

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

О. А. ВАСИЛЬЕВА, С. А. МИХАЛКИНА

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
В ТЕОРИИ ПОЛЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных
технологий"**

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. В. Г у м е н н и к о в а

Васильева О. А., Михалкина С. А.

Применение функций нескольких переменных в теории поля:
метод. указания / *О. А. Васильева, С. А. Михалкина.* – Самара :
Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 25 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по теории скалярных и векторных полей, а также образцы решения задач по теме «Применение функций нескольких переменных в теории поля». Предлагаются индивидуальные задания для выполнения типовых расчетов.

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов всех специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 512.623 (075)

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

1. Скалярное поле и его характеристики.....	4
1.1. Геометрические характеристики.....	4
1.2. Оператор Гамильтона.....	4
1.3. Производная по направлению.....	5
1.4. Градиент и его свойства.....	5
2. Векторное поле и его характеристики.....	7
2.1. Геометрические характеристики.....	7
2.2. Дивергенция и ее свойства.....	7
2.3. Соленоидальное поле.....	8
2.4. Ротор и его свойства.....	8
2.5. Потенциальное поле.....	9
2.6. Действия с вектором $\bar{\nabla}$	10
2.7. Дифференциальные операции второго порядка.....	11
2.8. Оператор Лапласа.....	11
3. Краткая справка характеристик скалярных и векторных полей.....	13
4. Примеры решения задач.....	14
5. Индивидуальные задания.....	18
6. Список рекомендуемой литературы.....	25

1. Скалярное поле и его характеристики

1.1. Геометрические характеристики

Пространство (или часть его V), в каждой точке которого определена скалярная величина, называется **скалярным полем**.

Таким образом, скалярное поле определяется числовой функцией $u = u(x, y, z)$, заданной в некоторой области V пространства. В этом случае будем говорить, что задано поле u . Примерами скалярных полей являются поле температур тела, поле давлений в некотором объеме и др.

Если скалярное поле задано функцией двух переменных $u = u(x, y)$, оно называется **плоским**.

Графически скалярное поле изображается с помощью **поверхностей уровня**, в каждой точке которых значение поля постоянно, т.е. поверхность уровня скалярного поля u определяется равенством $u(x, y, z) = C$. Примером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности в электростатическом поле.

Если поле плоское, то равенство вида $u(x, y) = C$ определяет **линию уровня поля**. Примерами линий уровня являются изобары (линии одинакового давления), линии одинаковой высоты на топографических картах и т.п.

1.2. Оператор Гамильтона

Символический вектор $\bar{\nabla}$ «набла» с координатами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ вида

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

называется **оператором Гамильтона**. Его действие на скалярную функцию u определяется по правилу

$$\bar{\nabla} u = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \bar{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

1.3. Производная по направлению

Пусть задано скалярное поле $u = u(x, y, z)$. Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ и луч l , выходящий из точки M в направлении единичного вектора

$$\bar{l}_0 = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$$

и пусть $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ другая точка этого луча.

Производной скалярного поля $u(M)$ по направлению l называется соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|},$$

где $\Delta l = |MM_1|$.

Производную по направлению можно вычислить по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные функции $u = u(x, y, z)$,

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы направления l . Таким образом, единичный вектор заданного направления равен $\bar{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Производная поля в данной точке M_0 по направлению l характеризует скорость изменения поля в данном направлении l .

Если $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$, то поле $u = u(x, y, z)$ возрастает в данном направлении,

если $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} < 0$, то поле $u = u(x, y, z)$ убывает в данном направлении.

1.4. Градиент и его свойства

Градиентом скалярного поля $u(M)$ называется вектор

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}. \quad (2)$$

Свойства градиента

1. Если $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ дифференцируемые функции,

C – постоянная, то справедливы следующие соотношения:

1.1. $\mathbf{grad}(u \pm v) = \mathbf{grad} u \pm \mathbf{grad} v$;

1.2. $\mathbf{grad}(C + u) = \mathbf{grad} u$;

1.3. $\mathbf{grad}(Cu) = C \mathbf{grad} u$;

1.4. $\mathbf{grad}(uv) = v \mathbf{grad} u + u \mathbf{grad} v$;

1.5. $\mathbf{grad}(u^n) = nu^{n-1} \mathbf{grad} u$;

1.6. $\mathbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \mathbf{grad} u - u \mathbf{grad} v}{v^2}; v \neq 0$.

2. Градиент скалярного поля $u = u(M_0)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через эту точку. Таким образом, вектор $\mathbf{grad} u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля u в сторону наибольшего возрастания этого поля.

3. Градиент скалярного поля $u = u(M_0)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направлен в сторону наибыстрейшего возрастания поля в этой точке, а модуль градиента численно равен скорости наибыстрейшего возрастания функции в этой точке.

4. Градиент скалярного поля u можно представить как действие оператора Гамильтона на скалярную функцию по правилу

$$\bar{\nabla} u = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \bar{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{grad} u,$$

т.е. $\mathbf{grad} u = \bar{\nabla} u$.

5. Связь между градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ и производной скалярного поля по направлению l выражается формулой: $\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{grad} u \cdot \bar{l}_0$.

6. Производная поля u в данном направлении l равна проекции градиента на направление дифференцирования: $\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{\nabla} u \cdot \bar{l}_0$.

Из выше указанных свойств градиента следует, что $\text{grad} u$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ определяется самим полем и не зависит от системы координат.

2. Векторное поле и его характеристики

2.1. Геометрические характеристики

Если каждой точке $M(x, y, z)$ из области V поставлен в соответствие вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то говорят, что в некоторой области V задано векторное поле. Векторное поле может быть представлено в виде

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – скалярные функции.

Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле электрической напряженности и др.

Одной из важных характеристик векторного поля является векторная (силовая) линия поля. **Векторной линией** поля \vec{F} называется кривая, в каждой точке M которой касательная совпадает с направлением поля \vec{F} .

Примерами векторных линий могут служить линии тока жидкости, силовые линии магнитного поля и др.

Векторные линии поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ можно найти из системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Пространственные области, целиком составленные из векторных линий, называются **векторными трубками**.

2.2. Дивергенция и ее свойства

Скалярной характеристикой векторного поля является **дивергенция**, которая вычисляется по формуле

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

С точки зрения гидродинамики: если \vec{F} – поле скоростей текущей жидкости, то числовое значение дивергенции векторного поля \vec{F} в данной точке M характеризует **интенсивность** источников или стоков в этой точке. Если $\operatorname{div} \vec{F}(M) > 0$, то в точке M – источник, если $\operatorname{div} \vec{F}(M) < 0$, то в точке M – сток. Если $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$, в точке M нет ни источников, ни стоков.

Свойства дивергенции

1. $\operatorname{div} (\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$;
2. $\operatorname{div} (\vec{C}) = 0$, где \vec{C} – постоянный вектор;
3. $\operatorname{div} (u \vec{F}) = u \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \mathbf{grad} u$, где $u = u(x, y, z)$ – скалярная функция;
4. $\operatorname{div} (u \vec{C}) = \vec{C} \cdot \mathbf{grad} u$, где \vec{C} – постоянный вектор;
5. Дивергенцию векторного поля \vec{F} можно представить как скалярное произведение оператора Гамильтона и векторной функции \vec{F} : $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

2.3. Соленоидальное поле

Векторное поле \vec{F} называется **соленоидальным**, если дивергенция этого поля тождественно равна нулю во всех точках некоторой области V :

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) \equiv 0, \quad \forall M \in V.$$

Примером соленоидального поля может служить поле скоростей несжимаемой жидкости, при отсутствии стоков и источников; магнитное поле, генерированное катушкой – соленоидом.

2.4. Ротор и его свойства

Ротором (вихрем) векторного поля

$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется вектор

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Ротор векторного поля вектор $\vec{F}(M)$ удобно записывать в виде символического определителя

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Главным свойством ротора является то, что $\mathbf{rot} \vec{F}$ не зависит от системы координат, а определяется исходным векторным полем.

Отличный от нуля вектор $\mathbf{rot} \vec{F}$ свидетельствует о вращении векторного поля \vec{F} .

Свойства ротора

1. $\mathbf{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \mathbf{rot} \vec{F} + \mathbf{rot} \vec{G}$;
2. $\mathbf{rot} \vec{C} = 0$, где \vec{C} – постоянный вектор;
3. $\mathbf{rot}(u\vec{F}) = u \mathbf{rot} \vec{F} + \mathbf{grad} u \times \vec{F}$, где $u = u(x, y, z)$ - скалярная функция;
4. Ротор векторного поля равен векторному произведению вектора «набла» $\vec{\nabla}$ на вектор \vec{F} : $\mathbf{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

2.5. Потенциальное поле

Векторное поле \vec{F} называется **потенциальным**, если ротор этого поля тождественно равен нулю во всех точках некоторой области V :

$$\mathbf{rot} \vec{F}(M) \equiv 0, \quad \forall M \in V.$$

В качестве примеров потенциальных полей можно привести следующие поля: поле притяжений к центру, электрическое поле напряженностей точечного заряда.

Отметим следующий важный факт. Работа векторного поля \vec{F} по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

2.6. Действия с вектором $\bar{\nabla}$

Пусть $u = u(x, y, z)$ – скалярное поле, а $\bar{F} = (P, Q, R)$ – векторное поле.

Напомним, что символический вектор «набла» имеет следующие координаты

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Его действие на скалярные и векторные поля определяется следующим образом:

$\text{div } \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$ – скалярная величина;

$\text{rot } \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F}$ – вектор;

$\text{grad } u = \bar{\nabla} u$ – вектор.

Оператор $\bar{\nabla}$ не является вектором в классическом понимании этого слова. Наряду с векторной природой «набла» имеет и дифференциальную природу. Если оператор $\bar{\nabla}$ действует на произведение, необходимо применять его к каждому сомножителю отдельно, считая другой сомножитель постоянным. Затем, пользуясь правилами векторной алгебры, следует преобразовать каждое слагаемое так, чтобы оператор $\bar{\nabla}$ стоял перед последним сомножителем.

Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком « \downarrow » тот сомножитель, к которому оператор $\bar{\nabla}$ должен применяться. Для иллюстрации соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

$$1. \bar{\nabla}(uv) = \bar{\nabla} \downarrow u v + \bar{\nabla} u \downarrow v = v \bar{\nabla} u + u \bar{\nabla} v, \text{ т.е. в обычных обозначениях}$$

$$\text{grad}(uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v;$$

$$2. \text{div}(u\bar{F}) = \bar{\nabla} \cdot u\bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \downarrow u \bar{F} + \bar{\nabla} \cdot u \downarrow \bar{F} = \bar{\nabla} u \cdot \bar{F} + u(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}).$$

Множители на которые $\bar{\nabla}$ не действует, можно «высвободить» из-под оператора $\bar{\nabla}$, т.е. в обычных обозначениях $\text{div}(u\bar{F}) = \bar{F} \cdot \text{grad } u + u \text{div } \bar{F}$;

$$3. \text{rot}(u\bar{F}) = \bar{\nabla} \times u\bar{F} = \bar{\nabla} \times \downarrow u \bar{F} = \bar{\nabla} \times u \downarrow \bar{F} = \bar{\nabla} u \times \bar{F} + u(\bar{\nabla} \times \bar{F}), \text{ т.е. в обычных обозначениях } \text{rot}(u\bar{F}) = \text{grad } u \times \bar{F} + u \text{rot } \bar{F}.$$

2.7. Дифференциальные операции второго порядка

В предыдущих пунктах были введены понятия градиента, дивергенции и ротора. В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т.е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Предполагаем, что функции u, P, Q, R достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. К дифференциальным операциям второго порядка относятся следующие: $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F}$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F}$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F}$.

С помощью оператора «набла» их можно записать следующим образом:

1. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} u$;
2. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} u$;
3. $\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F} = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F})$;
4. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F})$;
5. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{F})$.

2.8. Оператор Лапласа

Оператором Лапласа Δ называется оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применив его к скалярной функции u , получим

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа Δ символически можно получить как скалярный квадрат оператора $\bar{\nabla}$:

$$\bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Получим явные выражения некоторых дифференциальных операций второго порядка:

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} u = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

Итак, $\operatorname{div} \mathbf{grad} u = \Delta u$.

Можно показать, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} \equiv 0$, а $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \bar{F} - \Delta \bar{F}$.

Уравнение $\Delta u = 0$ называется **уравнением Лапласа**. Оно используется при описании различных установившихся процессов, например установившегося движения несжимаемой жидкости и др. Скалярное поле $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется **гармоническим**.

3. Краткая справка характеристик скалярных и векторных полей

Скалярное поле $u = u(x, y, z)$				Векторное поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$			
Геометрические характеристики							
<i>Поверхности уровня</i> – множества точек пространства, на которых значение поля постоянно, т.е. $u(x, y, z) = const$.				<i>Векторные линии</i> – кривые, в каждой точке которых вектор \vec{F} направлен по касательной к этой кривой.			
Аналитические скалярные характеристики							
<i>Производная по направлению</i> – характеризует скорость изменения поля в данном направлении.				<i>Дивергенция</i> – характеризует объемную плотность потока вектора.			
Формула для вычислений							
$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$ где $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – орт вектора направления \vec{l} .				$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$			
Применение							
$\frac{\partial u}{\partial l}$	> 0	< 0	= 0	$\operatorname{div} \vec{F}(M)$	> 0	< 0	= 0
поле u в точке M	возрастает в направлении \vec{l}	убывает в направлении \vec{l}	стационарно	в точке M	источник	сток	нет ни источника ни стока
				Если во всех точках поля $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$, то поле <i>соленоидальное</i> .			
Аналитические векторные характеристики							
<i>Градиент</i> – вектор, который указывает направление наибольшего возрастания поля в точке, и расположенный перпендикулярно поверхности уровня, проходящей через эту точку.				<i>Ротор</i> – характеризует плотность вихрей.			
Формула для вычислений							
$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$				$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$			
Применение							
1) $\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0$; 2) Поверхность $S: G(x, y, z) = 0$, то нормаль \vec{n} к поверхности S $\vec{n} = \pm \operatorname{grad} G$.				Если во всех точках поля $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv 0$, то поле <i>потенциальное</i> .			

4. Примеры решения задач

Задача № 1

Найдите производную скалярного поля $u = x^2\sqrt{y} + \sqrt{4 - 2z^2}$ в точке $M_0(2, 1, 0)$ по направлению к точке $M_1(4, 2, 2)$. Определите характер изменения поля в точке M_0 .

Решение

Воспользуемся формулой вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot \cos \gamma. \quad (4)$$

Частные производные и их значения в точке M_0 соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x\sqrt{y}; & \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} &= 4; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{x^2}{2\sqrt{y}}; & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} &= 2; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{-2z}{\sqrt{4 - 2z^2}}; & \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Направляющие косинусы направления $\vec{l} = \overline{M_0M_1}$ находим как координаты единичного вектора \vec{l}_0 . Для этого вычислим координаты вектора $\overline{M_0M_1}$:

$$\overline{M_0M_1} = (2; 1; 2) \text{ и его длину } |\overline{M_0M_1}| = |\vec{l}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Единичный вектор направления \vec{l} равен $\vec{l}_0 = \frac{\overline{M_0M_1}}{|\overline{M_0M_1}|}$ и, следовательно,

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Направляющие косинусы этого направления равны

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}; \quad \cos \beta = \frac{1}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}. \quad (6)$$

Подставим найденные значения из (5) и (6) в формулу (4):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} > 0.$$

Так как $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$, то в данном направлении скалярное поле $u(x, y, z)$ является возрастающим.

Задача № 2

Найдите скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = 3\sqrt{xy} + \sqrt{9 - 2z^2}$ в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Решение

Поскольку направление наибыстрейшего возрастания задаётся направлением градиента, а скорость его численно равна модулю градиента, то используем формулу (2):

$$\mathbf{grad} u(M_0) = \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}; \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}; \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \right)$$

или

$$\mathbf{grad} u(M_0) = \bar{\nabla} u(M_0) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \bar{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \bar{k}. \quad (7)$$

Вычислим частные производные скалярного поля $u(x, y, z)$ и найдём их значения в точке M_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}; & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} &= \frac{3}{2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}; & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} &= \frac{3}{2}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{-2z}{\sqrt{9 - 2z^2}}; & \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим значения производных из формул (8) в формулу (7), тогда

$$\mathbf{grad} u(M_0) = \frac{3}{2} \bar{i} + \frac{3}{2} \bar{j}.$$

Из свойств градиента наибольшая скорость возрастания поля в точке M_0 равна

$$v_{\max}|_{M_0} = |\mathbf{grad} u(M_0)| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 0} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ а}$$

направление наибыстрейшего возрастания поля определяется единичным вектором градиента скалярного поля в точке M_0 :

$$\bar{n} \mathbf{grad} u(M_0) = \frac{\mathbf{grad} u(M_0)}{|\mathbf{grad} u(M_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}.$$

Задача № 3

Найдите угол между нормальми к поверхностям уровня полей $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $v = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M_0(0, 0, 1)$, если нормали направлены в сторону возрастания функций этих полей.

Решение

Поскольку нормали, описанные в условии задачи, соответствуют градиентам указанных скалярных полей, найдём $\mathbf{grad} u(M_0)$ и $\mathbf{grad} v(M_0)$.

Вычислим частные производные и их значения в точке M_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 1,$$

Получим исходя из формулы (2): $\mathbf{grad} u(M_0) = (0, 0, 1) = \bar{k}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{M_0} = 2$$

и из формулы (2) запишем $\mathbf{grad} v(M_0) = (0, 0, 2) = 2\bar{k}$.

Если φ – угол между градиентами, то воспользовавшись формулой

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{grad} u(M_0), \mathbf{grad} v(M_0))}{|\mathbf{grad} u(M_0)| \cdot |\mathbf{grad} v(M_0)|},$$

$$\text{получим } \cos \varphi = \frac{0 + 0 + 2}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4}} = 1.$$

Следовательно, $\varphi = 0^\circ$.

Задача № 4

Найдите $\operatorname{div} \mathbf{grad} u(M_0)$ и $\operatorname{rot} \mathbf{grad} u(M_0)$, если $u = x^2 y + \sqrt{4 - 2z^2}$,
 $M_0(2, 1, 0)$ (см. задачу № 1).

Решение

Напомним, что (см. решение задачи № 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sqrt{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2z}{\sqrt{4 - 2z^2}};$$

$$\mathbf{grad} u = 2x\sqrt{y} \cdot \bar{i} + \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \cdot \bar{j} - \frac{2z}{\sqrt{4 - 2z^2}} \cdot \bar{k}.$$

Для векторного поля $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ дивергенция

$$\text{равна } \operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$$\text{Для вектора } \mathbf{grad} u \text{ имеем } P = 2x\sqrt{y}; \quad Q = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}; \quad R = -\frac{2z}{\sqrt{4 - 2z^2}}.$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial P}{\partial x} = 2\sqrt{y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{x^2}{4\sqrt{y^3}}; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{8z}{\sqrt{(4 - 2z^2)^3}};$$

$$\text{и } \operatorname{div} \mathbf{grad} u = 2\sqrt{y} - \frac{x^2}{4\sqrt{y^3}} - \frac{8}{\sqrt{(4 - 2z^2)^3}}.$$

Подставим значения координат точки M_0 в последнюю формулу и получим,

$$\text{что в точке } M_0 \operatorname{div} \mathbf{grad} u(M_0) = 0.$$

Ротор векторного поля \bar{a} вычисляется с помощью символического опре-

делителя $\mathbf{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$

Подставим $P = 2x\sqrt{y}$; $Q = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$; $R = -\frac{2z}{\sqrt{4-2z^2}}$ в определитель, получим

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} u = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x\sqrt{y} & \frac{x^2}{2\sqrt{y}} & -\frac{2z}{\sqrt{4-2z^2}} \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - 0 \cdot \bar{j} + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y}} \right) \cdot \bar{k} = \bar{0}.$$

Итак, $\mathbf{div} \mathbf{grad} u(M_0) = 0$, $\mathbf{rot} \mathbf{grad} u(M_0) = \bar{0}$.

5. Индивидуальные задания

Задача № 1

Найдите производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению к точке M_1 . Определите характер изменения поля в точке M_0 .

- 1) $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $M_0(3, 0, -4)$; $M_1(2, -1, -3)$;
- 2) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$; $M_0(0, -3, 4)$; $M_1(-1, -2, 3)$;
- 3) $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$; $M_1(2, -1, -1)$;
- 4) $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$; $M_0(1, 1, -2)$; $M_1(-2, 0, -1)$;
- 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $M_0(3, 4, 1)$; $M_1(1, 6, 2)$;
- 6) $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $M_0(1, -2, 4)$; $M_1(2, -3, 2)$;
- 7) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz$; $M_0(2, 2, -1)$; $M_1(4, -1, -2)$;
- 8) $u = 2 \ln(2 + x^2) - 4xyz$; $M_0(0, 1, 2)$; $M_1(1, 2, 4)$;

- | | | |
|---|---|---|
| 9) $u = x\sqrt{y} - yz^2;$ | $M_0(2, 1, -1);$ | $M_1(0, 1, 2);$ |
| 10) $u = xz^2 - x\sqrt{xy};$ | $M_0(1, 4, 1);$ | $M_1(0, 5, -1);$ |
| 11) $u = x^2y - \sqrt{x^2 + 2z^2};$ | $M_0(2, 2, 3);$ | $M_1(2, 0, 5);$ |
| 12) $u = 2\ln(x^2 + 1) - 4xyz^2;$ | $M_0(3, 2, 1);$ | $M_1(2, 0, 3);$ |
| 13) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z};$ | $M_0(2, 4, 4);$ | $M_1(4, 4, 2);$ |
| 14) $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz;$ | $M_0(1, 1, 2);$ | $M_1(0, 2, 1);$ |
| 15) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 4xz;$ | $M_0(0, 1, 1);$ | $M_1(1, -1, 2);$ |
| 16) $u = x + \ln(y^2 + z^2);$ | $M_0(2, 1, 1);$ | $M_1(4, 0, 2);$ |
| 17) $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2};$ | $M_0(1, 5, -2);$ | $M_1(1, 3, 0);$ |
| 18) $u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z;$ | $M_0(0, 1, 1);$ | $M_1(-2, 4, 3);$ |
| 19) $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z);$ | $M_0(-2, 1, -1);$ | $M_1(10, -3, -9);$ |
| 20) $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z;$ | $M_0(1, 3, 2);$ | $M_1(2, 1, 4);$ |
| 21) $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz};$ | $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right);$ | $M_1\left(\frac{\pi}{2} - 4, \frac{3\pi}{2} - 3, 3\right);$ |
| 22) $u = x^2y^2z - \ln(z - 1);$ | $M_0(1, 1, 2);$ | $M_1(-4, 7, 2 - 2\sqrt{5});$ |
| 23) $u = x^2 + \sqrt{y^2 + z^2};$ | $M_0(1, -3, 4);$ | $M_1(1, -4, 5);$ |
| 24) $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}};$ | $M_0(4, 1, -2);$ | $M_1(6, 1, -1);$ |
| 25) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2};$ | $M_0(1, 1, 0);$ | $M_1(3, -1, 1);$ |
| 26) $u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} z;$ | $M_0(3, -2, 1);$ | $M_1(-1, -2, 4);$ |
| 27) $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y);$ | $M_0(1, 2, -1);$ | $M_1(0, 0, 1);$ |
| 28) $u = \ln(y^2 + x^2) + xyz;$ | $M_0(1, -1, 2);$ | $M_1(0, 0, -3);$ |
| 29) $u = xy - \frac{x}{z};$ | $M_0(-4, 3, -1);$ | $M_1(-9, 2, 0);$ |
| 30) $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right);$ | $M_0(1, -3, 4);$ | $M_1(3, -2, 3);$ |

$$31) \quad u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z); \quad M_0(2, 1, 1); \quad M_1(2, -2, 5).$$

Задача № 2

Найдите скорость и направление наиболее быстрого возрастания поля

$u = u(x, y, z)$ в точке M_0 .

- 1) $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;
- 2) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; $M_0(2, 4, 4)$;
- 3) $u = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;
- 4) $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$; $M_0\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$;
- 5) $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$; $M_0(2, 2, 4)$;
- 6) $u = x\sqrt{y} - yz^2$; $M_0(2, 1, -1)$;
- 7) $u = 7 \ln\left(x^2 + \frac{1}{13}\right) - 4xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;
- 8) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz$; $M_0(2, 2, -1)$;
- 9) $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $M_0(1, -2, 4)$;
- 10) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $M_0(3, 4, 1)$;
- 11) $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$; $M_0(1, 1, -2)$;
- 12) $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$;
- 13) $u = \frac{x}{y+3} + y\sqrt{z}$; $M_0(1, -2, 1)$;
- 14) $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $M_0(3, 0, -4)$;
- 15) $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$; $M_0(1, 0, -2)$;
- 16) $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $M_0(-2, 1, 0)$;
- 17) $u = \ln(x + 2y) + \sqrt{xz}$; $M_0(1, 0, 1)$;
- 18) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$; $M_0(1, 4, 0)$;
- 19) $u = \ln(y^2 + x^2) + xyz$; $M_0(1, -1, 2)$;

- 20) $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z);$ $M_0(2, 1, 1);$
- 21) $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2});$ $M_0(1, 0, 4);$
- 22) $u = \ln(2x^2 + y) + \sqrt{yz};$ $M_0(0, 1, 1);$
- 23) $u = x^2 y^2 z - \ln(z + x);$ $M_0(0, 2, 3);$
- 24) $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z;$ $M_0(1, 2, -1);$
- 25) $u = yz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$ $M_0(0, 1, 0);$
- 26) $u = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z;$ $M_0(0, 1, 2);$
- 27) $u = x^2 \ln y + \operatorname{arctg} \frac{z}{x};$ $M_0(1, 1, 1);$
- 28) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - 2z^2};$ $M_0(1, 1, 0);$
- 29) $u = 2\sqrt{3x + y} + \operatorname{arctg} z;$ $M_0(1, 1, 0);$
- 30) $u = x^3 y^2 - \sqrt{x^2 + z^2};$ $M_0(1, 1, 0);$
- 31) $u = \frac{x}{y + 3z} - x^2 z^2;$ $M_0(-1, 1, 0).$

Задача № 3

Найдите угол между нормальными к поверхностям уровня полей $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ в точке M , если нормали направлены в сторону возрастания функций этих полей.

- 1) $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3;$ $u = \frac{yz^2}{x^2};$ $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 2) $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z};$ $u = x^2 yz^3;$ $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$
- 3) $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}};$ $u = \frac{z^3}{xy^2};$ $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$
- 4) $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z\sqrt{6}};$ $u = \frac{z}{x^3 y^2};$ $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$

- 5) $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3;$ $u = \frac{x^2}{yz^2};$ $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 6) $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2;$ $u = \frac{z^2}{xy^2};$ $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$
- 7) $v = 6\sqrt{6}x^3 + 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3;$ $u = \frac{xz^2}{y};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right);$
- 8) $v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z};$ $u = \frac{yz^2}{x};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 9) $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2;$ $u = \frac{xy^2}{z^2};$ $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$
- 10) $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z\sqrt{6}};$ $u = \frac{x^3y^2}{z};$ $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 11) $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z};$ $u = \frac{1}{x^2yz};$ $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 12) $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z};$ $u = \frac{x^2}{y^2z^3};$ $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 13) $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2;$ $u = xyz;$ $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 14) $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z};$ $u = \frac{y^3}{x^2z};$ $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right);$
- 15) $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2;$ $u = xy^2z;$ $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 16) $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z};$ $u = \frac{x}{z^2y};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 17) $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z};$ $u = \frac{y^2z^3}{x^2};$ $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 18) $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z};$ $u = \frac{y^2z^3}{x};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 19) $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3;$ $u = \frac{y}{xz^2};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right);$

- 20) $v = x^2 - y^2 - 3z^2;$ $u = \frac{yz^2}{x};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 21) $v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2;$ $u = \frac{z^2}{x^2y^2};$ $M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$
- 22) $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}};$ $u = \frac{x^2}{y^2z^3};$ $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 23) $v = \frac{3x^2}{2} + 3y^2 - 2z^2;$ $u = x^2yz^3;$ $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$
- 24) $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}};$ $u = \frac{xy^2}{z^3};$ $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$
- 25) $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2;$ $u = \frac{1}{xy^2z};$ $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 26) $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2;$ $u = \frac{1}{xyz};$ $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 27) $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z};$ $u = \frac{x}{y^2z^3};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 28) $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z};$ $u = x^2yz;$ $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
- 29) $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}};$ $u = \frac{y^2z^3}{x^2};$ $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 30) $v = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3;$ $u = \frac{x^2z}{y^3};$ $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right);$
- 31) $v = x^2 - y^2 - 3z^2;$ $u = \frac{x}{yz^2};$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Задача № 4

Найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$, где u – функция скалярного поля из

задачи № 1.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч. IV. – Минск: Вышэйш. шк., 1987. – 240 с.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – СПб. Лань, 2005. – 240 с.

Учебное издание

*Васильева Ольга Альбертовна,
Михалкина Светлана Алексеевна*

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
В ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Методические указания

Технический редактор Ф. В. Г р е ч н и к о в
Редакторская обработка М. Г. Б о к а р е в а, А. А. Г н у т о в а
Корректорская обработка С. А. Н е ч и т а й л о
Доверстка Н. А. Д о ц е н к о, А. А. Г н у т о в а
Донабор А. А. Г н у т о в а

Подписано в печать 22.11.06 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,63. Усл. кр.-отт. 1,75. Печ. л. 1,75.

Тираж 50 экз. Заказ . ИП-22/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.