МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Ряды

Электронные методические указания

САМАРА
2011

УДК 517.521.2

Составитель: **Пчелкина Юлия Жиганшевна**

Ряды [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. Ю. Ж. Пчелкина. – Электрон. текстовые дан. (0,34 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Настоящие методические указания содержат образцы решений типовых задач, и в кратком изложении теоретические сведения, необходимые для выполнения упражнений и индивидуальных заданий, по теме «Ряды». Разобраны задачи на нахождение общего члена ряда, суммы ряда, а также задачи по исследованию сходимости знакопостоянных и знакопеременных числовых рядов, нахождение области и радиуса сходимости функциональных и степенных рядов.

Методические указания предназначены для подготовки бакалавров направления 010400.62 «Прикладная математика и информатика» факультете информатики, изучающих дисциплину «Математический анализ» в 1 и 2 семестрах.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

1. Понятие ряда, общего члена ряда, частичной суммы ряда.

Задача 1.1. Составить формулу общего члена числового ряда:

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{36}+\frac{1}{64}\dots.$$

Решение. Во-первых, данный ряд является знакочередующимся, причём первый множитель является отрицательным. Поэтому формула общего члена ряда должна содержать множитель $(-1)^n$. Во-вторых, все члены ряда представляют собой дроби со знаменателем, равным единице. В-третьих, знаменатели каждой дроби являются квадратами последовательных натуральных чётных чисел: $4=2^2, 16=4^2, 36=6^2$ и так далее. Таким образом, получим формулу: $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)^2}$.

Задача 1.2. Найти 8-й член числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi n}{6}.$$

Решение. $a_8=tg\frac{\pi\cdot 8}{6}=tg\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 1.3. Найти частичную сумму S_5 числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}.$$

Решение: $S_5=\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{6}{4}+\frac{8}{5}+\frac{10}{6}=6\frac{7}{10}$.

2. Признаки сходимость знакопостоянных числовых рядов

Задача 2.1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{n+1}.$$

Решение. Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-4}{n+1} = 3 \neq 0$. Предел общего члена ряда не равен нулю, следовательно, данный ряд является расходящимся.

Задача 2.2. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Решение. Данный ряд относится к типу обобщённых гармонических рядов $\frac{1}{n^p}$, причём $p = \frac{2}{3} < 1$, значит, ряд расходится.

Задача 2.3. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2-1}.$$

Решение. Используем признак Даламбера. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Здесь $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1}$. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1} : \frac{2^n}{n^2-1} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n^2-1)}{n^2+2n} = 2 > 1$. Согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Задача 2.4. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{2n}}.$$

Решение. Применим радикальный признак Коши. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n}{n^{2n}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n^2} = 0 < 1$. Согласно признаку Коши, данный ряд сходится.

Задача 2.5. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{\cos n}.$$

Решение. Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{\cos n}$. Числитель данной дроби стремится к бесконечности, а знаменатель – ограниченная величина, принимающая, в зависимости от n значения различных знаков. Предел общего члена ряда, таким образом, не определён (и, естественно, не равен нулю), следовательно, данный ряд является расходящимся.

3. Признаки сходимости знакопеременных числовых рядов

Задача 3.1. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Решение. Запишем последовательность абсолютных величин членов данного ряда. Получим: $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$. Члены ряда убывают по абсолютной величине. Теперь найдём предел общего члена ряда, составленного из абсолютных величин. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$ - как предел обобщённого гармонического ряда при $p>1$. Таким образом, выполняются оба условия признака Лейбница, и данный ряд является сходящимся. Поскольку выше мы установили сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, то данный ряд сходится абсолютно.

Задача 3.2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 0{,}3^n.$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0{,}3^n$. Он будет сходящимся, так как члены его составляют геометрическую прогрессию, знаменатель которой по модулю меньше единицы. Следовательно, данный ряд сходится, и сходится абсолютно.

4. Функциональные и степенные ряды. Область и радиус сходимости ряда.

Задача 4.1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 5^n}.$$

Решение. Запишем коэффициент данного ряда: $\frac{1}{n \cdot 5^n}$. Найдём радиус сходимости данного ряда: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n \cdot 5^n} : \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5(n+1)}{n} = 5$. Интервал сходимости данного ряда будет $(-5;5)$. Проверим поведение ряда в конечных точках данного интервала.

Пусть $x = 5$. Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n \cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$. Проверим его сходимость по признаку Даламбера. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{n+1} : \frac{5^n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} = 5 > 1$. Ряд расходится, следовательно, точка $x = 5$ не принадлежит области сходимости.

Пусть $x = -5$. Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n \cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{2n}}{n \cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{n}$. Получили знакочередующийся ряд, расходимость которого легко устанавливается с помощью признака Лейбница (не выполняется первое условие). То есть, точка $x = -5$ также не входит в область сходимости. Итак, область сходимости данного ряда - $(-5;\ 5)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. Лекции по математическому анализу //М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 1 //М.: Издательство Проспект, 2007. – 660 с.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 2 //М.: Издательство Проспект, 2004. – 357 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1 //М.: Физматлит, 2005. – 645 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2 //М.: Физматлит, 2006. – 464 с.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // М.: Наука, 1985. – 384с.