

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

УДК 539.3: 629.7.023

Составитель: доц. *Л.М. Савельев*

Рецензенты: доц. И. С. А х м е д ь я н о в,
доц. В. К. Ш а д р и н

Применение метода Ритца к расчету призматических стержней на кручение: метод. указания к курсовой работе / сост. *Л.М. Савельев* – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 21 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К РАСЧЕТУ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ НА КРУЧЕНИЕ

*Методические указания
к курсовой работе*

Приведены основные соотношения для кручения призматических стержней. Изложена методика приближенного расчета стержней на кручение методом Ритца при решении задачи как в перемещениях, так и в напряжениях.

Методические указания подготовлены на кафедре прочности летательных аппаратов СГАУ и предназначены студентам специальности “Динамика и прочность машин”, выполняющим курсовую работу по теории упругости. Они могут использоваться также студентами специальности “Механика” при выполнении курсовой работы по механике деформируемого твердого тела.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

Расчет на кручение призматических стержней составляет предмет одной из классических задач теории упругости. Несмотря на кажущуюся узость темы, эта задача касается многих принципиальных вопросов, изучаемых в теории упругости. Здесь, в частности, дается иллюстрация решения в перемещениях и решения в напряжениях, приложения вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, использования численных методов и т.д. Поэтому выполнение данной курсовой работы должно служить хорошим подспорьем для более глубокого усвоения всего курса теории упругости.

Среди приближенных методов решения задач теории упругости особое место занимает метод Ритца. Он прост в идейном плане, обладает большой общностью и широко используется в разнообразных приложениях. Кроме того, он служит основой других численных методов, например, метода конечных элементов. В связи с этим выполнение данной курсовой работы предполагает углубленное знакомство с методом Ритца, включая особенности выбора базисных функций, исследование сходимости приближенного решения к точному с увеличением числа базисных функций и т.д.

Методические указания содержат краткие сведения, касающиеся постановки и решения задачи о кручении призматического стержня, а также рекомендации по выполнению и оформлению курсовой работы. Методические указания адресованы в первую очередь студентам, обучающимся по специальности «Динамика и прочность машин» в качестве пособия при выполнении курсовой работы по теории упругости, а также студентам специальности «Механика» при выполнении курсовой работы по механике деформируемого твердого тела.

1. Основные соотношения теории упругости в задаче о кручении призматического стержня

Рассмотрим призматический стержень, длина L которого значительно превосходит размеры поперечного сечения. Отнесем его к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой поместим в произвольной точке нижнего сечения, а ось x_3 (называемую в дальнейшем осью стержня) направим параллельно образующей (рис. 1). Предположим, что в точке O на стержень наложены связи, обеспечивающие неподвижность этой точки и отсутствие поворотов оси стержня относительно осей x_1, x_2 :

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0. \quad (1)$$

Кроме того, нижнее сечение предполагается закрепленным от поворота вокруг оси x_3 , что в совокупности с условиями (1) обеспечивает полное закрепление стержня в пространстве как жесткого тела. При этом будем считать, что условия закрепления стержня не препятствуют перемещениям

точек нижнего основания в направлении оси x_3 (за исключением точки O). Стержень испытывает нагружение моментом M , который создается некоторой системой поверхностных сил $p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2)$, действующих в плоскости верхнего сечения. Главный вектор этих сил предполагаем равным нулю.

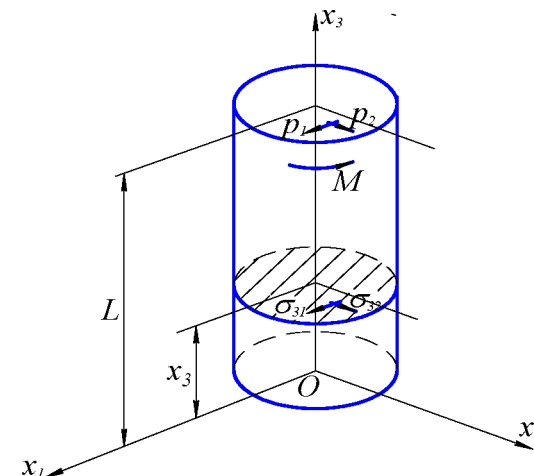


Рис. 1

Рассмотрим произвольное сечение стержня на расстоянии x_3 от нижнего торца (на рис. 1 оно заштриховано). В этом сечении действуют касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} , создающие относительно оси x_3 момент, равный M . Как видно из рис. 2, справедливо равенство

$$M = \int_A (-x_2 \sigma_{31} + x_1 \sigma_{32}) dA, \quad (2)$$

где A – площадь сечения.

Если принять, что другие компоненты тензора напряжений отсутствуют, т.е. $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$, то напряжения σ_{31}, σ_{32} оказываются функциями только координат x_1, x_2 :

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}(x_1, x_2), \quad \sigma_{32} = \sigma_{32}(x_1, x_2).$$

Эти напряжения должны удовлетворять единственному уравнению равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0 \quad (3)$$

и уравнениям совместности Бельтрами

$$\nabla^2 \sigma_{31} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{32} = 0. \quad (4)$$

Кроме того, должны удовлетворяться статические условия на поверхности тела. На боковой поверхности эти условия сводятся к требованию, чтобы

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

где n_1, n_2 – направляющие косинусы вектора нормали \bar{n} к контуру Γ , ограничивающему его поперечное сечение (см. рис. 2). На верхнем основании статические условия приводят к равенствам

$$\sigma_{31}(x_1, x_2) = p_1(x_1, x_2); \quad \sigma_{32}(x_1, x_2) = p_2(x_1, x_2). \quad (6)$$

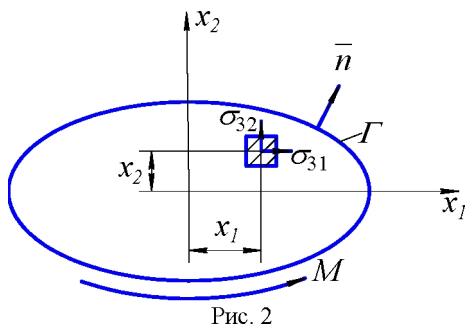


Рис. 2

Закон изменения поверхностных сил p_1, p_2 зависит от способа приложения нагрузки. Обычно известна лишь их равнодействующая M , но не детальный характер распределения сил $p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2)$. Равенства (6) накладывают неоправданно жесткие ограничения на σ_{31}, σ_{32} , поэтому их заменяют более мягким требованием, чтобы выполнялось лишь интегральное условие равновесия (2). Тогда закон изменения напряжений, получаемый в результате решения задачи, строго говоря, окажется точным лишь в том случае, когда закон изменения поверхностных сил $p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2)$ совпадает, согласно (6), с найденным распределением $\sigma_{31}(x_1, x_2), \sigma_{32}(x_1, x_2)$ в

поперечном сечении стержня. В других случаях напряженное состояние стержня будет отличаться от полученного теоретического решения. Однако это отличие, согласно принципу Сен-Венана, касается лишь весьма небольшого участка стержня возле его верхнего конца. В основной же части стержня установится напряженное состояние, совпадающее с найденным теоретически. То же самое относится и к нижнему концу стержня, где в качестве нагрузок выступают реакции связей, удерживающих нижнее сечение от поворота вокруг оси x_3 .

Под действием момента M происходит закручивание стержня. Исходя из принятых допущений относительно напряженного состояния, можно установить следующую картину деформирования. Сечение на расстоянии x_3 от нижнего края основания поворачивается вокруг оси стержня на угол αx_3 , где α – погонный угол закручивания, то есть угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня. При этом форма поперечного сечения в плане сохраняется неизменной, и компоненты u_1, u_2 вектора перемещений определяются равенствами

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3. \quad (7)$$

В то же время сечения, вообще говоря, депланируют (то есть перестают быть плоскими) вследствие перемещения их точек в осевом направлении. Перемещение u_3 оказывается не зависящим от координаты x_3 , и его можно представить в виде

$$u_3 = \alpha f(x_1, x_2), \quad (8)$$

где $f(x_1, x_2)$ – так называемая функция депланации. Используя формулы Коши и закон Гука, можно установить следующую связь напряжений с функцией $f(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{31} = G\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{32} = G\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 \right). \quad (9)$$

Здесь G – модуль сдвига материала стержня.

2. Решение задачи о кручении стержня в перемещениях и в напряжениях

Если в качестве основных неизвестных выбраны перемещения, то в соответствии с формулами (7), (8) задача сводится к отысканию функции депланации $f(x_1, x_2)$ и погонного угла закручивания α .

Функция f должна удовлетворять дифференциальному уравнению, которое следует из уравнения равновесия (3) и формул (9):

$$\nabla^2 f = 0. \quad (10)$$

Граничное условие для $f(x_1, x_2)$, вытекающее из статического условия (5) на боковой поверхности, может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \text{ на } \Gamma. \quad (11)$$

Отыскание функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа (10) при граничном условии (11), носит название задачи Неймана. Решение задачи Неймана может быть получено лишь с точностью до аддитивной постоянной. Неопределенность решения устраняется, если воспользоваться дополнительным требованием

$$f(0, 0) = 0, \quad (12)$$

вытекающим из условия закрепления стержня в начале координат.

Интегральное уравнение равновесия (2) служит для определения погонного угла закручивания α . С учетом формул (9) из него можно получить связь между α и моментом M в виде равенства

$$\alpha = \frac{M}{GI_k}. \quad (13)$$

Стоящее в знаменателе этой формулы произведение GI_k называется жесткостью стержня на кручение. Величина I_k , называемая геометрической жесткостью на кручение, определяется формулой

$$I_k = \int_A \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dA + I_{x_1} + I_{x_2}. \quad (14)$$

Здесь

$$I_{x_1} = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{x_2} = \int_A x_1^2 dA \quad (15)$$

– моменты инерции сечения стержня относительно осей x_1 и x_2 .

Если функция $f(x_1, x_2)$ найдена, то по формулам (9) могут быть определены напряжения, что завершает решение задачи. Заметим, что с учетом (13) формулам (9) можно придать следующий расчетный вид:

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{32} = \frac{M}{I_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 \right). \quad (16)$$

При решении задачи в напряжениях мы имеем дело с двумя функциями координат x_1, x_2 , подлежащими отысканию – касательными напряжениями σ_{31} и σ_{32} . В области A они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (3) и (4), а на контуре Γ – условию (5).

Уравнение равновесия (3) тождественно удовлетворяется путем введения функции напряжений Прандтля $\Phi(x_1, x_2)$, через которую напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \quad (17)$$

Из соотношений (4) вытекает, что искомая функция Φ должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \text{const}.$$

Значение постоянной в правой части этого равенства можно установить, исключив функцию f из соотношений (9). С учетом формул (17) это приводит к равенству

$$\nabla^2 \Phi = -2G\alpha, \quad (18)$$

представляющему собой, по существу, уравнение совместности деформаций, выраженное через функцию Φ .

Соотношения (5) приводят к граничному условию для Φ . В общем случае стержень может содержать продольные цилиндрические полости. При этом его сечение будет иметь вид многосвязной области, а контур Γ будет состоять из нескольких замкнутых кривых (рис. 3). Обозначим через Γ_0 внешний контур, охватывающий поперечное сечение, а через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ – внутренние контуры, ограничивающие сечения полостей (m – общее число полостей). Вытекающее из (5) граничное условие сводится к требованию, чтобы на каждом из контуров Γ_i функция Φ принимала некоторое постоянное значение Φ_i . Значение Φ_0 на контуре Γ_0 может быть принято равным нулю, и тогда граничное условие для Φ запишется в следующем виде:

$$\Phi = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (19)$$

$$\Phi = \Phi_i \text{ на } \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (20)$$

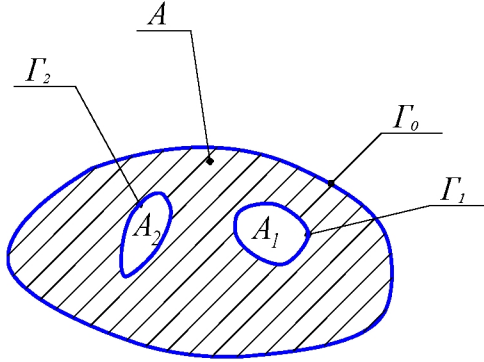


Рис. 3

Решение уравнения (18) будет содержать множителем произведение $G\alpha$. Представим функцию Φ в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = G\alpha\varphi(x_1, x_2). \quad (21)$$

Функция $\varphi(x_1, x_2)$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2\varphi = -2 \quad (22)$$

при условии

$$\varphi = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \varphi = \varphi_i \text{ на } \Gamma_i. \quad (23)$$

Здесь постоянные φ_i связаны с Φ_i равенствами $\varphi_i = \Phi_i / (2G\alpha)$. Значения этих постоянных можно найти с помощью теоремы Бредта о циркуляции касательного напряжения, вытекающей из условия однозначности перемещения u_3 . Из этой теоремы следуют, в частности, следующие m равенств:

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = -2A_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (24)$$

где A_i – площадь сечения i -й полости, ограниченной i -м контуром Γ_i ; интегрирование ведется по каждому из контуров Γ_i . В соответствии с (23) решение $\varphi(x_1, x_2)$ уравнения (22) будет содержать m постоянных φ_i , и равенства (24) дают m уравнений для их определения.

Для отыскания α снова используем условие равновесия (2). Формулы (17) и (21) позволяют привести его к стандартному виду (13), где теперь

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA + 2 \sum_{i=1}^m \varphi_i A_i. \quad (25)$$

После нахождения функции $\varphi(x_1, x_2)$ и погонного угла закручивания α напряжения подсчитываются по формулам, вытекающим из (17), (21):

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \quad (26)$$

Перемещения u_1, u_2 даются формулами (7), а перемещение u_3 в соответствии с (8) может быть найдено интегрированием уравнений (9). Заметим, что эти два уравнения относительно функции f совместны в силу равенства (18) или, что то же, равенства (22).

3. Приложение метода Ритца к расчету стержня на кручение в перемещениях

В основу приближенного расчета стержня на кручение могут быть положены вариационные принципы теории упругости. Так, при решении задачи в перемещениях можно исходить из вариационного принципа Лагранжа. В соответствии с ним среди всех перемещений, допускаемых наложенными на тело связями, в действительности должны иметь место такие, для которых полная потенциальная энергия системы минимальна. Применительно к рассматриваемой задаче отсюда вытекает следующее вариационное уравнение Лагранжа для кручения призматического стержня:

$$\delta J_1 = 0. \quad (27)$$

Здесь J_1 – функционал, зависящий от функции f :

$$J_1 = \int_A [(\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1)^2] dA. \quad (28)$$

Можно показать, что стационарное значение функционала J_1 , определяемое равенством (27), есть минимум. Отметим, что соотношения статики (10) и (11) могут быть получены соответственно как уравнение Эйлера–Остроградского и естественное граничное условие вариационной задачи (27). Поэтому реализующая минимум J_1 функция $f(x_1, x_2)$ будет автоматически удовлетворять этим соотношениям. Если такая функция найдена, то по формулам (14), (15) может быть вычислена геометрическая жесткость на кручение I_k , а по формулам (16) – напряжения σ_{31} и σ_{32} .

Прямую минимизацию функционала J_1 можно приближенно осуществить по методу Ритца, в соответствии с которым решение отыскивается в виде

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x_1, x_2). \quad (29)$$

Здесь $f_i(x_1, x_2)$ – выбираемые заранее базисные функции, a_i – коэффициенты, определяемые из условия минимума функционала J_1 . Это условие приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$[B][a] = [C] \quad (30)$$

относительно коэффициентов $[a] = [a_1 a_2 \dots a_N]^T$. Матрица $[B]$ коэффициентов системы имеет симметричную структуру; ее элементы вычисляются по формуле

$$B_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_j}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right) dA. \quad (31)$$

Элементы C_i матрицы правых частей $[C]$ определяются выражением

$$C_i = \int_A (x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_2}) dA. \quad (32)$$

Решив систему (30), будем иметь, согласно (29), приближенное выражение для функции деформации. Для вычисления геометрической жесткости на кручение можно на основании (14) получить простую формулу

$$I_k = I_{x_1} + I_{x_2} - \sum_{i=1}^N a_i C_i. \quad (33)$$

Заметим, что получаемая таким образом приближенная величина I_k всегда будет не ниже своего точного значения. Расчет напряжений может быть выполнен по формулам, вытекающим из (16), (29):

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \frac{M}{I_k} \left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} - x_2 \right); \\ \sigma_{32} &= \frac{M}{I_k} \left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_1 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Выбор базисных функций $f_i(x_1, x_2)$ ограничен лишь требованием, чтобы перемещения были согласованы с наложенными на тело связями. На перемещение u_3 связь в соответствии с (1) наложена лишь в точке O , так что функция деформации должна, как уже говорилось, удовлетворять условию (12). Это будет обеспечено, если каждая из функций $f_i(x_1, x_2)$ обращается в нуль при $x_1 = x_2 = 0$. В остальном же выбор этих функций произволен. Для практических вычислений удобно использовать в качестве f_i полиномы относительно x_1, x_2 :

$$f_i(x_1, x_2) = \{x_1; x_2; x_1^2; x_1 x_2; x_2^2; x_1^3; x_1^2 x_2; x_1 x_2^2; x_2^3; \dots\}. \quad (35)$$

Число N базисных функций, используемых в (29), зависит от желаемой точности расчета. На практике можно выполнять решения с постепенным увеличением N и наблюдать за соответствующим изменением какой-либо характерной величины, получаемой в результате решения. В качестве таковой удобно взять геометрическую жесткость на кручение I_k .

По мере увеличения числа базисных функций эта величина должна уменьшаться, стремясь к своему предельному – точному – значению. Следует, однако, иметь в виду, что существенное повышение точности с увеличением N происходит лишь в том случае, когда возрастает наибольшая степень полных полиномов, удерживаемых в базисных функциях. Если, скажем, в качестве начального приближения выполнен расчет с двумя базисными функциями $f_1 = x_1$ и $f_2 = x_2$, то для получения более точного результата следует добавить к ним все полиномиальные функции второй степени: $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$. Добавление лишь одной из них (или двух любых) к улучшению решения, скорее всего, не приведет. Следующим шагом в уточнении результата должно стать добавление еще четырех функций, составляющих полный полином третьей степени и т.д.

Если сечение стержня обладает симметрией, то это следует учесть при выборе $f_i(x_1, x_2)$. Можно показать, что функция деформации всегда обратносимметрична по отношению к любой оси симметрии. Если, скажем, ось x_1 является осью симметрии, то $f(x_1, x_2)$ будет нечетной функцией координаты x_2 , и в наборе (35) следует опустить функции, содержащие x_2 в четных (или нулевой) степенях. Таким образом, в этом случае в качестве базисных должны быть взяты функции

$$f_i(x_1, x_2) = \{x_2; x_1 x_2; x_1^2 x_2; x_2^3; \dots\}. \quad (36)$$

Аналогично, если сечение имеет две оси симметрии и с ними совмещены координатные оси, то среди полиномиальных функций (35) следует оставить лишь те, которые содержат каждую из координат в нечетной степени:

$$f_i(x_1, x_2) = \{x_1 x_2; x_1^3 x_2; x_1 x_2^3; \dots\}. \quad (37)$$

Заметим, что если не принимать во внимание имеющуюся симметрию и использовать полный набор полиномиальных функций (35), то коэффициенты a_i при «лишних» базисных функциях просто окажутся в результате решения равными нулю.

4. Приложение метода Ритца к расчету стержня на кручение в напряжениях

Другой вариант приближенного расчета исходит из вариационного принципа Кастильяно. Последний устанавливает, что среди всех статически допустимых напряженных состояний в действительности имеет место такое, для которого полная дополнительная энергия системы минимальна. К сравнению здесь привлекаются статически допустимые напряженные состояния, т.е. такие состояния, которые удовлетворяют всем уравнениям статики. В рассматриваемой задаче о кручении стержня дифференциальным уравнениям равновесия можно тождественно удовлетворить путем введения по формулам (17) функции напряжений $\Phi(x_1, x_2)$ или связанной с ней равенством (21) функции $\varphi(x_1, x_2)$. Для удовлетворения статическим условиям на боковой поверхности необходимо при этом выполнить условия (23).

Ограничимся в дальнейшем случае сплошного стержня, когда его сечение представляет собой односвязную область, ограниченную контуром Γ_0 . Функция φ должна быть тогда подчинена условию

$$\varphi = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (38)$$

Исходя из принципа Кастильяно, можно прийти к следующему вариационному уравнению Тимошенко для кручения призматического стержня:

$$\delta J_2 = 0. \quad (39)$$

Это равенство представляет собой условие минимума функционала

$$J_2 = \int_A \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 - 4\varphi \right] dA. \quad (40)$$

Реализующая минимум функция $\varphi(x_1, x_2)$ будет удовлетворять и уравнению совместности (22), которое может быть получено как уравнение Эйлера-Остроградского вариационной задачи (39). Если такая функция найдена, то по формуле

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA, \quad (41)$$

вытекающей в случае односвязного сечения из формулы (25), может быть рассчитана геометрическая жесткость на кручение, а по формулам (26) можно подсчитать напряжения.

Приближенную минимизацию функционала (40) можно снова осуществить по методу Ритца, отыскивая решение в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x_1, x_2). \quad (42)$$

Каждая из базисных функций φ_i должна, согласно (38), обращаться в нуль на контуре Γ_0 ; в остальном выбор этих функций произволен. Условие минимума функционала J_2 приводит к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i вида

$$[B][a] = [c].$$

Коэффициенты матрицы $[B]$ и матрицы правых частей $[c]$ определяются здесь формулами

$$B_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right) dA, \quad (43)$$

$$C_i = 2 \int_A \varphi_i dA. \quad (44)$$

Определив коэффициенты a_i , по формуле (42) будем иметь приближенное выражение для функции φ . Для вычисления I_k и напряжений σ_{31}, σ_{32} можно из формул (41) и (26) получить следующие расчетные зависимости:

$$I_k = \sum_{i=1}^N a_i c_i, \quad (45)$$

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}. \quad (46)$$

Можно показать, что в этом случае точное значение геометрической жесткости на кручение I_k будет верхней границей получаемого согласно (45) приближенного решения.

При выборе системы базисных функций φ_i можно поступить следующим образом. Пусть контур Γ_0 составлен из нескольких участков, каждый из которых представляет собой кривую, описываемую уравнением вида

$$\omega_k(x_1, x_2) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (47)$$

Образую функцию $\Omega(x_1, x_2)$ как произведение левых частей уравнений (47):

$$\Omega(x_1, x_2) = \prod_{k=1}^n \omega_k(x_1, x_2) = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_n. \quad (48)$$

Очевидно, что функция $\Omega(x_1, x_2)$ обращается в нуль в любой точке контура, и, таким образом, она может использоваться в качестве одной из базисных функций φ_i . Другие можно получить, умножая Ω на полиномы от x_1, x_2 различных степеней. Таким образом составляется систематический набор базисных функций:

$$\varphi_i(x_1, x_2) = \{ \Omega; \Omega x_1; \Omega x_2; \Omega x_1^2; \Omega x_1 x_2; \Omega x_2^2; \dots \}. \quad (49)$$

Увеличивая число N базисных функций в (42), будем получать все более точные решения. Величина I_k , в частности, должна по мере увеличения N возрастать, приближаясь к точному значению. Однако, как и в случае решения в перемещениях, сколько-нибудь заметное возрастание точности наблюдается лишь при увеличении максимальной степени полных полиномов, фигурирующих в базисных функциях в качестве множителей функции Ω . Если в первом приближении используется одна базисная функция $\varphi_1 = \Omega$, то для уточнения решения к ней следует добавить две функции Ωx_1 и Ωx_2 , затем еще три ($\Omega x_1^2, \Omega x_1 x_2$ и Ωx_2^2) и т.д.

При наличии симметрии сечения решение можно упростить, поскольку функция напряжений симметрична по отношению к любой оси симметрии. Если, например, ось x_1 является осью симметрии, то функция $\varphi(x_1, x_2)$ должна быть четной функцией координаты x_2 , т.к. в этом случае функция Ω будет, очевидно, четной относительно x_2 , из набора базисных функций (49) следует опустить те, которые содержат множителем x_2 в нечетной степени.

5. Содержание курсовой работы

Целью курсовой работы является расчет стержня на кручение как в перемещениях, так и в напряжениях с последующим сопоставлением результатов. Работа включает в себя следующие разделы.

5.1. Расчет геометрических характеристик сечения стержня

Для заданного поперечного сечения стержня необходимо, прежде всего, выбрать систему координатных осей x_1, x_2 , удобную для последующего использования. При наличии симметрии координатные оси следует совместить с осями симметрии.

Далее определяются те геометрические размеры, которые могут потребоваться в дальнейших вычислениях, и записываются уравнения кривых, образующих контур Γ_0 . Затем вычисляются геометрические характеристики сечения:

- площадь сечения

$$A = \iint_A dx_1 dx_2;$$

- статические моменты сечения относительно осей x_1, x_2

$$S_{x_1} = \int_A x_2 dA, \quad S_{x_2} = \int_A x_1 dA;$$

- моменты инерции сечения относительно осей x_1, x_2

$$I_{x_1} = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{x_2} = \int_A x_1^2 dA;$$

- координаты центра тяжести сечения

$$x_{1c} = \frac{S_{x_2}}{A}, \quad x_{2c} = \frac{S_{x_1}}{A};$$

- моменты инерции относительно центральных осей

$$I_{1c} = I_{x_1} - x_{2c}^2 A, \quad I_{2c} = I_{x_2} - x_{1c}^2 A;$$

- полярный момент инерции

$$I_p = I_{1c} + I_{2c};$$

- ориентировочное значение геометрической жесткости на кручение

$$\tilde{I}_k = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}. \quad (50)$$

Последняя формула является строгой для стержня эллиптического сечения. В других же случаях она дает хорошую ориентировку, позволяющую избежать грубых ошибок при расчетах по методу Ритца. Отличие \tilde{I}_k от точного значения, как правило, не превосходит 20%.

5.2. Расчет стержня на кручение методом Ритца в перемещениях

Расчет выполняется по методике, изложенной в разд. 3. Базисные функции $f_i(x_1, x_2)$ в (29) выбираются согласно (35), с учетом симметрии поперечного сечения стержня, если таковая имеется. Число N базисных функций постепенно увеличивается с целью достижения необходимой точности. При каждом новом расчете наибольшая степень полного полинома, удерживаемого в базисных функциях, должна увеличиваться на единицу. В каждом приближении формируются матрицы $[B]$ и $[C]$ согласно (31) и (32). После решения системы (30) определяется I_k по формуле (33). Приближения заканчиваются, когда последнее найденное значение I_k отличается от полученного в предыдущем приближении, как правило, не более чем на 0,1 %.

Исходя из функции депланации, полученной согласно (29) в последнем приближении, выполняется расчет напряжений. В нескольких точках контура Γ_0 вычисляется полное касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}, \quad (51)$$

где компоненты σ_{31} , σ_{32} подсчитываются по формулам (34). По этим результатам строится эпюра изменения τ вдоль контура поперечного сечения и определяется наибольшее напряжение τ_{\max} . Число точек контура, в которых производится вычисление τ , выбирается исходя из конфигурации сечения так, чтобы их было достаточно для построения подробной эпюры.

5.3. Расчет стержня на кручение методом Ритца в напряжениях

Расчеты выполняются аналогично предыдущему в соответствии с методикой, изложенной в разд. 4. Главное отличие состоит в характере базисных функций φ_i , которые должны выбираться согласно (48) и (49), с учетом, если необходимо, симметрии сечения. В качестве расчетных здесь должны использоваться формулы (43) и (44), а также формулы (45) и (46). В остальном порядок вычислений идентичен тому, который изложен в предыдущем пункте.

5.4. Сопоставление результатов расчета, полученных двумя методами

Здесь выполняется сравнение I_k и τ_{\max} , полученных при решении задачи в перемещениях и в напряжениях. Устанавливаются границы, в которых заключено точное значение I_k , и оценивается погрешность полученных решений. Следует оценить также погрешность, даваемую приближенной формулой (50). Кроме того, необходимо сопоставить трудоемкость вычислений и скорость сходимости решения к точному при увеличении числа базисных функций в двух рассмотренных подходах.

6. Рекомендации по оформлению пояснительной записки

Оформление пояснительной записки должно соответствовать требованиям [1]. Следует помнить, что целью пояснительной записки являются описание выполняемых расчетов и анализ результатов. Поэтому в ней должны быть исключены выводы формул или иной теоретический материал, не требующийся непосредственно для пояснения существа расчетов. Желательно, чтобы пояснительная записка была напечатана, хотя в порядке исключения возможен и рукописный вариант. Текст должен быть написан ясным и четким языком без использования каких-либо сокращений, за

исключением общепринятых. Все формулы и входящие в них величины должны иметь соответствующие пояснения.

При выполнении расчетов рекомендуется воспользоваться каким-либо математическим программным пакетом типа Mathcad. Тексты соответствующих программ, реализующих вычисления, следует выносить в приложение. В основном тексте не допускается использование специфических математических обозначений и символов, употребляемых в этих пакетах и отличных от общепринятых. Числовые величины, представленные в основном тексте, должны, как правило, содержать не более четырех значащих цифр. В качестве разделительного знака в десятичных дробях должна фигурировать запятая; использование точки для этой цели не допускается.

При выполнении расчетов необходимо иметь в виду, что значения внешнего момента M , модуля сдвига G , а также характерного линейного размера поперечного сечения численно не задаются; они сохраняются в виде буквенных множителей при соответствующих величинах. При выполнении некоторых вычислений (например, при интегрировании по площади поперечного сечения с использованием математических пакетов) иногда бывает удобным принять характерный размер равным единице; тогда после получения результата необходимый буквенный множитель должен восстанавливаться вручную. В любом случае все величины, фигурирующие в основном тексте пояснительной записки, должны иметь правильную размерность.

При проведении расчетов по методу Ритца начальное приближение должно быть описано подробно с указанием численных значений всех величин, участвующих в вычислениях. Последующие приближения можно описывать более кратко, используя табличную форму представления результатов.

Рекомендуемый библиографический список

1. СТП СГАУ 6.1.4 – 97. Общие требования к оформлению учебных текстовых документов. – Самара: СГАУ, 1997. – 17 с.
2. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

Содержание

1. Основные соотношения теории упругости в задаче о кручении призматического стержня.....	3
2. Решение задачи о кручении стержня в перемещениях и в напряжениях.....	6
3. Приложение метода Ритца к расчету стержня на кручение в перемещениях.....	10
4. Приложение метода Ритца к расчету стержня на кручение в напряжениях.....	13
5. Содержание курсовой работы.....	15
5.1. Расчет геометрических характеристик сечения стержня.....	15
5.2. Расчет стержня на кручение методом Ритца в перемещениях.....	16
5.3. Расчет стержня на кручение методом Ритца в напряжениях.....	17
5.4. Сопоставление результатов расчета, полученных двумя методами.....	17
6. Рекомендации по оформлению пояснительной записки.....	17
Рекомендуемый библиографический список.....	19

Учебное издание

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА
К РАСЧЕТУ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ
НА КРУЧЕНИЕ**

Методические указания к курсовой работе

Составитель *Леонид Макарович Савельев*

Редактор Т.И. Кузнецова
Компьютерная верстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 14.08.2007. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С- 23/2007

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.