

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

Е.А. ДЕНИСКИНА, Ю.Л. ФАЙНИЦКИЙ

ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических разработок для практических занятий*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных технологий"**

Рецензент канд. техн. наук, доцент Н. Л. А к с е н о в а

Денискина Е.А.

Пределы и производные: метод. разработ. для практ. занятий /
Е.А. Денискина, Ю.Л. Файнцуккий. – Самара: Изд-во Самар. гос.
аэрокосм. ун-та, 2006. – 36 с.

Методические разработки составлены в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно–технических специальностей вузов. Разработки содержат набор стандартных задач для проведения практических занятий со студентами первого курса, а также задачи для самостоятельной работы студентов и ответы к ним.

Настоящие методические разработки предназначены для студентов первого курса 1-4 факультетов СГАУ и могут быть рекомендованы преподавателям для подготовки и проведения практических занятий по темам «Пределы», «Производные», «Комплексные числа».

Методические разработки выполнены на кафедре высшей математики.

УДК 51

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

1. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	4
1.1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ	4
1.2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ	5
2. ПРЕДЕЛЫ	6
2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ	6
2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ	7
2.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ	8
2.4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ	9
2.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА	11
3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	12
3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ	12
3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ	14
3.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ НЕЯВНО ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	17
3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ	18
3.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	20
3.6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ	22
3.7. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ	23
3.8. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА КРИВОЙ. АСИМПТОТЫ	24
4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	25
4.1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ	25
4.2. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ	27
4.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	29
4.4. ЭКСТРЕМУМ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ	31
5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	33
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	35

1.1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

1. Найти $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f(4)$, если $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -1 < x \leq 0, \\ 1+x, & 0 < x < 2. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \sin 2x$. Найти $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f(x-1)$, $f(x)-1$.

3. Найти $f(x+1)$, если $f(2x-1) = x^2$.

4. Найти композиции следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg} u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \lg x$; б) $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sin x$.

5. Представить следующие функции в виде цепочки основных элементарных функций: а) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \lg x}$; б) $y = \cos^2 5\sqrt{x}$; в) $y = \arcsin(3x^2)$.

Найти области определения следующих функций:

6. $y = \sqrt[4]{2+3x}$. 7. $y = \sqrt[3]{x+1} + 2^{3x} - 5 \sin x$. 8. $y = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$.

9. $y = \arcsin \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1}$. 10. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} + 3$. 11. $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{(x+1)^2} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

12. $y = \lg(x^2 - 7x + 12) + 3\sqrt{x-2}$. 13. $y = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)}$.

14. $y = \arcsin(3x-2)$. 15. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \arccos(4x+1)$.

16. $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x^2 + 2}$.

Для каждой из следующих функций указать область определения и построить ее график:

17. $y = x^3$. 18. $y = x^{\frac{1}{2}}$. 19. $y = 2^x$. 20. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. 21. $y = \log_2 x$.

22. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. 23. $y = \sin x$. 24. $y = \cos x$. 25. $y = \operatorname{tg} x$.

26. $y = \operatorname{ctg} x$. 27. $y = \operatorname{arctg} x$. 28. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Задания для самостоятельной работы

29. Определить функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую условию $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

30. Дана функция $f(x) = x^3 + 1$. Найти $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f(x-1)$, $f(x)-1$.

31. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \arccos(1 - 2x)$; **б)** $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x - 3)$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\cos x}$; **г)** $y = \ln \frac{x-5}{x^2 - 10x + 24} - \operatorname{arctg} 2x$;

д) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

Ответы: **29.** $f(x) = x^2 - 5x + 6$. **30.** $f(x^2) = x^6 + 1$, $[f(x)]^2 = x^6 + 2x^3 + 1$,

$f(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x$, $f(x) - 1 = x^3$. **31. а)** $[0, 1]$; **б)** $\left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$;

в) $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; **г)** $(4, 5) \cup (6, +\infty)$; **д)** $(-1, 1] \cup [2, 3)$.

1.2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Методом сдвигов и деформаций построить графики следующих функций:

32. $y = |\lg(x+1)|$. 33. $y = \operatorname{arctg} 2x + \frac{\pi}{2}$. 34. $y = 1 - 2^{-|x|+1}$.

35. $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. 36. $y = \left|\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right|$. 37. $y = \left|-2x^2 + 4x + 1\right|$.

38. $y = 1 + 2^{|x+1|}$. 39. $y = |\log_2(1-x)|$. 40. $y = \arcsin\left(1 + \frac{x}{3}\right)$.

41. В полярной системе координат построить точки $M_1\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, $M_2\left(\frac{7\pi}{6}; 3\right)$, $M_3\left(\frac{7\pi}{4}; 4\right)$, $M_4\left(-\frac{2\pi}{3}; 1\right)$.

42. Записать в полярной системе координат уравнения следующих кривых и их:

а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; б) $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$.

43. Построить следующие кривые в полярной системе координат:

а) $\rho = 2a \sin \varphi$; б) $\rho^2 = a \cos 2\varphi$.

Задания для самостоятельной работы

44. Построить следующие кривые в полярной системе координат:

а) $\rho = 4$; б) $\rho = 2 \cos 3\varphi$; в) $\rho = 1 + \sin \varphi$.

45. Методом сдвигов и деформаций построить графики следующих функций:

а) $y = 2 - \ln|x-3|$; б) $y = 3 \left|\cos \frac{x}{2}\right|$; в) $y = 2^{2-3x} + 1$; г) $y = \left|2x^2 - 5x - \frac{7}{8}\right|$.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

46. Используя определение предела доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+2} = 2$.

Построить таблицу $N(\varepsilon)$.

47. Используя логическую символику, записать определения следующих пределов, проиллюстрировать их геометрически:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$.

48. Используя определение предела доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 4$.

Построить таблицу $\delta(\varepsilon)$.

49. Используя определение предела доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$.

50. Существуют ли следующие пределы?

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

51. Используя определения бесконечно больших функций доказать, что

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3} = \infty$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg|x| = +\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$.

52. Используя определение предела доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.

Задания для самостоятельной работы

53. Используя логическую символику, записать определения следующих пределов, проиллюстрировать их геометрически:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

54. С помощью определения предела доказать, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+1}{7n^2-3} = \frac{5}{7}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x} = 2$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x+7) = 13$;

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Вычислить пределы:

$$\begin{aligned} 55. \lim_{x \rightarrow 3} \left(2x - \frac{x^2}{x+1} \right). \quad & 56. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}. \quad & 57. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 + 5}. \quad & 58. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}. \\ 59. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}. \quad & 60. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{27x^3 + 1}{3x^2 + 4x + 1}. \quad & 61. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}. \\ 62. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1}. \quad & 63. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}. \\ 64. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2} - \sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}. \quad & 65. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + 4}. \\ 66. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{2x^4 - 3x^2 + 1}. \quad & 67. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 18}. \quad & 68. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 18}. \\ 69. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^3 - 3x + 1}. \quad & 70. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{x+14}}{x^2 - 4}. \quad & 71. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \sqrt{x+14}}{x^2 - 4}. \\ 72. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 2x^2 + 1}}{3x - 1}. \quad & 73. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}. \quad & 74. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x - 5}{3 - \sqrt{10 - x^2}}. \\ 75. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{x}{x^2 - 9} \right). \quad & 76. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right). \\ 77. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}). \quad & 78. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4}). \\ 79. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}). \quad & 80. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3}). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

$$\begin{aligned} 81. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}. \quad & 82. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right). \quad & 83. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}. \\ 84. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}. \quad & 85. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right). \quad & 86. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}. \end{aligned}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}. \quad 88. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}. \quad 89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}.$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}. \quad 91. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x \right).$$

$$92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}. \quad 93. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}.$$

Ответы: 81. 2. 82. ∞ . 83. 0. 84. 6. 85. $\frac{1}{4}$. 86. ∞ . 87. $\frac{3}{5}$.

88. $\frac{1}{6}$. 89. $\frac{3}{2}$. 90. $3\frac{\sqrt[6]{2}}{2}$. 91. $-\frac{7}{4}$. 92. $\frac{1}{3}$. 93. ∞ .

2.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Используя первый и второй замечательные пределы, вычислить:

$$94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \quad 95. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} \quad 96. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2} \quad 97. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 3x} \quad 99. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x - 4} \quad 100. \lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x - \sin 3}{x^2 - 9} \quad 102. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos 2 - \cos x}{\operatorname{tg}(2 - x)} \quad 103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$104. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x} \quad 105. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 7}\right)^{\frac{x}{3}} \quad 106. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$$

$$107. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 2}\right)^{5x^2 + 2x - 1} \quad 108. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + 1}{1 - 4x^2}\right)^{\frac{6x + 5}{x}}$$

$$109. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x - 2}{2x + 5}\right)^{4x - 1} \quad 110. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x + 3}\right)^{3x + 2}$$

$$111. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \sin^2 x\right)^{\frac{3x + 4}{x^2}} \quad 112. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{4}{x}\right)^{2x + 7}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad 114. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x} \quad 115. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x$$

$$116. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{4x} \quad 117. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \quad 118. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right)$$

$$119. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x \quad 120. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2 + x}\right)^{2x} \quad 121. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 2}{5x - 3}\right)^{\frac{4x + 1}{2}}$$

$$122. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^2\right)^{\frac{4 + 7x}{x^2}} \quad 123. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x + 4}\right)^{1 - 3x}$$

$$124. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 3x^2}{2 + 5x^2} \right)^{\frac{x-1}{4x}}. \quad 125. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{3x-2} \right)^{2-x}.$$

$$126. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{1+3x}{5}}. \quad 127. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 3 \sin \frac{1}{2x^2} \right)^{\frac{x^2-2}{3}}.$$

Ответы: 113. 3. 114. $\frac{7}{3}$. 115. $\frac{1}{\pi}$. 116. $\frac{3}{4}$. 117. 2. 118. 0. 119. 1.

120. e^{-8} . 121. e^2 . 122. e^{12} . 123. e^{-3} . 124. 1. 125. $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$;

0 при $x \rightarrow -\infty$. 126. $e^{\frac{9}{10}}$. 127. $e^{-\frac{1}{2}}$.

2.4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

128. Какие из следующих бесконечно малых имеют порядок высший (низший), чем x , при $x \rightarrow 0$?

а) $10x$; б) x^3 ; в) $\sqrt{3x}$.

129. Определить порядки малости следующих функций:

а) $\frac{4x^2}{3+2x}$ относительно x при $x \rightarrow 0$;

б) $(x^3 - 1)^4$ относительно $(x - 1)$ при $x \rightarrow 1$.

130. Сравнить следующие бесконечно малые с x при $x \rightarrow 0$:

а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; б) $\log_a(1+x)$.

131. Определить порядок малости бесконечно малой $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

132. Доказать, что $\sin x + \operatorname{tg} x \sim 2x$.

Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых и свойства бесконечно малых, вычислить значения следующих пределов:

133. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{2x + 3 \sin^2 x}$. **134.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^4 + \arcsin^3 x}$. **135.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\ln x}$.

136. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$. **137.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + x^2}{\sin 4x - 2x^3}$. **138.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{\operatorname{tg} 3x}$.

139. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \right)$. **140.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3^x - 1) \log_2(5 - x^2)}{2x^2 - 5x + 2}$.

141. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sqrt{1+3x^2} - x - 1}$. **142.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 3x - 1) \left(\sqrt[5]{1-4x^3} - 1 \right)}{2x^3 \left(e^{3x^2} - 1 \right)}$.

143. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + x^2 - 1}{\sin^4 2x + 5x^3}$. **144.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 3 \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. **145.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

146. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{1 + x^2 - e^{3x}}$. **147.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x + \operatorname{tg}^2 3x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$.

148. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x - \cos 3}{\operatorname{tg}(3-x)}$.

149. Найти значение постоянной A , если $\sqrt[3]{x} - 1 \sim A(x - 1)$ при $x \rightarrow 1$.

Задания для самостоятельной работы

Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно x при $x \rightarrow 0$:

150. $\alpha(x) = \frac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. 151. $\alpha(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$. 152. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$.

153. Сравнить бесконечно малые функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 5x^2}}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

при $x \rightarrow \infty$.

Вычислить пределы:

154. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\lg x}$. 155. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$. 156. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$.

157. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$. 158. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+3) - \ln x)$.

159. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$. 160. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\sqrt{x+9} - 3}$.

161. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 7x^2}{\arcsin 3x + 2 \operatorname{arctg} x^2}$.

Ответы: 150. $\frac{3}{2}$. 151. 1. 152. $\frac{1}{2}$. 153. $f(x)$ более высокого порядка

малости, чем $\varphi(x)$, при $x \rightarrow \infty$. 154. $-\ln 10$. 155. 3. 156. $\frac{8}{9}$. 157. e^3 .

158. 3. 159. 1. 160. $\frac{1}{2}$. 161. $\frac{2}{3}$.

2.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

162. Доказать с помощью определения (в терминах приращений), что следующие функции непрерывны на множестве действительных чисел:

а) $y = 2x^3 - 5x - 1$; б) $y = \cos 3x$.

163. На каком множестве точек непрерывна функция $y = \frac{4x^2 + 2x + 1}{\sin^2 x + 5}$?

164. Доказать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет корень на отрезке $[1, 2]$.

Найти точки разрыва следующих функций, исследовать характер этих точек, проиллюстрировать графически:

165. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$. 166. $y = 5 \operatorname{arctg} \frac{2}{3 - x}$. 167. $y = \frac{\cos 3x}{x^2 - 1}$.

168. $y = \sin \frac{\pi}{x}$. 169. $y = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$ 170. $y = \frac{\sin 2x}{3x}$.

171. $y = 2^{\frac{1}{x+1}} - 3$. 172. $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2 \sin x, & x > 0. \end{cases}$

173. При каком значении параметра a функция $y = \begin{cases} 4 + x, & x \leq 2, \\ \frac{ax^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$

непрерывна?

Задания для самостоятельной работы

174. При каком значении параметра a функция $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ ax^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$

непрерывна?

Найти точки разрыва следующих функций, исследовать характер этих точек, проиллюстрировать графически; в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной:

175. $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$. 176. $y = \frac{1}{x} \sin x$. 177. $y = 3^{4-x^2}$.

178. $y = (x-1) \operatorname{arctg} \frac{3}{x+2}$. 179. $y = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

180. $y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ 181. $y = \frac{1}{\frac{1}{2^{3-x}} + 1}$.

Ответы: 174. $a = 2$. 175. $x = 0, x = 1$ - точки разрыва второго рода.

176. $x = 0$ - точка устранимого разрыва, $y(0) = 1$. 177. $x = 2, x = -2$ - точки разрыва второго рода. 178. $x = -2$ - точка разрыва первого рода. 179. $x = 0$ - точка устранимого разрыва, $y(0) = 2$. 180. $x = 1$ - точка разрыва первого рода. 181. $x = 3$ - точка разрыва первого рода.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

182. С помощью определения производной найти $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(1)$, если

а) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; б) $f(x) = \cos 4x$; в) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$.

183. Найти точки, в которых касательная к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ наклонена к оси абсцисс под углом а) 0 ; б) $\frac{\pi}{4}$.

184. Закон движения точки определяется равенством $S = \frac{1}{3t + 2}$. Найти скорость тела в момент времени $t = 2$.

185. Дана функция $y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Является ли она непрерывной в точке $x = 0$? Дифференцируема ли она в этой точке?

Найти производные следующих функций:

186. $y = x^3 + 3x - 4$. 187. $y = 5\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3x^2}$.

188. $y = \sqrt[4]{x} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} \right)$. 189. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. 190. $y = \frac{1 - x^3}{4}$.

191. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x} + 3}$. 192. $y = \frac{2}{(1 - x^2)(1 - 2x^3)}$. 193. $y = (1 + 2x^3)^4$.

194. $y = \frac{x^3 + 2}{(5x + 4)^2}$. 195. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$. 196. $y = \left(\frac{2x + 1}{1 - 4x} \right)^2$.

197. $y = \sqrt{2t^2 + at}$.

Примечание: Здесь и далее a, b, c, d – постоянные.

198. Составить уравнения касательной и нормали к линии $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ в точке с абсциссой а) $x = 1$; б) $x = -2$.

Найти производные следующих функций:

199. $y = 3\sqrt{\frac{1}{1 + x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}$. 200. $y = \frac{5}{(z^2 - z + 1)^2}$. 201. $y = \frac{bx + c}{a}$.

202. $y = \frac{a}{bx + c}$. 203. $y = (4x - 7)(3x + 4)\sqrt[3]{2x + 1}$.

Задания для самостоятельной работы

Пользуясь определением производной, найти $f'(x)$:

204. $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^2}$. 205. $f(x) = \sqrt{x+1}$. 206. $f(x) = 3^{2x}$.

207. $f(x) = \log_2 x$.

Найти производные следующих функций:

208. $y = 3 - 2x + \frac{2}{3}x^4$. 209. $y = -\frac{5x^5}{a^2}$. 210. $y = x^2 \sqrt[3]{x^5 + a}$.

211. $y = \frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$. 212. $y = \frac{a+bx}{c+dx}$. 213. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

214. $y = \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$. 215. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. 216. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

217. $y = (x^3 - x)^6$. 218. $y = \left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:

219. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$. 220. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

221. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t = 5$.

Ответы: 208. $-2 + \frac{8}{3}x^3$. 209. $-\frac{25x^4}{a^2}$. 210. $\frac{\sqrt{x}(19x^5 + 9a)}{6\sqrt[3]{(x^5 + a)^2}}$.

211. $-\frac{3}{5}a \frac{1}{\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. 212. $\frac{bc - ad}{(c + dx)^2}$. 213. $\frac{1 - 4x}{x^2(2x - 1)^2}$.

214. $\frac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2}$. 215. $-\frac{2x}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^4}}$. 216. $\frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$.

217. $6(3x^2 - 1)(x^3 - x)^5$. 218. $\frac{5(x^2 + 2x + 1)(1 + x^2)^4}{(1 + x)^6}$.

219. $7x + y - 3 = 0$, $x - 7y + 71 = 0$. 220. $x - 4y + 4 = 0$, $4x + y - 18 = 0$.

221. 242.

3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Найти производные следующих функций:

222. $y = \sin 5x$. 223. $y = \sin(3x - 1)\cos 2x$. 224. $y = \frac{x}{1 - \cos(x^2 + 1)}$.

225. $z = \operatorname{tg}\left(\frac{t^2}{a} + b\right) + \operatorname{tg} 3$, $z'_t = ?$ 226. $y = \operatorname{ctg}(\sqrt{x} + 2)$.

227. $y = \cos^3 10z$, $y'_z\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$ 228. $y = \operatorname{tg}^5 \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

229. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \sqrt{1-x}}$, $y' = ?$ 230. $y = \cos \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

231. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sin \frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

Найти производные следующих функций:

232. $y = \log_2(1 - 5x)$. 233. $y = \lg(\sqrt{t+1} + \sqrt{t^2+1})$, $y'_t = ?$

234. $y = \sin \frac{1}{x} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\frac{dy}{dx} = ?$ 235. $y = \sqrt[5]{\ln\left(\frac{x+1}{x-1} + 1\right)}$, $y' = ?$

236. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \ln^2(e + \cos x)$ в точке, где $x = \frac{\pi}{2}$.

Найти производные следующих функций:

237. $y = \frac{x-1}{\ln^2 x}$. 238. $y = \sqrt[3]{\ln(x^3 + 1)}$, $y'(1) = ?$ 239. $y = x \cdot 10^{3x-1}$.

240. $y = e^{-x^2} - 2^{\cos x}$, $\frac{dy}{dx} = ?$ 241. $y = (3x + 1)^2 \cdot 4^{\sin^3 2x}$.

242. $y = 2^{3\sqrt{x}}$. 243. $u = e^{\sqrt{a \ln t}}$, $u'_t = ?$ 244. $y = \frac{3\sqrt[4]{x}}{e^{x^2} + 3}$.

245. $y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{2^{3x}} + 6\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

246. $y = \arcsin x + 5 \arccos 2x$, $y'(0) = ?$

247. $y = \operatorname{arctg} 3x + 2 \operatorname{arcctg}(x\sqrt{1-\sqrt{x}})$, $y' = ?$

$$248. y = x \sqrt[4]{\arccos 5x}, \quad \frac{dy}{dx} = ? \quad 249. y = 10 \sqrt{\operatorname{arccotg} \left(1 - e^{-x^2} \right)}, \quad y' = ?$$

$$250. y = \ln \operatorname{arcsin} \frac{e^t - e^{-t}}{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$251. \text{Найти угловой коэффициент касательной к линии } y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{arctg} 2^{-3x}} \text{ в}$$

точке с абсциссой $x = 0$.

252. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке, где $x = 1$.

$$253. \text{Убедиться в том, что функция } y = \frac{\operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти производные следующих функций:

$$254. y = 2 \sin x - 3 \operatorname{tg} x. \quad 255. y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}. \quad 256. y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} \left(x + \frac{1}{x} \right)}.$$

$$257. y = \cos^2 \left(\sin \frac{x}{3} \right). \quad 258. y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}. \quad 259. y = \sqrt{x} \cdot e^{\frac{x}{2}}.$$

$$260. y = \frac{e^{-x^2}}{2x}. \quad 261. y = 2^{\frac{x}{\ln x}}. \quad 262. y = 2^{\sqrt{\sin^3 x}}. \quad 263. y = 3^{2^x}.$$

$$264. y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x. \quad 265. y = \log_2 \ln 2x.$$

$$266. y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}. \quad 267. y = \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}.$$

$$268. y = \operatorname{arctg} \left(x - \sqrt{1+x^2} \right). \quad 269. y = \arccos \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x}.$$

$$270. y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}. \quad 271. y = x^3 \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}. \quad 272. y = x^x.$$

$$273. y = x^{2^x}. \quad 274. y = (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}.$$

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:

$$275. y = \operatorname{tg} 2x, \quad x_0 = 0. \quad 276. y = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

Ответы: 254. $\frac{2 \cos^3 x - 3}{\cos^2 x}$. 255. $\frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

256. $\frac{x^2 - 1}{3x^2 \cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{\left(1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2}}$. 257. $-\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \sin\left(2 \sin \frac{x}{3}\right)$.

258. $\frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$. 259. $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}(1+x)$. 260. $-e^{-x^2} \frac{1+2x^2}{2x^2}$.

261. $2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \cdot \ln 2$. 262. $2^{\sqrt{\sin^3 x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\sin x} \cos x$.

263. $3^{2^x} \cdot 2^x \ln 3 \cdot \ln 2$. 264. $\frac{1}{x} \operatorname{lg}\left(\frac{x^2}{10}\right)$. 265. $\frac{1}{x^{\ln 2 \cdot \ln 2x}}$.

266. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}(ax^2+bx+c)}$. 267. $-\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}}$.

268. $\frac{1}{2(x^2+1)}$. 269. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b \cos x} \operatorname{sgn}(\sin x)$. 270. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}$.

271. $\frac{11x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$. 272. $x^x(\ln x - 1)$.

273. $x^{2^x} 2^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \cdot \ln 2\right)$. 274. $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}} \frac{3 + \ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$.

275. $y - 2x = 0, 2y + x = 0$. 276. $x - y - 1 = 0, x + y - 1 = 0$.

3.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ НЕЯВНО ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Найти производные:

$$277. x^4 + y^3 - 2xy = 0, \quad y' \Big|_{x=1, y=1} = ? \quad 278. x \arcsin \frac{x}{y} + y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$279. e^{xy} + \log_3 x = \cos(x + y), \quad y'_x = ? \quad 280. y = \sin(x + y) + x^2, \quad y'_x = ?$$

281. Составить уравнения касательных и нормалей к линии $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения кривой с осью Ox .

Методом логарифмического дифференцирования найти производные следующих функций:

$$282. y = (\sin x)^{\cos x}, \quad y' = ? \quad 283. y = (\operatorname{tg} 2x)^{e^{\sqrt{x}}}, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$284. y = \frac{\sqrt[4]{x^2 + 7x + 8} \sqrt[6]{x^4 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}. \quad 285. y = \frac{5x^2}{x^2 + 1} \sin^3 2x \sqrt{\arcsin e^{-x}}.$$

Задания для самостоятельной работы

286. Найти значение y'_x в точке $x=1$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $y(1) = 1$.

287. Найти y'_x в точке $(0, 1)$, если $e^y + xy = e$.

Найти производные y'_x :

$$288. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 289. x^4 + y^4 = x^2y^2. \quad 290. 2y \ln y = x.$$

$$291. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

292. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y_0 = 3$.

Ответы: 286. $\frac{4}{3}$. 287. $-\frac{1}{e}$.

$$288. -\frac{b^2x}{a^2y}. \quad 289. \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}. \quad 290. \frac{1}{2(1 + \ln y)}. \quad 291. \frac{2^x(2^y - 1)}{2^y(1 - 2^x)}.$$

$$292. 5x + 6y - 13 = 0, \quad 6x - 5y + 21 = 0.$$

3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти производные следующих функций:

293. $y = x^7 + 5x^3 + 3x - 2$, $y^{(n)} = ?$ 294. $y = \sin^2 3x$, $\left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} = ?$

295. $y = \ln x$, $y^{(n)} = ?$ 296. $y = \sqrt{x}$, $y^{(n)} = ?$

297. Показать, что функция $y = xe^x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + y = 0$.

298. $e^{xy} + \ln x = x + y$, $y''_{xx} = ?$ 299. $y = \sin(x + y) + x^2$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = ?$

300. $x^4 + y^3 - 2xy = \sin x$, $y'''_{xxx} = ?$ 301. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} y'_x = ?$

302. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = 3\sqrt{t}, \end{cases} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=64} = ?$ 303. $\begin{cases} x = 2 \cos^4 t, \\ y = 2 \sin^4 t, \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

304. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^9 + 2, \end{cases} \frac{d^3 y}{dx^3} = ?$ 305. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} y'''_{xxx} = ?$

306. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$;

б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке $M\left(3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), 3\right)$;

в) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ в точке $M(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Задания для самостоятельной работы

Найти производные y'_x параметрически заданных функций:

307. $\begin{cases} x = 2^{-t}, \\ y = 2^{2t}. \end{cases}$ 308. $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$ 309. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Найти производные второго порядка от следующих функций:

$$310. y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}. \quad 311. y = e^{-x^2}. \quad 312. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 313. y = x\sqrt{x}.$$

$$314. \text{ Найти } y'(0), y''(0), y'''(0), \text{ если } y(x) = e^{2x} \sin 3x.$$

$$315. \text{ Найти } y'''(2), \text{ если } y = \ln(x-1).$$

316. Показать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y'' = xy'$.

Найти производные второго порядка от функций $y(x)$, заданных неявно:

$$317. y = 1 + xe^y. \quad 318. y = \operatorname{tg}(x+y). \quad 319. e^{x-y} = xy.$$

Найти производные второго порядка следующих функций, заданных параметрически:

$$320. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases} \quad 321. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases} \quad 322. \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

323. Составить уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2, 2)$ к

графику функции
$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

324. Составить уравнения касательных к кривой $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t. \end{cases}$ в начале

координат и в точке, где $t = \frac{\pi}{4}$.

Ответы: 307. -2^{3t+1} . 308. 1. 309. $\frac{t}{2}$. 310. $-\frac{2}{3 \ln 2} \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

$$311. 2e^{-x^2}(2x^2-1). \quad 312. \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

$$313. x^{\sqrt{x}-1} \left(2 + \ln x \right) \left(\frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\ln x)} \right).$$

$$314. y'(0)=3, y''(0)=12, y'''(0)=9. \quad 315. 2. \quad 317. e^{2y} \frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}.$$

$$318. -\frac{2(1+y^2)}{y^5}. \quad 319. \frac{y[(1+y)^2 + (x-1)^2]}{x^2(1+y)^3}. \quad 320. -\frac{2}{1-t^2}. \quad 321. 2(1+t^2).$$

$$322. \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}. \quad 323. 7x - 10y + 6 = 0, \quad 10x + 7y - 34 = 0.$$

$$324. y = 0, \quad (\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.$$

3.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

325. С помощью определения вычислить дифференциал функции $y = 3x^2 + 5x + 1$.

Найти дифференциалы dy следующих функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

326. $y = \operatorname{ctg} 3x$. **327.** $y = 5\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}$. **328.** $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}$.

329. $y = \frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. **330.** $\sin(x + y) = \log_3 x + \arccos y$.

331. $y = \cos(x^2 + y^2) - \sin x - 1$.

Вычислить приближённо:

332. $\ln(1,013)$. **333.** $\sqrt[3]{7}$. **334.** $\arcsin 0,05$.

335. $f(1,2)$, если $f(x) = e^{x^2 - x}$.

Найти дифференциалы высших порядков:

336. $y = \frac{\ln x}{x}$, $d^2 y = ?$ **337.** $z = \sqrt{1 - x^2}$, $d^2 z \Big|_{x=\frac{1}{2}, \Delta x=0,1} = ?$

338. $y = \frac{1}{x^2}$, $d^n y = ?$ **339.** $x^2 + x = y - \sin y$, $d^2 y = ?$

340. $x^3 + y^3 = x + y$, $d^2 y = ?$

Задания для самостоятельной работы

Найти дифференциалы dy следующих функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

341. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - 5$. **342.** $y = \sin x - x \cos x + 4$.

343. $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. **344.** $y = x \ln x - x + 1$.

345. $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$. **346.** $y^5 + y - x^2 = 1$.

347. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. **348.** $e^y = x + y$.

Вычислить приближённо:

349. $\operatorname{arctg} 1,04$. **350.** $\ln 1,2$.

Найти дифференциалы второго порядка следующих функций:

351. $y = a \sin(bx + c)$. 352. $y = 3^{-x}$. 353. $xy + y^2 = 1$, $d^2 y = ?$

Ответы: 341. $2\sqrt{a^2 - x^2} dx$. 342. $x \sin x dx$. 343. $\operatorname{arctg} x dx$. 344. $\ln x dx$.

345. $\arcsin x dx$. 346. $\frac{2x dx}{1 + 5y^2}$. 347. $\frac{x + y}{x - y} dx$. 348. $\frac{dx}{e^y - 1}$.

349. 0,805. 350. 0,2. 351. $-ab^2 \sin(bx + c) dx^2$.

352. $\ln 9 \cdot 3^{-x^2} (2x^2 \ln 3 - 1) dx^2$. 353. $\frac{2 dx^2}{(x + 2y)^3}$.

3.6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Используя правило Лопиталья, вычислить значения следующих пределов:

$$354. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln^2 x}. \quad 355. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x-2} - 1}{x^2 - 4}. \quad 356. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$357. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}. \quad 358. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^2}. \quad 359. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}.$$

$$360. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}. \quad 361. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x.$$

$$362. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}. \quad 363. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right). \quad 364. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$365. \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin^2 x}. \quad 366. \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}. \quad 367. \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x + x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$368. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}. \quad 369. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1+x)}. \quad 370. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin x \operatorname{tg} x}.$$

$$371. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}. \quad 372. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \ln \ln x}{\sqrt[3]{2x} \sqrt{\ln x}}. \quad 373. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$374. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Задания для самостоятельной работы

Используя правило Лопиталья, вычислить значения следующих пределов:

$$375. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}. \quad 376. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}. \quad 377. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$378. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}. \quad 379. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}. \quad 380. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$381. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{ctg} \pi(x-1). \quad 382. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x}. \quad 383. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

$$384. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right). \quad 385. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}. \quad 386. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$387. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}. \quad 388. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2^x \right)^{\frac{1}{x}}. \quad 389. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

Ответы: 375. $\frac{2}{3}$. 376. $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$. 377. $\frac{a^2}{b^2}$. 378. $\frac{1}{2}$. 379. $\frac{1}{2}$. 380. $-\infty$.

381. $\frac{1}{\pi}$. 382. a . 383. 0 . 384. -1 . 385. 1 . 386. e . 387. 1 . 388. 2 .

389. 1 .

3.7. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ

Найти интервалы монотонности и экстремумы следующих функций:

390. $y = 2x^2 - \ln x$. 391. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+5}$. 392. $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

393. $y = (x-1)^5(2x+1)^4$. 394. $\frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

Используя производные высших порядков, исследовать следующие функции на экстремум:

395. $y = 2x^3 - 3x^2$. 396. $y = x^2 e^{-x}$. 397. $y = (x+3)^5 - 2(x+3)^6$.

Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значения следующих функций на указанных отрезках:

398. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1, 2]$.

399. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1, 5]$ и $[-10, 10]$.

400. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0, 1]$.

401. Объем открытого бассейна с квадратным дном равен 33 м^3 . Определить размеры бассейна так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материалов.

Задания для самостоятельной работы

Найти интервалы монотонности и экстремумы следующих функций:

402. $y = x\sqrt{1-x^2}$. 403. $y = \frac{2x^2-1}{x^4}$. 404. $y = x - 2\ln x$.

405. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значения следующих функций на указанных отрезках:

406. $y = -3x^4 + 6x^2$, $[-2, 2]$. 407. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0, 4]$.

408. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

Ответы: 402. На $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ убывает, на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ возрастает;

$y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$. 403. На $(-\infty, -1); (0, 1)$ возрастает,

на $(-1, 0); (1, +\infty)$ убывает; $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1$. 404. На $(0, 2)$ убывает, на $(2, +\infty)$ возрастает; $y_{\min} = y(2) = 2(1 - \ln 2) \approx 0,61$. 405. Возрастает во всей области определения.

406. $M = 3$, $m = -24$. 407. $M = 8$, $m = 0$.

408. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

3.8. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА КРИВОЙ. АСИМПТОТЫ

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков следующих функций:

409. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. 410. $y = x \operatorname{arctg} x$. 411. $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$.

412. $y = \ln(1 + x^2)$.

Найти асимптоты графиков следующих функций:

413. $y = \frac{x^3}{2(x+2)^2}$. 414. $y = xe^{-\frac{2}{x}} + 1$. 415. $y = x \cdot 2^x$.

Выполнить полное исследование и построить графики следующих функций:

416. $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$. 417. $y = \ln \sin x$.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить полное исследование и построить графики следующих функций:

$$418. y = \frac{x}{1+x^2}. \quad 419. y = \frac{x^3}{3-x^2}. \quad 420. y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Ответы: 418. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$, $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}$. Точки перегиба графика

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

419. Определена везде, кроме $x = \pm\sqrt{3}$. График симметричен относительно начала координат. $y_{\min} = y(-3) = 4,5$, $y_{\max} = y(3) = -4,5$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптоты $x + y = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$.

420. Определена везде, кроме $x = 0$. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$, $y = -1$.

4.1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Найти области определения следующих функций, построить эти области:

421. $z = 4 - x^2 - y^2$. Построить также график этой функции.

422. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$. 423. $z = \sqrt{y^2 - x}$. 424. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

425. $z = \ln(x^2 + y^2 - 2x) + \arcsin(x - 2)$. 426. $z = \sqrt[4]{y - \frac{2}{x}} - \frac{\sin y}{\log_2(x - y)}$.

Вычислить значения следующих пределов:

427. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1} - 1 \right)$. 428. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2} (e^{y^2} - e^{-x^2})}{x^2 + y^2}$.

429. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$. 430. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - \cos xy}{x^2 y}$.

431. Найти прямые, вдоль которых функция $z = \frac{x}{y + x}$ имеет в точке $(0, 0)$

пределы, равные 1, 2, -2.

432. Доказать с помощью определения (в терминах приращений), что функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в каждой точке \mathbb{R}^2 .

Найти точки, линии, поверхности разрыва следующих функций:

433. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$. 434. $z = \frac{1}{(y - x)^2}$. 435. $u = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}$.

436. $u = \frac{1}{(x - 1)(y^2 + z^2)}$.

Найти частные производные первого порядка следующих функций:

437. $z = x + \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + 1)$. 438. $u = z^3 \cdot 3^x$ в точке $(1, 1, 1)$.

439. $z = \operatorname{ctg} x^y$. 440. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$, $z'y \Big|_{x=1, y=1} = ?$

Задания для самостоятельной работы

Найти области определения следующих функций, построить эти области:

$$441. z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y}. \quad 442. z = \frac{2 \ln y}{\sqrt{x + 2y - 4}}. \quad 443. z = \frac{\operatorname{arctg} xy}{\sqrt[4]{x^2 - 2y}}.$$

$$444. u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2). \quad 445. z = \arccos \frac{y}{3} \cdot \ln(x + y + 2) - \sqrt{2 - x - y}.$$

Вычислить значения следующих пределов:

$$446. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 447. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Найти точки, линии, поверхности разрыва следующих функций:

$$448. z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}. \quad 449. z = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

$$450. z = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - x)}. \quad 451. u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Найти частные производные первого порядка следующих функций:

$$452. z = xy + \frac{y}{x}. \quad 453. z = xe^{-xy}. \quad 454. z = \frac{\cos y^2}{x}.$$

$$455. z = \ln(x^2 + y^2). \quad 456. z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad 457. u = \left(\frac{y}{x}\right)^z.$$

Ответы: 441. $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$. 442. $x + 2y > 4, y > 0$. 443. $y < \frac{x^2}{2}$.

444. $x^2 + y^2 - z^2 < 1$. 445. $-3 \leq y \leq 3, x + y > -2, x + y \leq 2$. 446. e .

447. 1. 448. Точка $(1, -1)$. 449. Линия разрыва – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

450. Линии разрыва – прямая $x + y = 0$ и парабола $y^2 = x$. 451. Поверхность

разрыва – конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. 452. $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x}$.

453. $\frac{\partial z}{\partial x} = (1 - xy)e^{-xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}$. 454. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y^2}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \sin y^2}{x}$.

455. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$. 456. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \operatorname{sgn} x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{|x|}{x^2 + y^2}$.

457. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{y} \left(\frac{y}{x}\right)^z, \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln \frac{y}{x}$.

4.2. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти полные дифференциалы первого порядка следующих функций:

458. $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке $(0, 1)$ при $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

459. $u = \log_3(x^3 - 2y^3 - z^3)$. 460. $u = x^y + y^z + z^y$. 461. $z = \sin \frac{x+y}{1-xy}$.

Вычислить приближённо:

462. $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$. 463. $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

464. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $(2, 1, 4)$.

465. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ и ординатой $y = 1$.

Найти производные следующих сложных функций по независимым переменным:

466. $z = \ln(u^2 + v^3 + w^4)$, где $u = 2x + 3y$, $v = \frac{x}{y}$, $w = xy^2$.

467. $z = e^{x-3y}$, где $x = \sin t$, $y = t^3$. 468. $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = x^2$.

469. $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

470. Пусть $f(x, y)$ - дифференцируемая функция. Убедиться, что функция $z = f(x^2 + y^2)$ удовлетворяет соотношению $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

471. Убедиться, что функция $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$.

472. Найти полный дифференциал dz , если $z = \sin^2(x + 2y)$, где $x = \sqrt{u}$, $y = u^2 + v^3$.

Задания для самостоятельной работы

Найти полные дифференциалы первого порядка следующих функций:

473. $z = \arcsin \frac{x}{y}$. 474. $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$. 475. $u = x^{yz}$. 476. $z = \ln \cos \frac{x}{y}$.

477. Найти значение полного дифференциала функции $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

478. Вычислить приближённо $1,04^{2,02}$.

479. Вычислить приближённо $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$.

480. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $(3, 4, -7)$.

481. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$ и ординатой $y = \frac{\pi}{4}$.

Найти производные следующих сложных функций по независимым переменным:

482. $u = z^2 + y^2 + zy$, где $z = \sin t$, $y = e^t$.

483. $z = \arcsin(x - y)$, где $x = 3t$, $y = 4t^3$.

484. $z = x^2 \ln y$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

485. $u = \arcsin \frac{x}{z}$, где $z = \sqrt{x^2 + 1}$.

Ответы: **473.** $\frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$. **474.** $\frac{4xy(xdy - ydx)}{(x^2 - y^2)^2}$.

475. $x^{zy-1}(yzdx + zxdy + xy \ln xdz)$. **476.** $\frac{1}{y^2} \operatorname{tg} \frac{x}{y}(xdy - ydx)$. **477.** 0,08.

478. 1,08. **479.** 2,95. **480.** $17x + 11y + 5z = 60$, $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$.

481. $x - y - 2z + 1 = 0$, $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}$.

482. $\frac{du}{dt} = \sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)$. **483.** $\frac{dz}{dt} = \frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}$.

484. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2 \frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -2 \frac{u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}$.

485. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Найти производные и полные дифференциалы неявно заданных функций:

486. $\ln(\sqrt{x^2 + y^2} + 1) = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = ?$

487. $e^z - xyz - 2 = 0, \quad z'_x = ? \quad z'_y = ?$

488. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

489. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz = 2y - 3, \quad dz = ?$

490. $z^3 - 3(x+y)u^2 + u^3 = 0, \quad du = ?$

500. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = y \ln x$.

501. Найти z'''_{xxx}, z'''_{yxx} , если $z = \sin^2(ax + by)$.

502. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = \ln(x - 2y)$.

503. Убедиться, что $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = x^y$.

504. Показать, что функция $y = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, если φ и ψ - дифференцируемые функции.

505. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ к переменным $\xi = 2x - y$

и $\eta = x + y$.

506. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ в точке $(-1, 2, 1)$.

507. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ в точке с абсциссой $x = 2$ и аппликатой $z = 6$ ($y > 0$).

Найти полные дифференциалы второго порядка следующих функций:

508. $z = \ln(x - y)$. 509. $z = xy^3 - x^3 y$.

Задания для самостоятельной работы

510. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.

511. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

512. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1, -2, 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

513. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z \ln(x + z) = \frac{xy}{z}$.

514. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x \sin(ax + by)$.

515. Найти $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy}(0, 1)$, если $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

Найти дифференциалы первого и второго порядка следующих функций:

516. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$. 517. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. 518. $z = x \ln \frac{y}{x}$.

519. Найти полный дифференциал первого порядка dz , если $yz = \arctg(xz)$.

520. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$ в точке $(2, 1, 3)$.

521. Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к поверхности $z^2 + 4z + x^2 = 0$ в точках пересечения с осью Oz .

Ответы: 510. $\frac{y^2 e^{2x} - x e^{2y}}{x^2 e^{2y} - y e^{2x}}$. 511. $\frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$. 512. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

513. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz(x + z) - z^3}{z^3 + 2xy(x + z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz(x + z)}{z^3 + 2xy(x + z)}$.

515. $f'''_{xxx}(0, 1) = 0, f'''_{xxy}(0, 1) = 2, f'''_{xyy}(0, 1) = 0, f'''_{yyy}(0, 1) = 0$.

516. $dz = 3x(x + 2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy, d^2 z = 6((x + y)dx^2 + 2x dx dy - y dy^2)$.

517. $dz = (x dy - y dx) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right), d^2 z = 2 \left(\frac{y}{x^3} dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx dy - \frac{x}{y^3} dy^2 \right)$.

518. $dz = \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) dx + \frac{x}{y} dy, d^2 z = -\frac{1}{x} dx^2 + \frac{2}{y} dx dy - \frac{x}{y^2} dy^2$.

519. $\frac{zdx - z(1 + x^2 z^2)dy}{y(1 + x^2 z^2) - x}$. 520. $2x + 7y - 5z + 4 = 0, \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}$.

521. $z = 0, \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ в точке $(0, 0, 0)$; $z = -4, \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+4}{1}$ в точке $(0, 0, -4)$.

4.4. ЭКСТЕРМУМ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Исследовать на экстремум следующие функции:

522. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. 523. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$.

524. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$. 525. $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$.

Исследовать следующие функции на условный экстремум, используя метод множителей Лагранжа:

526. $z = xy^2$ при условии $x + 2y = 1$.

527. $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

528. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

529. $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

530. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

531. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ при $x \in [-2, 2]$.

Задания для самостоятельной работы

Найти экстремумы следующих функций:

532. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. 533. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

534. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, ($x > 0, y > 0$). 535. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

536. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

Исследовать следующие функции на условный экстремум, используя метод множителей Лагранжа:

537. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$.

538. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

539. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

540. $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.

541. Найти наибольшее значение функции $z = x - 2y + 5$ в следующих областях: а) $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$; б) $\{x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 1\}$.

- Ответы:** 532. $z_{\min} = z(0, 3) = -9$. 533. $z_{\min} = z\left(0, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$; в
стационарной точке $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ экстремума нет. 534. $z_{\min} = z(5, 2) = 30$.
535. $z_{\max} = z(2, -2) = 8$. 536. $z_{\min} = z(-1, 1) = 0$.
537. $z_{\min} = z\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$ 538. $z_{\min} = z(1, 1) = 2$.
539. $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - 2\sqrt{2}$, $z_{\max} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$.
540. $z_{\min} = z(1, -1) = z(-1, 1) = -1$, $z_{\max} = z(1, 1) = z(-1, -1) = 1$.
541. а) $z_{\text{наиб}} = z(1, 0) = 6$; б) $z_{\text{наиб}} = z(0, 0) = 5$.

5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

542. Построить на комплексной плоскости следующие точки:

а) $z_1 = 2 - 3i$; б) $z_2 = -1$; в) $z_3 = \frac{i}{3}$; г) $z_4 = -i\sqrt{2}$.

543. Выполнить действия с комплексными числами:

а) $(1 - 2i)(5 - i)$; б) $(1 - i)^3$; в) $\frac{2i - 1}{3i + 5}$; г) $\frac{1 + i}{1 - i}$; д) i^6 ; е) $(-i)^{19}$;
ж) i^{141} ; з) i^{92} ; и) i^{94} .

544. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: а) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$; б) $z = -2$; в) $z_3 = -i$.

545. Используя формулу Муавра, возвести комплексное число в степень. Результат представить в алгебраической форме:

а) $(2 - 2i)^{10}$; б) $(1 + \sqrt{3}i)^{40}$.

546. Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

547. Представить следующие комплексные числа в алгебраической форме:

а) $e^{2 + \frac{\pi}{4}i}$; б) e^{-i} .

548. Найти все корни следующих уравнений. Записать их в тригонометрической и показательной формах:

а) $z^2 + 4 = 0$; б) $z^3 + 27 = 0$; в) $z^2 + 6z + 18 = 0$.

549. Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

а) $|z - 2| = 3$; б) $|z + i| \leq 1$; в) $|z - 1 + i| > 3$; г) $\operatorname{Re} z = 1$; д) $\operatorname{Im} z \leq 2$;

е) $\arg z = 1$; ж) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z < 0$; з) $1 \leq |z| \leq 2$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

550. Выразить $\cos 3\varphi$ через $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.

551. Выразить $\sin 4\varphi$ через $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить действия с комплексными числами:

552. $\frac{1}{1 + 4i} + \frac{1}{4 - i}$. 553. $(2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$. 554. $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$.

Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости:

$$555. -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad 556. \frac{1-i}{1+i}.$$

Используя формулу Муавра, возвести комплексное число в степень. Результат представить в алгебраической форме:

$$557. (1+i)^{10}. \quad 558. \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}.$$

559. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-1}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

560. Найти все значения корня $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Решить следующие уравнения:

$$561. z^2 + 2z + 5 = 0. \quad 562. 4z^2 - 2z + 1 = 0. \quad 563. z^3 = 8.$$

Ответы: 552. $\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$. 553. $-29 + 22i$. 554. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

$$555. \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}. \quad 556. \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}. \quad 557. 32i \quad 558. 512(1-\sqrt{3}i).$$

$$559. \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i). \quad 560. \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}i). \quad 561. \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

$$562. -2+i, \quad -3+i. \quad 563. 2, \quad -1 \pm \sqrt{3}i.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа – М.: Наука, 1985. – 384 с.
2. Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравцов В.К., Сильванович А.П. Руководство к решению задач по высшей математике: В 2 ч. – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – 749 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 304 с.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по высшей математике – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов: В 2 т. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 970 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов и др.; Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1981. – 464 с.

Учебное издание

*Денискина Екатерина Александровна,
Файницкий Юрий Львович*

ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

Методические разработки для практических занятий

Технический редактор Ф. В. Г р е ч н и к о в
Редакторская обработка М. Г. Б о к а р е в а, А. А. Г н у т о в а а
Корректорская обработка С. А. Н е ч и т а й л о
Доверстка Н. А. Д о ц е н к о, А. А. Г н у т о в а а
Донабор А. А. Г н у т о в а а

Подписано в печать 21.11.2006 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,21. Печ. л. 2,25.

Тираж экз. Заказ . ИП – 22/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.