

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

**Расчёт аэродинамических профилей  
по моделям идеальной и вязкой жидкости**

Электронные методические указания

САМАРА

2011

УДК СГАУ: 629.7.025.1:533.6.011.34(075)

Составители: **Ляскин Антон Сергеевич,**  
**Фролов Владимир Алексеевич**

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Л. Балакин

**Расчёт аэродинамических профилей по моделям идеальной и вязкой жидкости** [Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. А.С. Ляскин, В.А. Фролов. - Электрон. текстовые и граф. дан. (397 Кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Систем. требования: ПК Pentium; Windows 98 или выше.

Приведены основные указания по расчётам аэродинамических характеристик профилей с помощью различных методов вычислительной гидроаэродинамики.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям: 011000.62 Механика. Прикладная математика (бакалавриат); 011000.68 Механика. Прикладная математика и 160100.68 Авиа- и ракетостроение (магистратура); 160201.65 Самолёто- и вертолётостроение (специальность), изучающих курсы «Аэродинамика самолёта» и «Механика сплошной среды», как пособие для курсового и дипломного проектирования.

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>1. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАНИЯ И РАСЧЁТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ НА БАЗЕ МОДЕЛЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ.....</b>	<b>5</b>
1.1 Фундаментальные основы моделирования обтекания профиля на базе моделей идеального газа.....	5
1.2 Методика построения расчётной сетки на базе модели идеального газа для численно-аналитическому методу .....	7
1.3 Методика построения расчётной сетки на базе модели идеального газа для панельного метода.....	8
1.4 Технология численного моделирования обтекания профиля на основе модели идеального газа по численно-аналитическому методу .....	9
1.5 Технология численного моделирования обтекания профиля на основе модели идеального газа по панельному методу .....	11
1.6 Учебный пример расчёта коэффициента подъёмной силы аэродинамического профиля на основе модели идеальной жидкости .....	14
<b>2. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАНИЯ И РАСЧЁТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАКЕТОВ НА БАЗЕ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.....</b>	<b>16</b>
2.1 Учебный пример расчёта коэффициента подъёмной силы аэродинамического профиля на основе модели вязкой жидкости ...	21
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>24</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Выбор аэродинамического профиля влияет на характеристики крыла и всего самолета. Поэтому расчёт обтекания профиля входит в число задач по аэродинамическому проектированию самолёта.

В зависимости от задания расчёт обтекания профиля может основываться на различных математических моделях.

Наиболее быстро можно рассчитать несущие и моментные характеристики профиля в рамках идеальной жидкости. Из многочисленных методов модели идеальной жидкости выбраны численно-аналитический метод и панельный метод.

Более полную и достоверную информацию можно получить с помощью вычислительных пакетов на основе полных уравнений Навье-Стокса с набором моделей турбулентности. В методические указания включены материалы по использованию пакетов Star-CD и CFX.

Из методов, занимающих промежуточное положение по учёту вязкости на аэродинамические характеристики профиля, широко используется итерационная комбинация расчёта невязкого обтекания панельным методом с последующим решением уравнений пограничного слоя. Примером реализации такого подхода служит программа Xfoil.

В методических указаниях описываются методики построения расчётных сеток для всех используемых методов, технологии численного моделирования обтекания профиля упомянутыми методами. В качестве учебного примера приводятся данные расчёта для профиля с эллиптической носовой частью, на результатах которого делается вывод о возможностях того или иного метода моделирования.

Предполагается, что пользователи данных методик и технологий знакомы с основами численных методов и соответствующими разделами аэродинамики. Поэтому изложение ведется лаконично.

Методические указания предназначены для студентов факультета летательных аппаратов очной и очно-заочной форм обучения.

# 1. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАНИЯ И РАСЧЁТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ НА БАЗЕ МОДЕЛЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

## 1.1 Фундаментальные основы моделирования обтекания профиля на базе моделей идеального газа

В рамках моделей идеального газа наиболее простой является модель потенциального течения, которая является основной для различных численных методов, применяемых для решения задач обтекания профиля. Остановимся на формулировке задачи в рамках потенциальных течений.

Как известно, потенциальное течение описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \quad (1)$$

в котором потенциал скорости  $\phi$  связан с компонентами скорости как

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (2)$$

Решение уравнение Лапласа осуществляется при соответствующих граничных условиях (ГУ). Для неподвижного контура ГУ записываются в виде:

на границе контура

$$V_n = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} \Big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{n}$  – вектор нормали к поверхности тела;  $\Gamma$  – контур тела; на бесконечности

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{x\rightarrow\infty} = V_\infty \cos(V_\infty, x), \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_{y\rightarrow\infty} = V_\infty \cos(V_\infty, y) \quad (4)$$

Задача нахождения решения уравнения Лапласа (1) по заданному значению производной на границе тела (3) и на бесконечности (4) яв-

ляется краевой задачей Неймана, решение которой можно получить различными методами. ГУ (3) получили название *условия непротекания*. Основными методами решения задачи Неймана являются: аналитические методы с использованием теории функций комплексного переменного (ТФКП), численные и численно-аналитические методы. Будем называть аналитическими методами все методы, которые позволяют записать формулы для определения скоростей в виде конечных формул, конечных или бесконечных рядов и интегралов. ТФКП предполагает использование конформных преобразований и фундаментальных решений уравнения Лапласа в виде газодинамических особенностей типа точечного вихря, источника (стока) и диполя. Для контура отличного от круга в ТФКП применяются конформные отображения, которые позволяют заданный замкнутый контур отобразить на круг во вспомогательной плоскости. Общих методов конформных отображений не существует, для каждого конкретного контура необходимо отыскивать специальные функции, осуществляющие конформное отображение. В этом состоит главный недостаток метода ТФКП, использующего конформные отображения. Можно отметить, что для выпуклых многоугольников существует общий метод конформного отображения на основе интеграла Шварца-Кристоффеля [1, 2]. Для аэродинамических профилей на основе ТФКП имеется несколько аналитических решений. Наиболее известными являются профили Н.Е. Жуковского [3], профили Кармана-Трефтца [4] и профиль «чечевица», образованный двумя дугами окружности [5, 6, 7]. Последний профиль получил название двуугольник. В методических указаниях рассмотрены численный метод (панельный) и численно-аналитический метод решения задачи Неймана. Численно-аналитический метод [8, 9, 10, 11] описан в пункте 1.2. Численный панельный метод представлен в пункте 1.3.

Панельный метод и численно-аналитический метод имеют общую фундаментальную основу, которая заключается в том, что в этих методах решение собственно уравнения Лапласа (1) не производится. Оно получается на основе принципа суперпозиции, который позволяет построить потенциал скорости из известных фундаментальных решений уравнения Лапласа. Потенциал скорости должен удовлетворять ГУ в форме (3) и (4). ГУ на бесконечности (4) выполняется автоматически в силу использования фундаментальных решений в виде точеч-

ных вихрей и панельных источников. По сути, перечисленные методы можно отнести к методам граничного элемента. Таким образом, для численно-аналитического и панельного методов расчётная сетка строится по границе обтекаемого тела, в отличие от сеточных методов поля (см. раздел 2).

Таким образом, панельного и численно-аналитического методов общим алгоритмом является разбивка контура профиля на граничные элементы (панели). Контрольные точки, в которых выполняется условие непротекания (3), могут располагаться по двум вариантам, либо на поверхности профиля, либо на самом граничном элементе. Считается, что размещение контрольных точек на поверхности профиля предпочтительней с точки зрения точности расчёта. Газодинамические особенности (сингулярности) располагаются почти всегда на самих граничных элементах. Дело в том, что в самой точке, где располагается сингулярность, как известно скорость обращается в бесконечность. Это обстоятельство затрудняет в дальнейшем вычисление распределение скоростей и давлений на поверхности профиля, поэтому следует считать лучшее расположение дискретных вихрей и панельных источников на самих граничных элементах. Нужно сказать, что строгих математических доказательств сходимости и единственности решений на основе панельных и численно-аналитических методов почти не существует. Отсюда существует некоторый произвол в формировании расчётных сеток. Однако мировой опыт применения методов особенностей в аэродинамике показал их высокую эффективность для инженерных приложений. Подробности формирования расчётных сеток для конкретных методов рассматриваются ниже.

### *1.2 Методика построения расчётной сетки на базе модели идеального газа для численно-аналитическому методу*

В численно-аналитическом методе применяется расчётная схема « $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{4}$ », где на расстоянии  $\frac{3}{4}$  от начала граничного элемента располагается контрольная точка, а на расстоянии  $\frac{1}{4}$  длины граничного элемента – дискретный вихрь. Гипотеза Чаплыгина-Жуковского о конечности скорости на задней кромке выполняется путём добавления граничного элемента вблизи задней кромки. Дополнительный граничный

элемент располагается на продолжении средней линии профиля и содержит только контрольную точку, расположенную на расстоянии  $\frac{1}{4}$  длины граничного элемента. Дискретный вихрь, отвечающий за выполнение условия Чаплыгина-Жуковского, располагается в центре окружности во вспомогательной плоскости. В физической плоскости этот вихрь согласно преобразованию Жуковского [3] преобразуется в разрез, лежащий на средней линии профиля. Пример такой расчётной схемы по численно-аналитическому методу для аэродинамического профиля показан на рисунке 1.



Рисунок 1 – Пример построения расчётной сетки для численно-аналитического метода

Особенностью расчётных сеток является то, что для симметричных профилей граничные элементы, а, следовательно, и дискретные вихри и контрольные точки располагаются симметрично. В этом случае на хвостике профиля вихри на верхней и на нижней поверхности находятся друг над другом, аналогично располагаются и контрольные точки. Такое расположение является предпочтительным, поскольку в противном случае, вихрь располагался бы слишком близко к контрольной точке, и это приводило бы к сингулярности в решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

### *1.3 Методика построения расчётной сетки на базе модели идеального газа для панельного метода*

Построение расчётной сетки по панельному методу предполагает нанесение граничных элементов на поверхность аэродинамического профиля. Рекомендации при построении расчётной сетки состоят в том, чтобы длины соседних граничных элементов не сильно отлича-

лись друг от друга. Известно, что сгущение сетки к носику и хвосту профиля увеличивает точность расчёта при одинаковом количестве граничных элементов. На рисунке 2 показан пример построения расчётной сетки для профиля по панельному методу при равномерном разбиении по хорде. Расчётная сетка, показанная на рисунке 2, содержит 5 граничных элементов на верхней поверхности и столько же на нижней. Контрольные точки располагаются на середине граничного элемента. Из рисунков 1-2 следуют одинаковые свойства расчётных сеток для разных численных методов (панельного метода и численно-аналитического метода): концы граничных элементов лежат на поверхности профиля. Следовательно, для всех методов граничного элемента (методов особенностей) можно использовать один и тот же генератор расчётной сетки, что может унифицировать вычислительные программы по разным методам особенностей.

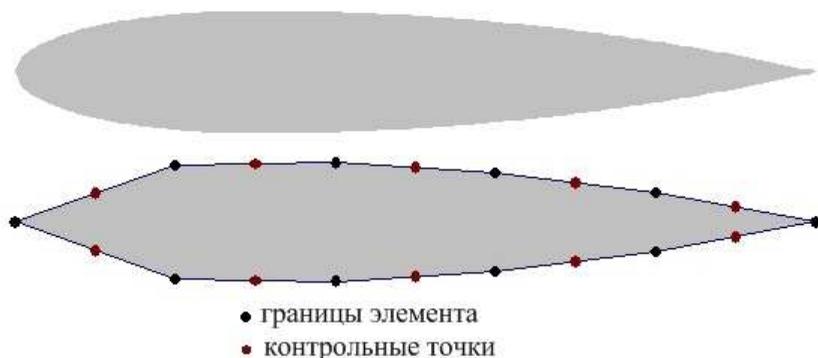


Рисунок 2 – Пример построения расчётной сетки для панельного метода

#### 1.4 Технология численного моделирования обтекания профиля на основе модели идеального газа по численно-аналитическому методу

Численно-аналитический метод сводится к выполнению в контрольных точках условий непротекания в форме (3), что приводит к необходимости решать СЛАУ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица аэродинамического влияния размерностью  $N \times N$ ;

$\mathbf{\Gamma}$  – вектор-столбец интенсивностей дискретных вихрей;

$\mathbf{R}$  – вектор правых частей.

Матрица аэродинамического влияния  $\mathbf{A}$  является плотноупакованной матрицей с преобладанием диагональных компонент. Это свойство матрицы аэродинамического влияния предопределяет хорошую её обусловленность, что даёт всегда устойчивое решение СЛАУ (5). Преобладание диагональных компонент объясняется тем, что наибольший вклад в величину скорости в ближайшей контрольной точке вносит дискретный вихрь, расположенный на самом граничном элементе. Это обстоятельство считается преимуществом методов особенностей над другими численными методами. В основе вычисления компонент матрицы  $A_{ij}$  лежат формулы для вычисления компонент скоростей от дискретного точечного вихря, которые легко можно получить из комплексного потенциала для вихря

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_v), \quad (6)$$

где  $W$  – комплексный потенциал точечного вихря;

$i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;

$z = x + iy$  – комплексная координата;

$z_v = x_v + iy_v$  – комплексная координата вихря.

Компоненты скорости в любой точке плоскости вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}\left(\frac{dW}{dz}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - z_v}\right), \\ v &= -\operatorname{Im}\left(\frac{dW}{dz}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - z_v}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u, v$  – компоненты скорости вдоль оси  $OX$  и  $OY$ , соответственно.

Зная углы наклоны граничных элементов, можно легко вычислить нормальную составляющую скорости в каждой контрольной точке. Таким образом, нормальная компонента скорости в  $i$ -ой контрольной точке от  $j$ -го вихря будет функцией

$$V_{nij} = f(\Gamma_j, u_{ij}, v_{ij}, \alpha_i), \quad (8)$$

где  $\alpha_i$  – угол наклона  $i$ -ого граничного элемента (панели).

Тогда элемент матрицы  $\mathbf{A}$  будет равен

$$A_{ij} = \tilde{f}(u_{ij}, v_{ij}, \alpha_i). \quad (9)$$

После решения СЛАУ и нахождения неизвестных интенсивностей  $\Gamma_j$  можно поле скоростей вычислять через ранее рассчитанные элементы матрицы аэродинамического влияния (9), что существенно экономит компьютерное время. На рисунке 3 представлены линии тока около симметричного профиля, полученные по численно-аналитическому методу.

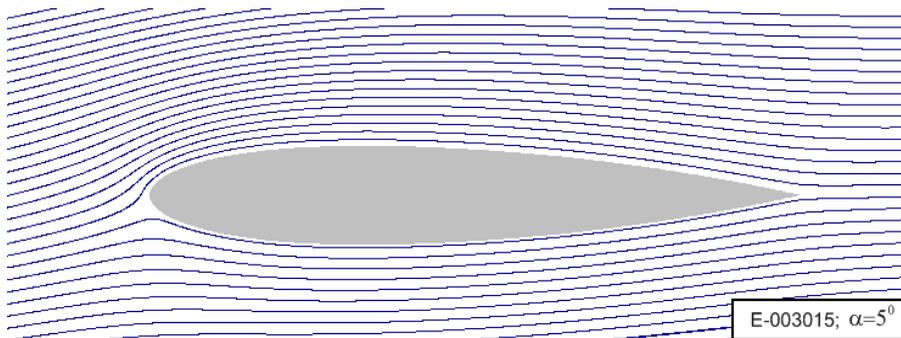


Рисунок 3 – Линии тока течения около профиля (численно-аналитический метод)

### *1.5 Технология численного моделирования обтекания профиля на основе модели идеального газа по панельному методу*

Панельный метод сводится к выполнению в контрольных точках (см. рисунок 2) ГУ непротекания в форме (3), которые могут быть записаны в виде системы уравнений

$$-U_{\infty} \sin \alpha_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{\partial}{\partial n_k} (\ln r_{kj}) dS_j = 0, \quad (10)$$

где  $\sigma_j$  – плотность распределения панельного источника на  $j$ -ой панели;

$n_k$  – нормаль к панели в  $k$ -ой контрольной точке;

$r_{kj}$  – расстояние от  $k$ -ой контрольной точки до  $j$ -ой панели;

$S_j$  – координата вдоль направления  $j$ -ой панели.

Система уравнений (10) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}, \quad (11)$$

в которой матрица аэродинамического влияния имеет вид [12]

$$B_{kj} = 0,5\delta_{kj} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n_k} (\ln r_{kj}) dS_j, \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (12)$$

а вектор-столбец правых частей записывается в виде

$$R_k = U_{\infty} \sin \alpha_k - V_{\infty} \cos \alpha_k. \quad (13)$$

Матрица аэродинамического влияния (12) в панельном методе, также как и в численно-аналитическом методе, имеет плотную структуру. Решение СЛАУ (11) с такой матрицей и правыми частями (13) можно выполнить различными стандартными методами, но экономичнее использовать метод факторизации ( $\mathbf{LU}$ - разложение) [12]. Метод факторизации состоит в применении метода исключения по Гауссу в два этапа. Сначала матрица  $\mathbf{B}$  факторизуется, превращаясь в нижнетреугольную матрицу  $\mathbf{L}$  и верхнетреугольную матрицу  $\mathbf{U}$  в качестве двух сомножителей. После этого факторизованная форма СЛАУ решается как

$$\mathbf{UX} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}. \quad (14)$$

Метод факторизации является эффективным методом, поскольку наиболее трудоёмкая часть решения СЛАУ выполняется только один раз для разных правых частей.

После нахождения распределения плотности источников  $\sigma_j$  компоненты скорости, обусловленные внесением тела в поток, в любой точке  $(x, y)$  могут быть вычислены по формулам

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{(x - x_j) dS_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2},$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma_j \int \frac{(y - y_j) dS_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2},$$
(15)

а полное поле скоростей определяется выражением

$$\vec{V} = (U_\infty + u; V_\infty + v).$$
(16)

Зная полную скорость на поверхности тела, из уравнения Бернулли для несжимаемого потока можно определить распределение давления в контрольных точках контура

$$C_p = \frac{P_k - P_\infty}{0,5\rho|\vec{V}_\infty|^2} = 1 - \left( \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V}_\infty|} \right)^2.$$
(17)

На рисунке 4 представлены линии тока около симметричного профиля, полученные по панельному методу. Количество панелей на каждой дужке (верхней и нижней) равно 228.

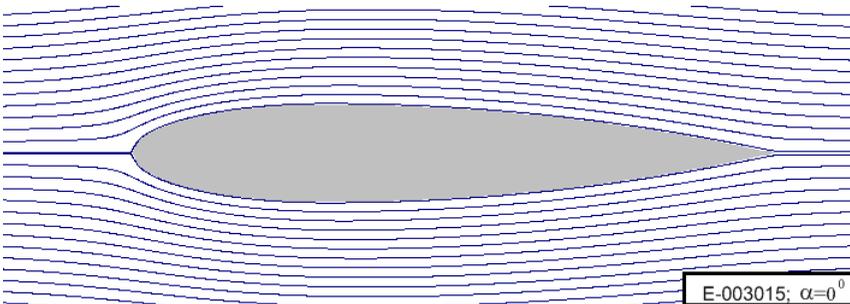


Рисунок 4 – Линии тока течения около профиля (панельный метод)

### 1.6 Учебный пример расчёта коэффициента подъёмной силы аэродинамического профиля на основе модели идеальной жидкости

В качестве учебного примера представлен расчёт коэффициента подъёмной силы симметричного профиля E-003015, у которого относительная координата максимальной толщины равна  $\bar{x}_c = 0,3$ , а относительная толщина –  $\bar{c} = 0,15$ .

Целью учебного примера является сравнение данных расчёта коэффициента подъёмной силы толстого аэродинамического профиля в различных вычислительных пакетах. С этой целью на рисунке 5 приведено сравнение расчёта коэффициента подъёмной силы толстого аэродинамического профиля по нескольким вычислительным программам для модели идеального газа.

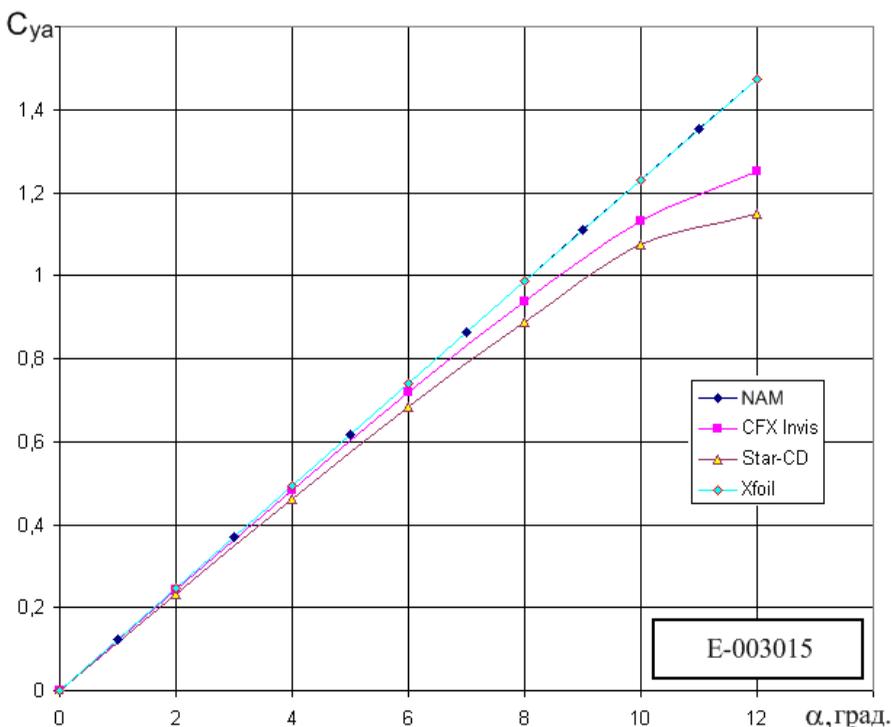


Рисунок 5 – Сравнение расчётных данных коэффициента подъёмной силы от угла атаки для модели идеального газа

Сравнение показывает, что все модели хорошо согласуются между собой до угла атаки приблизительно 8 градусов (максимальная относительная погрешность не превышает 10%). Практическое совпадение результатов отмечается для результатов, полученных в вычислительных программах *Xfoil* и *Airfoil\_NAM* (численно-аналитический метод). Наличие отличия данных в рамках одной модели идеального газа, в вычислительных пакетах CFX и Star-CD с одной стороны и в вычислительных программах *Xfoil* и *Airfoil\_NAM* с другой, объясняется наличием схемной вязкости в методах контрольного объёма (CFX и Star-CD).

## **2. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАНИЯ И РАСЧЁТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАКЕТОВ НА БАЗЕ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

1. Определить, какие характеристики должны быть получены по результатам расчета, и для каких целей будут использованы их значения. Цели определяют требования к точности расчета: так, сравнение нескольких профилей требует меньшей точности определения характеристик, чем определение аэродинамических нагрузок для последующего прочностного расчета.
2. Определить значения основных параметров, определяющих предполагаемые режимы обтекания: число Маха (несжимаемое/сжимаемое, до-/транс-/сверхзвуковое обтекание), число Рейнольдса (ламинарный или турбулентный режим течения в пограничном слое), диапазон углов атаки (отрывное или безотрывное обтекание).
3. На основании информации из п.1 и п.2, а также
  - а) требований к времени предоставления результатов,
  - б) параметров располагаемых вычислительных ресурсов,
  - в) ограничений, присущих методам, реализованных в различных вычислительных пакетах,выбрать модель и метод моделирования течения: решение уравнений Навье-Стокса (модель вязкого газа) или Эйлера (модель идеального газа) методом контрольных объемов, либо упрощенными методами.
4. Построить геометрическое описание контура профиля в виде, требуемом для подготовки расчётной модели в рамках выбранного метода: например, файл описания кривых для построения расчётной сетки в ICEM CFD, или файл эпплеровского формата для расчёта обтекания в вычислительной программе XFOIL.
5. При использовании универсальных пакетов ВГАД для моделирования обтекания на основе решения уравнений движения газа методом контрольного объёма необходимо также подготовить геометрическое описание внешнего контура расчётной области, исходя из следующих соображений:
  - а) Выходная граница должна располагаться на расстоянии не менее 20 хорд от профиля, а входная — не менее 10 хорд. Верхняя и

нижняя границы, как правило, размещаются на том же расстоянии, что и входная.

б) Рекомендуется избегать горизонтальных верхней и нижней границ. Предпочтительным вариантом является такая форма расчётной области, когда входная («левая»), верхняя и нижняя границы образуют одну граничную область. При этом направление скорости набегающего потока на ней — всегда внутрь расчётной области. Для этого угол наклона верхней и нижней границ должен быть больше максимального угла атаки, который предполагается задавать при моделировании обтекания.

6. Построить топологию предполагаемой блочно-структурированной расчётной сетки. Выбор типа топологии зависит от геометрических особенностей рассматриваемого профиля (толщина, кривизна, форма задней кромки). Относительно универсальной является C-C-топология (рисунок б).
7. На основании созданной топологии построить расчётную сетку, выбирая локальные размеры элементов исходя из следующих рекомендаций [13]:
  - а) Размер ячейки в направлении вдоль хорды профиля: 0,1% хорды на передней кромке, 0,5% на основной части профиля, 0,125-0,15% хорды у задней кромки. Изменение размера ячеек при переходе от основной части профиля к окрестностям кромок должно происходить плавно, отношение размеров двух соседних ячеек должно быть не более 1,25.
  - б) В случае тупой задней кромки размер ячейки у задней кромки должен быть согласован с размером ячейки по толщине задней кромки. При этом по толщине задней кромки должно быть порядка 4-8 ячеек.
  - в) Размер пристеночной ячейки в направлении по нормали к поверхности профиля должен выбираться исходя из требований к безразмерному расстоянию от стенки  $y_+$  для используемой модели турбулентности. Если предполагается использование низкорейнольдсовой модели турбулентности, то размер пристеночной ячейки должен соответствовать безразмерному расстоянию от стенки  $y_+ \leq 2$  для всей поверхности профиля. Если предполагается использование высокорейнольдсовой модели, то размер присте-

ночной ячейки должен соответствовать  $30 \leq y_+ \leq 500$  для всей поверхности профиля.

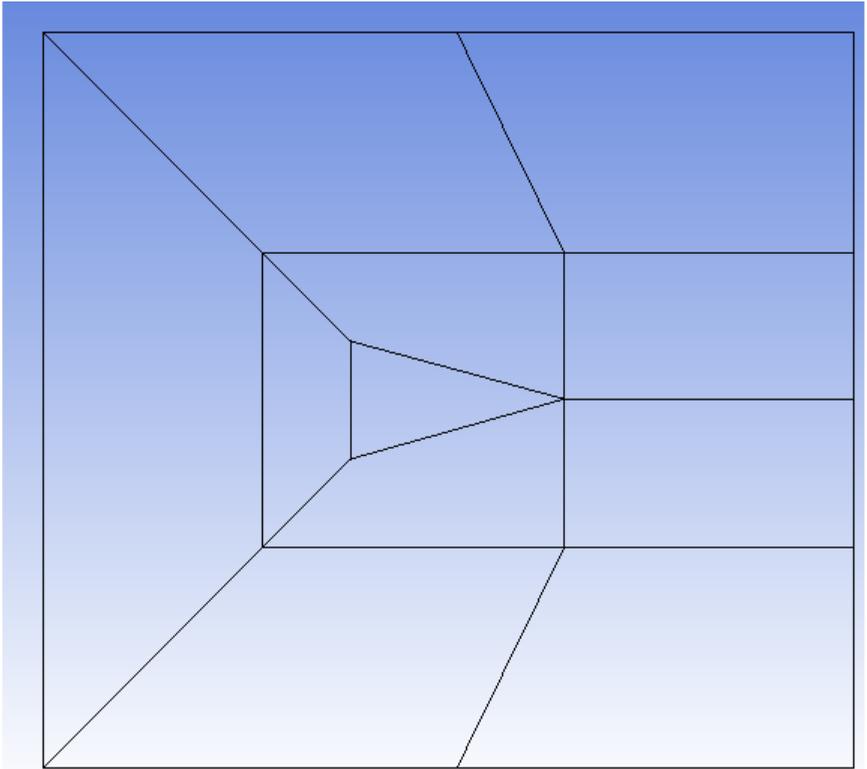


Рисунок 6 – Пример универсальной сетки C-C-топологии

При использовании низкорейнольдсовой модели турбулентности в пограничном слое должно быть не менее 20 ячеек, а при использовании высокорейнольдсовой модели — не менее 4...5 ячеек. Оценить толщину пограничного слоя  $\delta$  и величину расстояния от стенки  $y_+$  до проведения расчетов можно по следующим формулам (для пограничного слоя на плоской пластине):

$$\frac{\delta}{x} = 0,37 \left( \frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5}, \quad Y_+ = \frac{y u_\tau}{\nu},$$

где  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ ,  $\tau_w = c_F b \frac{\rho V_\infty^2}{2}$ ,  $c_F = 0,455 / (\lg \text{Re})^{2,58}$ ,

число Рейнольдса как правило рассчитывается по хорде профиля

$b$ , т.е.  $\text{Re} = \frac{V_\infty b}{\nu}$ ,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости (для

воздуха при нормальных условиях  $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

г) Если размер ячеек увеличивается по мере удаления от контура профиля, то отношение размеров соседних ячеек не должно превышать 1,25. То же самое относится и к увеличению размеров ячеек в направлении потока в следе за профилем.

8. На основании построенной сетки создать расчётную модель в выбранном пакете ВГАД. Для этого необходимо:

а) Задать граничные условия. Для несжимаемого обтекания это как правило компоненты вектора скорости на входной границе ( $V_x = V_\infty \cos \alpha$ ,  $V_y = V_\infty \sin \alpha$ ) и среднее давление на выходной границе. Кроме граничных условий для параметров течения необходимо задать граничные условия и для параметров турбулентности. Как правило, они задаются в переменных «интенсивность – масштаб турбулентности». Характерные значения для спокойной атмосферы: интенсивность 1%, масштаб 1 мм. На выходной границе для параметров турбулентности обычно задаются т.н. «мягкие» граничные условия (нулевые градиенты вдоль линий тока).

б) Задать начальные условия. Для первого значения угла атаки в серии можно использовать в качестве начальных условий равномерное поле скорости. Для последующих значений в качестве начальных условий лучше использовать поле течения, полученное в расчете для предыдущего значения угла атаки.

в) Задать свойства газа в соответствии с условиями обтекания.

г) Задать параметры численного метода. Основным параметром является схема интерполяции для конвективных членов (иногда

называемая разностной схемой). Для повышения точности расчетов необходимо использовать схему не ниже второго порядка.

д) Задать дополнительные критерии контроля сходимости итерационного процесса решения. Как правило, это значения аэродинамических сил, действующих на профиль. Основными критериями сходимости являются значения нормированных средне-взвешенных невязок дискретных аналогов уравнений течения.

9. В ходе расчёта обтекания необходимо следить за поведением основных и дополнительных критериев сходимости из п. 8. Сошедшее решение должно удовлетворять следующим критериям:

а) Значения сил, действующих на профиль, прекратили изменяться от итерации к итерации.

б) Невязки по всем переменным прекратили изменяться и вышли на достаточно малые постоянные значения (возможны небольшие колебания относительно некоторого постоянного уровня).

в) установившиеся значения невязок, по крайней мере, на три порядка меньше их начальных значений на первых итерациях.

10. По завершении расчета необходимо проверить адекватность полученных результатов выбранным моделям и допущениям. Так, если расчет проводился в предположении несжимаемого обтекания, необходимо проверить значения местных скоростей и соответствующие им значения чисел Маха. Обязательно необходимо проверить распределение безразмерного расстояния от стенки  $y_+$ . В случае несоответствия диапазона полученных значений диапазону применимости выбранной модели турбулентности, необходимо сменить модель турбулентности или перестроить расчетную сетку и повторить решение. Если расчёты проводились для условий и конфигураций, допускающих применение простых методов (таких как реализованный в программе Xfoil), рекомендуется сравнить полученные результаты с результатами расчётов по этим методам. По возможности рекомендуется также исследовать полученное решение на зависимость от расчётной сетки. Для этого надо построить последовательность как минимум из трёх сеток с заметно различающимся (как минимум в 1,1 раз, лучше – в 2 раза) характерным размером элемента (или числом элементов). Проведя расчёты на этих сетках нужно убедиться, что по мере измельчения сетки значения определяемых в расчёте параметров меняются незначительно (характер изменения должен соответствовать

асимптотическому стремлению к некоторому значению по мере измельчения сетки).

### 2.1 Учебный пример расчёта коэффициента подъёмной силы аэродинамического профиля на основе модели вязкой жидкости

Результаты расчётов (зависимости коэффициента подъёмной силы от угла атаки, поляры и параболы индуктивного сопротивления) для профиля E-003015 показаны на рисунках 7-9. Расчётные поляры приведены только для модели вязкого газа.

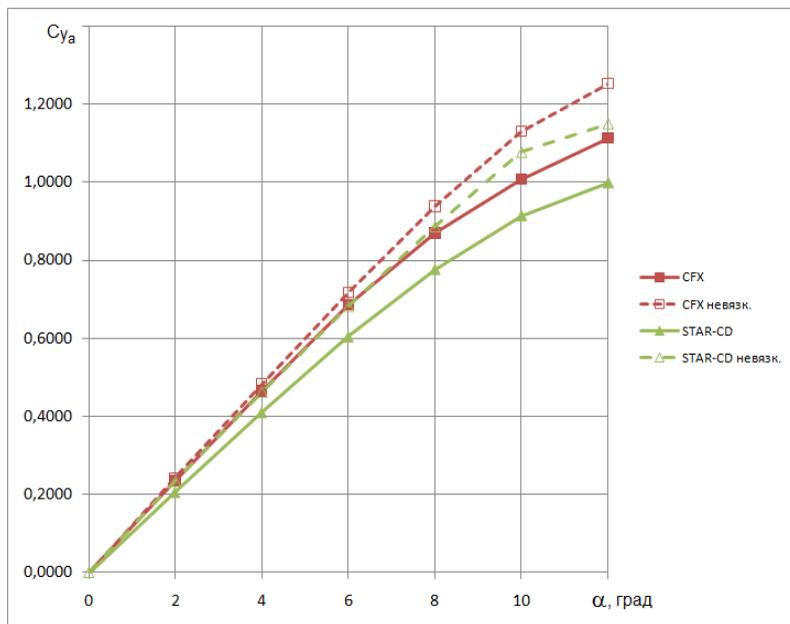


Рисунок 7 – Зависимость коэффициента подъёмной силы от угла атаки для профиля E-003015

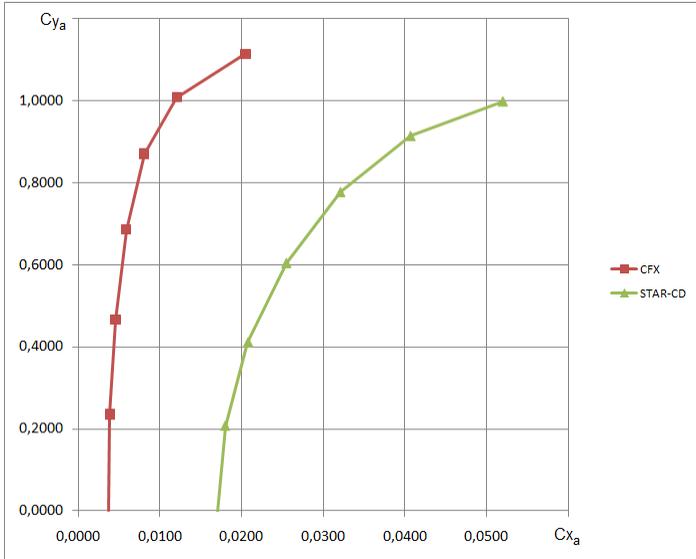


Рисунок 8 – Поляра профиля E-003015

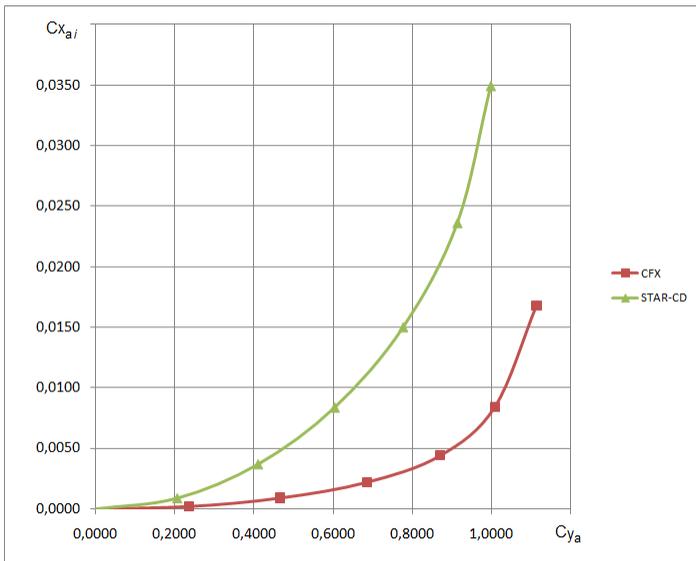


Рисунок 9 – Парабола индуктивного сопротивления профиля E-003015

Из рисунка 7 следует, что расчёт в CFX предсказывает значение производной коэффициента подъёмной силы по углу атаки больше, чем расчёт в STAR-CD. Расчёты по модели идеального газа дают бóльшие значения производной коэффициента подъёмной силы по углу атаки, чем расчёты по модели вязкого газа. Значения производной  $C_{ya}^\alpha$  в расчётах по модели идеального газа больше величины  $2\pi$  для исследуемого профиля, но это объяснимо тем, что профиль имеет достаточно бóльшую относительную толщину.

Из рисунка 8 видно, что для профиля E-003015 расчёт в CFX даёт меньшее значение коэффициента сопротивления при нулевой подъёмной силе по сравнению с расчётом в STAR-CD. Из рисунка 9 следует, что расчёт в STAR-CD предсказывает бóльшее значение коэффициента отвала полярности, чем расчёт в CFX.

Приведённые результаты расчётов показывают хорошую согласованность данных для коэффициента подъёмной силы и большое расхождение в определении коэффициента лобового сопротивления. Таким образом, при моделировании течений около аэродинамических профилей необходимо с большим вниманием отнестись к методическим указаниям, представленным в данной работе и помнить о том, что *главным критерием истины являются результаты эксперимента*. Математическое моделирование позволяет только приближённо рассчитывать аэродинамические характеристики аэродинамических профилей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены методики генерации расчётных сеток для численно-аналитического метода, панельного метода и вычислительных пакетов Star-CD, CFX и Xfoil.

Даны практические указания по выбору тех или иных параметров генерируемых расчётных сеток.

Описаны основные этапы задания условий расчётов (начальные и граничные условия и т.д.).

При изложении методологий численного моделирования обтекания профиля крыла использован опыт, накопленный на кафедре аэрогидродинамики.

Разработан учебный пример расчёта аэродинамических характеристик одного профиля крыла всеми разработанными методиками и проведён анализ полученных расчётных данных.

Методические указания будут полезны студентам, занимающимся расчётами аэродинамических профилей крыльев при выполнении курсового, дипломного проектирования и научно-исследовательской работы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного [Текст]: [изд. 3-е] / *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* – М.: Наука, 1965. – 716 с.
- 2 *Свейников, А. Г.* Теория функции комплексной переменной [Текст]: [3-е изд.] / *А. Г. Свейников, А. Н. Тихонов.* – М.: Наука, 1974. – 319 с.
- 3 *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / *Л. Г. Лойцянский.* – М.: Наука, 1978. – 736 с.
- 4 *Валандер, С. В.* Лекции по гидроаэромеханике [Текст]: Учеб. пособие / *С. В. Валандер* / Под ред. Н. Н. Поляхова. – 2-е изд. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005. – 304 с.
- 5 *Иванов, В. И.* Конформные отображения и их приложения [Текст] / *В. И. Иванов, В. Ю. Попов.* – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
- 6 *Фабрикант, Н. Я.* Курс аэродинамики [Текст]: ч. I / *Н. Я. Фабрикант.* – Л.-М.: Гос. объединённое науч.-техн. изд-во НКТП СССР, ред. техн.-теорет. лит-ры, 1938. – 384 с.
- 7 *Фабрикант, Н. Я.* Аэродинамика [Текст]: ч. I / *Н. Я. Фабрикант.* – Л.-М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949. – 624 с.
- 8 *Фролов, В. А.* Метод построения потенциального течения около симметричного профиля, образованного дугами эллипса и окружности [Текст] / *В. А. Фролов* // Управление движением и навигации летат. аппаратов: Сб. тр. XII Всерос. науч.-техн. сем. по управлению движением и навигации летат. аппаратов. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2006. – С.260-265.
- 9 *Фролов, В. А.* Новый метод построения решения задачи о потенциальном течении около двумерных тел [Текст] / *В. А. Фролов* // Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование: материалы третьей междунар. летней науч. школы. – Кемерово: ИНТ, 2006. – С.459-467.
- 10 *Фролов, В. А.* Повышение точности в численно-аналитическом методе для задач потенциального обтекания профиля с парусным закрылком [Текст] / *В. А. Фролов* // Управление движением и навигации летат. аппаратов: Сб. тр. XIII Всерос. науч.-техн. семинара по управлению движением и навигации летат. аппаратов. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2007. – С.78-82.
- 11 *Фролов, В. А.* Решение потенциальных задач обтекания двумерных тел численно-аналитическим методом [Текст] / *В. А. Фролов* // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформа-

ційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2005. – № 661.– С.229-240.

12 *Флетчер, К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей [Текст]: в 2-х томах: Т. 2: [пер. с англ.] /*К. Флетчер.* – М.: Мир, 1991. – 552 с.

13 *Vassberg, J.C.* Guidelines for Baseline Grids [Text] /*J.C. Vassberg* //AIAA CFD Drag Prediction Workshop. 19<sup>th</sup> Applied Aerodynamics Conference. – AIAA, 2001.