

$$a_i^0 y_i + a_i^1 y_{i+1} + a_i^2 y_{i+2} + \ldots + a_i^m y_{i+m} = 0; \quad i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{2}$$

__Теорема 1.__ Если сеточные функции $v_i^1,\ v_i^2,\ \ldots,\ v_i^k$ ($i=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$) являются решениями уравнения (2), то и функция $y_i = \sum_{n=1}^{k} c_n v_i^n$ ($i=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$), где c_n $(n=\overline{1,k})$ - постоянные числа, также является решением этого уравнения.

__Теорема 2.__ Если $v_i^1,\ v_i^2,\ \ldots,\ v_i^m$ - линейно-независимая система решений уравнения (2), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_i = \sum_{n=1}^{m} c_n v_i^n, \qquad i=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

где c_n $(n=\overline{1,m})$ - произвольные постоянные.

__Теорема 3__. Общее решение неоднородного уравнения (1) может быть представлено в виде суммы его частного решения и общего решения однородного уравнения (2).

Для однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y_i + a_1 y_{i+1} + a_2 y_{i+2} + \ldots + a_m y_{i+m} = 0. \tag{3}$$

решение удобно искать в виде

$$y_i = \mu^i, \qquad (4)$$

где μ^i - есть i-тая степень числа μ.

После подстановки выражения (4) в уравнение (3) получим характеристическое уравнение

$$a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots + a_m\mu^m = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет m корней. Если все корни μ_k $(k = \overline{1,m})$ различны, то система функций $v_i^k = \mu_k^i$ $(k = \overline{1,m})$ будет линейно независимой. Тогда общее решение уравнения (3) легко записать, пользуясь теоремой 2.

Рассмотрим случай, когда имеются кратные корни характеристического уравнения. Пусть μ_k $(k = \overline{1,r})$ - корень кратности p_k $(\sum_{k=1}^{r} p_k = m)$. Тогда система линейно независимых решений однородного уравнения (5) может быть получена объединением r подсистем следующего вида:

$$\left\{\mu_k^i;\ i\mu_k^i;\ i^2\mu_k^i;\ \ldots;\ i^{p_k-1}\mu_k^i\right\}, \quad k = \overline{1,r}.$$

6 Задачи для самостоятельной работы по теме «Построение аппроксимирующих разностных схем»

Задача 1. Применяя метод замены производных разностными отношениями, построить разностную схему второго порядка аппроксимации для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(rk(r)\dfrac{du}{dr}\right)-\alpha(r)u+\varphi(r)=0, \quad r\in(0,R); \\ 2\dfrac{d}{dr}\left(k(r)\dfrac{du}{dr}\right)-\alpha(r)u+\varphi(r)=0, \quad r=0; \\ u(R)=\gamma. \end{cases}$$

Использовать равномерную сетку по радиальной переменной r полярной системы координат, а также шаблон, изображенный на рисунке 1.

Задача 2. Применяя метод неопределенных коэффициентов, построить разностную схему

а) второго порядка аппроксимации;

б) максимального порядка аппроксимации

для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx}-u=\varphi(x), \quad x\in[0,\ 1]; \\ u(1)=1. \end{cases}$$

Использовать равномерную сетку по переменной x, а также шаблон, изображенный на рисунке 1.

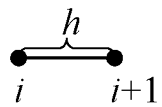

Рисунок 1 Двухточечный одномерный шаблон

(Ответ: Схема в обоих случаях а) и б) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} - \dfrac{u_{i+1}+u_i}{2} = \dfrac{\varphi(x_{i+1})+\varphi(x_i)}{2}, \quad i=\overline{0,\, I-1}; \\ u_I = 1. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации максимального порядка характеризуется функцией $O(h^2)$).

Задача 3. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему

а) второго порядка аппроксимации;

б) третьего порядка аппроксимации;

в) наивысшего порядка аппроксимации относительно шага сетки

для следующей дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in [0,\, 1]; \\ u(0) = a; \\ u(1) = b, \end{cases}$$

используя равномерную сетку и шаблон, изображенный на рисунке 2:

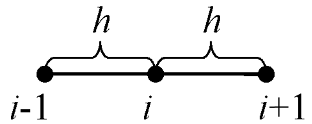

Рисунок 2 Трехточечный одномерный шаблон

Задача 4. Применяя интегро-интерполяционный метод, построить разностную схему, аппроксимирующую следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(rk(r)\dfrac{du}{dr}\right)-\alpha(r)u+\varphi(r)=0, \quad r\in(0,R); \\ \lim\limits_{r\to 0} rk(r)\dfrac{du(r)}{dr}=0; \\ u(R)=\gamma. \end{cases}$$

Использовать равномерную сетку по радиальной переменной r