МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева»
(национальный исследовательский университет)

С.П.Безгласный

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Электронные методические указания к курсовой работе

Самара, 2010

Автор: Безгласный Сергей Павлович – доцент кафедры теоретической механики, кандидат физико-математических наук, доцент.

Приводятся краткие сведения по теории и практические рекомендации по выполнению основных разделов типовой курсовой работы по курсу «Стабилизация и управление динамических систем»:

составление уравнений управляемых программных движений и уравнений в отклонениях в полной форме и в первом приближении;

синтез стабилизирующего управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость неустойчивого стационарного движения и заданных программных движений механической системы с двумя степенями свободы;

синтез и стабилизация программных движений неавтономных лагранжевых систем.

Даны примеры выполнения всех разделов курсовой работы и требования к содержанию пояснительной записки.

Методические указания предназначены для магистрантов, обучающихся по направлению 010800.68 «Механика и математическое моделирование» в рамках магистерской программы «Математическое и компьютерное моделирование механики космических систем».

Работа выполнена на кафедре теоретической механики.

Ил. 21 Библиогр.: 11 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления. При этом на первый план выдвигаются такие свойства систем, как устойчивость, оптимальность, поведение в присутствии неопределенных помех и т. д.

Аналитические методы построения систем программного движения [1,2] составляют основу построения (синтеза) материальных систем, движения которых происходит с заданными конструктивно обоснованными геометрико - кинематическими свойствами, устойчиво и оптимально в том или ином смысле. Программное движение систем различной физической природы или конструкции может быть осуществлено приложением к системе дополнительных сил (управляющих моментов) или изменением параметров системы в процессе движения, или построением специальных управляющих устройств (регуляторов), а также сочетанием этих возможностей.

Исходными задачами теории управления движения, в частности систем программного движения, являются обратные задачи классической динамики. В настоящее время понятие обратных задач динамики приобретает более широкое содержание: ставятся и решаются задачи об осуществимости, об устойчивости и оптимальности заданного движения механической системы, а также задачи об определении функционалов, принимающих стационарное значение на заданном движении [3-5].

Освоению методов теории устойчивости и управления движения способствует разбор специальных задач, которые иллюстрируют соответствующие разделы курса «Стабилизация и управление динамических систем» и их роль при анализе динамики механических систем. Для закрепления навыков самостоятельного решения задач механики в соответствии с учебными программами студенты механических специальностей выполняют курсовую работу, в которой проводится комплексный анализ устойчивости свободных и программных движений и возможности управляемости ими для системы с двумя степенями свободы на основе различных методов теории устойчивости и управления.

Предлагаемые методические указания посвящены исследованию вопросов синтеза и стабилизации программных движений механических систем. Задание на курсовую работу по стабилизации и исследованию свойств управляемости состоит из трех частей.

В первой части работы выводятся уравнения движений механической управляемой системы второго порядка[6]; проводится реализация и обеспечение устойчивости заданного программного движения методом построения внешнего управления. Решаются задачи синтеза программного управления, обеспечивающего реализацию заданного желаемого движения механической системы (в общем случае не являющегося решением исходной неуправляемой системы), и стабилизации этих движений по принципу обратной связи, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного движения

Во второй части работы синтезируется позиционное управление, стабилизирующее неустойчивые стационарные движения системы [3,5,7].

Третья часть посвящена построению и стабилизации программного движения неавтономной лагранжевой системы. Основное преимущество изложенных в этой части результатов состоит в том, что исследованное программное движение в общем случае произвольно и может не являться собственным движением системы, а управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость этого программного движения, найдено аналитически в общем виде [7-10].

В каждой из перечисленных частей должны содержаться необходимые теоретические выкладки и расчеты [11]. Численные результаты иллюстрируются на графиках. В конце каждой части приводятся выводы по проделанной работе.

1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Первая часть работы посвящена построению уравнений движения управляемой механической системы и анализу их решений. Для механической системы с двумя степенями свободы проводится реализация и обеспечение устойчивости заданного программного движения методом построения двухуровневого управления. Решаются задача конструирования программного управления, обеспечивающего реализацию заданного желаемого движения механической системы (в общем случае не являющегося решением исходной неуправляемой системы), и задача синтеза по принципу обратной связи позиционного (стабилизирующего) управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость программного движения механической системы.

На этом этапе необходимо:

составить дифференциальные уравнения движений управляемой механической системы с двумя степенями свободы;

выбрать для реализации желаемое программное движений заданной системы;

построить программное управляющее воздействие, реализующее заданное движение механической системы;

вывести уравнения возмущенного движения управляемой системы в отклонениях и исследовать на устойчивость программное движение;

синтезировать по принципу обратной связи стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения.

1.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В курсах теоретической механики и механики сплошных сред изучаются статические и динамические системы. При этом вопросы управления этими системами не рассматриваются. В то же время и в природе и в технике имеются динамические системы, снабженные исполнительными механизмами (двигателями), что позволяет изменять позицию (состояние) этих систем, то есть управлять ими. Будем говорить в этом случае, что рассматривается движение управляемого объекта или некоторой динамической управляемой системы. Рассмотрим автономную управляемую механическую систему, движения которой в общем случае описываются дифференциальными уравнениями с функциональным включением

$$\dot{y} = f(y,u) \quad , \tag{1.1}$$

где $y = y(t)$ – n-мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние управляемого объекта; u – s-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, характеризующий воздействие на систему исполнительных механизмов; $f(y,u)$ – дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих координат.

Физический смысл управляющих воздействий может быть разного характера: это могут быть непосредственно управляющие силы и моменты (в случае идеальных исполнительных механизмов) или управляющие сигналы, подающиеся на эти механизмы, когда необходимо учесть их функционирование. Ограничения на управления u, встречающиеся на практике, в компактном виде можно описать выражением

$$u \in W,$$

где функциональное множество W может задавать ограничения на величину или производную управления, ограничения на интеграл или ограничение в среднеквадратичном (по энергии) и другие.

В случае отсутствия управления ($u \equiv 0$) уравнения (1.1) описывают некоторые движения автономной неуправляемой системы, соответствующие ее решениям. При добавлении управления система уравнений (1.1) может иметь вообще говоря и другие решения, которые не являлись решениями неуправляемой системы.

Определение

Программным (желаемым) движением системы назовем ограниченную, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемую n-мерную вектор-функцию $y^{П}(t)$, описывающую некоторое заданное движение механической системы.

Определение

Управление $u^{П}(t)$, реализующее программное движение $y^{П}(t)$ системы (1.1) в силу тождества

$$\dot{y}^{П}(t) = f(y^{П}(t), u^{П}(t)), \quad t \in [t_0, t_1), \tag{1.2}$$

называется программным управлением. Совокупность, состоящую из трёх элементов ($y^{П}, u^{П}, [t_0, t_1)$), называют программным управляемым процессом.

В разных ситуациях программный управляемый процесс может быть задан в явном виде, в неявном виде (например, как решение экстремальной задачи) или вообще быть неизвестным. Кроме того, сами программные движения по своим свойствам могут быть устойчивыми, асимптотически устойчивыми (по Ляпунову) или неустойчивыми, то есть фактически не реализуемыми соответствующим программным управлением. В зависимости от этого возникают разные задачи теории управления.

В этой работе ставится и решается задача о двухуровневом управлении, которая состоит в следующем: для выбранного программного движения механической системы надо построить программное управляющее воздействие, реализующее это заданное движение; и синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения.

Итак, на этом этапе работы необходимо:

1. Составить уравнения движения управляемой системы в виде уравнений Лагранжа второго рода добавлением в правые части уравнений соответствующие обобщенные силы.
2. Выбрать желаемые для реализации программные движения, не являющиеся решениями рассматриваемой ранее неуправляемой системы.
3. Определить управляющие воздействия, обеспечивающие реализацию выбранного программного движения.
4. Разрешить уравнения управляемого движения с определенным управлением относительно ускорений и представить их в нормальной форме.

Рассмотрим подробнее на примере первую часть поставленной задачи – о реализации программного движения управляемой механической системы.

1.2 ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАЯТНИКА.

В качестве примера построим программное управление для заданных движений маятника [1]. Рассмотрим систему, состоящую из физического маятника в виде диска массы m и радиуса R на стержне, подвешенного с помощью универсального шарнира О к вертикальной оси. Маятник имеет две степени свободы – он может вращаться с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг вертикальной оси и может отклоняться от нее на угол θ. А и С – главные моменты инерции маятника относительно главных центральных осей инерции ξ и ζ; h $(h > \frac{R}{2})$ – расстояние центра тяжести маятника от шарнира. В качестве обобщенных координат удобно выбрать величины φ, θ. Уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\begin{cases} (A+mh^2)\ddot{\theta} - (A-C+mh^2)\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta = -mgh\sin\theta \\ \left[\left(A+mh^2\right)\sin^2\theta + C\cos^2\theta\right]\ddot{\varphi} + 2(A-C+mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

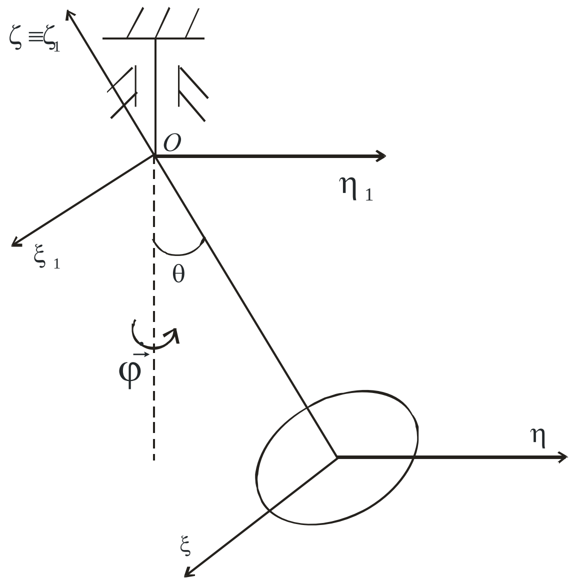


Рис.1 Механическая система

В качестве программного движения выберем следующее:

$$\begin{cases} \theta_{пр} = \kappa_1, \\ \varphi_{пр} = \kappa_2 t, \end{cases} \tag{1.4}$$

то есть необходимо, чтобы маятник совершал вращения вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_{пр} = \kappa_2$, сохраняя постоянную величину угла $\theta_{пр} = \kappa_1$ отклонения оси маятника от вертикали. Для реализации этого заданного движения (1.4) добавим к правым частям уравнений движения маятника (1.3) управляющие моменты M_1 и M_2:

$$(A + mh^2)\ddot{\theta} - (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos\theta \sin\theta = -mgh\sin\theta + M_1$$
$$\left[\left(A + mh^2\right)\sin^2\theta + C\cos^2\theta\right]\ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = M_2$$

Для нахождения этих моментов, являющихся программным управлением, подставим в уравнения движения значения $\theta_{пр} = \kappa_1$ и $\varphi_{пр} = \kappa_2 t$, соответствующие заданному движению. Тогда получим выражения для определения управляющих моментов:

$$M_1 = -(A - C + mh^2)k_2^2 \cos k_1 \sin k_1 + mgh\sin k_1 \tag{1.5}$$
$$M_2 = 0$$

С учётом полученного управления уравнения движения управляемой системы примут вид:

$$(A+mh^2)\ddot{\theta}-(A-C+mh^2)\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta=-mgh\sin\theta-(A-C+mh^2)k_2^2\sin k_1\cos k_1+mgh\sin k_1$$
$$\left[\left(A+mh^2\right)\sin^2\theta+C\cos^2\theta\right]\ddot{\varphi}+2(A-C+mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta=0$$

Причем исследуемое программное движение (1.4) является решением этой системы уравнений в силу выбора управляющих моментов M_1 и M_2. Разрешим эти уравнения относительно вторых производных:

$$\ddot{\theta}=\frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta-k_2^2\sin k_1\cos k_1)-\frac{mgh}{A+mh^2}(\sin\theta-\sin k_1)$$
$$\ddot{\varphi}=-2\frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2)\cos^2\theta+C\sin^2\theta}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta$$

и запишем полученную систему в нормальном виде. Для этого введём новые переменные согласно равенствам

$$\begin{cases} y_1=\theta, \\ y_2=\dot{\theta}, \\ y_3=\dot{\varphi}. \end{cases}$$

В параметрах y_i (i=1,2,3) уравнения управляемого движения в нормальной форме будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1=y_2 \\ \dot{y}_2=\dfrac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(y_3^2\sin y_1\cos y_1-k_2^2\sin k_1\cos k_1)-\dfrac{mgh}{A+mh^2}(\sin y_1-\sin k_1) \\ \dot{y}_3=-2\dfrac{A-C+mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 y_1+C\cos^2 y_1}y_2y_3\cos y_1\sin y_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Исходное программное движение, являясь одним из решений полученной системы, будет возможным для физической реализации только в случае, если оно будет асимптотически устойчивым по Ляпунову. При неустойчивости этого движения возможность неограниченного роста отклонений величин от их заданных значений фактически означает, что система совершает неконтролируемые движения, то есть на самом деле программные движения не реализуются полученными управляющими моментами M_1 и M_2.

1.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь вторую часть поставленной задачи двухуровневого управления – о стабилизации программного движения управляемой механической системы, то есть необходимо синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость заданного программного движения.

Пусть получено программное управление $u^{П}(t)$, реализующее заданное программное движение $y^{П}(t)$ системы (1.1) в силу тождества (1.2):

$$\dot{y}^{П}(t) = f(y^{П}(t), u^{П}(t)), \quad t \in [t_0, t_1).$$

Если начальное состояние системы $y(t_0) = y^{П}(t_0)$, то с течением времени при выполнении равенства $u(t) \equiv u^{П}(t)$ движение механической системы будет совпадать с программным. Но как известно, почти всегда существуют начальные отклонения (возмущения) $x(t_0) \neq 0$, в силу которых при движении системы равенство (1.2) не будет выполняться при действии программного управления $u(t) \equiv u^{П}(t)$, причем текущие отклонения $x(t) = y(t) - y^{П}(t)$ могут вообще говоря неограниченно расти, фактически означая, что программное управление не реализует в действительности заданного программного движения. Таким образом, возникает задача позиционного управления – имея информацию о текущих отклонениях, построить управление, позволяющее уменьшить начальное отклонение (или, соответственно, не давать возрастать текущим отклонениям).

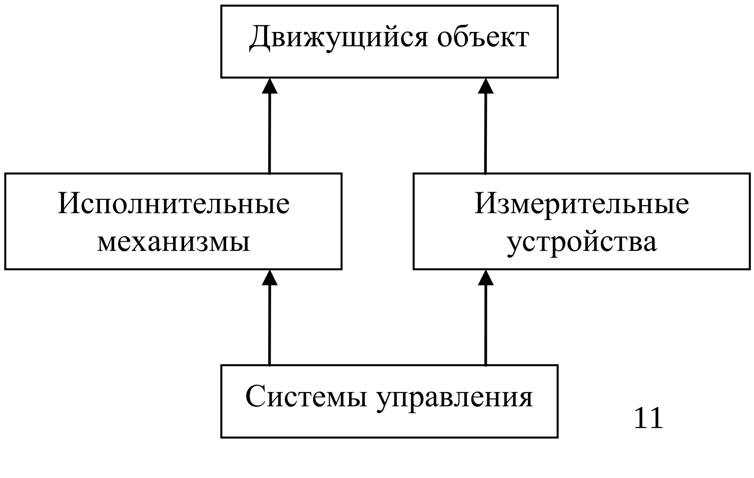
Для того, чтобы осуществить эту постановку, необходимо знать отклонения реального движения $y(t)$ от программного $y^{П}(t)$. Предположим, что имеется *m* измерительных устройств, с помощью которых можно получить первичную информацию о реальном движении. Обработав эту информацию, можно оценить текущее отклонение $x(t) = y(t) - y^{П}(t)$ и построить алгоритмы формирования управляющих сигналов.

<u>Определение</u>

Информационный процесс от обработки первичной информации до воздействия управляющих сигналов на исполнительные механизмы вместе с устройствами, реализующими этот процесс, называют **системой управления движением.**

<u>Определение</u>

Управляемой динамической системой (УДС) называется совокупность, состоящая из движущегося объекта, системы управления движением этого объекта и терминальных элементов (измерительных устройств и исполнительных механизмов), соединенных в соответствии с функциональной схемой, представленной на рисунке.



Отметим основное принципиальное отличие управляемой динамической системы от неуправляемой. В случае УДС имеют место два процесса, взаимно влияющих друг друга: механический процесс – движение управляемого объекта и информационный процесс – процесс формирования управляющих сигналов. Информационный управляющий процесс – это получение первичной информации о движении с помощью измерительных устройств, обработка этой информации и формирование на основе результатов этой обработки управляющих сил и моментов. Осуществляемая таким образом связь между движением объекта и управляющими силами и моментами называется **обратной связью.**

Для математической постановки задачи позиционного управления ограничимся простейшей моделью, описывающей получение первичной информации z:

$$z = \varphi(y) + \gamma(t), \tag{1.7}$$

где $\gamma(t)$ - инструментальные погрешности измерительных устройств.

Случаи, когда программный процесс задан в неявном виде или нет полного описания движущегося объекта, в дальнейшем рассматривать мы не будем.

Анализ текущих отклонений $x(t) = y(t) - y^{П}(t)$ удобнее всего проводить, составив уравнения возмущенного движения. Причем для управляемой системы уравнения возмущенного движения имеют тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, соответствующее программному движению $y^{П}(t)$. Исследовать это тривиальное решение на устойчивость будем на основе теорем об устойчивости и неустойчивости систем по линейному приближению [4].

1.4. УРАВНЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СИНТЕЗА ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для текущих отклонений $x(t) = y(t) - y^{П}(t)$ можно выписать дифференциальные уравнения, определяющие их поведение при $u(t) = u^{П}(t)$ для $t \in [t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} - \dot{y}^{П} = f\left(y, u^{П}\right) - f\left(y^{П}, u^{П}\right) = \\ &= f\left(y - y^{П} + y^{П}, u^{П}\right) - f\left(y^{П}, u^{П}\right) = \tilde{f}(x, t), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\tilde{f}(0, t) \equiv 0$ для $\forall t \in [t_0, t_1)$ и $x(t_0) \neq 0$.

Для начала ограничимся исследованием частного, но важного для дальнейшего изложения случая – **стационарным программным движением** $y^{П}(t) = y^{C}(t)$ и $t_1 = \infty$.

Для этого уточним определения циклической координаты и стационарного движения [2] для управляемой системы (1.1).

<u>Определение</u>

Координата $y_i (i = 0, 1, \ldots, k; 0 \le k < n)$ называется **циклической**, если для нее справедливы равенства $\dfrac{\partial f(y,u)}{\partial y_i} = 0$ и $\dfrac{\partial f(y,u)}{\partial u} = 0.$

Определение

Движение $y(t)$ управляемой системы (1.1) называется **стационарным** $y^c(t)$, если $\dot{y}_1^C \equiv const, i=1,2,\ldots,k,(k \geq 0)$, $\dot{y}_j^C \equiv 0,\ j=k+1,\ldots,n,$ где $y_1,\ldots,y_k$ - циклические координаты.

Для осуществления стационарного движения в соответствии с (1.2) требуется, чтобы имели место *k* равенств

$$\dot{y}_i^C = f_i\left(y_{k+1}^C,\ldots,y_n^C\right), \qquad i=1,\ldots,k,$$

и $n-k$ уравнений

$$f_j\left(y_{k+1}^C,\ldots,y_n^C,u_1,\ldots,u_n\right)=0, \qquad j=k+1,\ldots,n \tag{1.9}$$

Предположим, что *n-k* уравнений (2.2) с *s* неизвестными $u_1,\ldots,u_n$ имеют хотя бы одно решение $u_1^C,\ldots,u_n^C$.

Определение

Стационарным управляемым процессом $\{y^C(t),u^C,[t_0,\infty)\}$ называется тройка $\{y^\Pi(t),u^\Pi(t),t\in[t_0,t_1)\}$, где $y^\Pi(t)=y^C(t)$, $u^\Pi(t)=u^C$ - решение уравнений (1.9).

Заметим, что в случае управляемого стационарного процесса правая часть уравнений (1.8) не зависит явным образом от *t*

$$\dot{x} = \tilde{f}(x), \tag{1.10}$$

где $\tilde{f}(0)\equiv 0$ и $x(t_0)\neq 0$.

Таким образом, необходимо исследовать тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.8) (или соответственно (1.10)), соответствующее программному движению $y^\Pi(t)$ управляемого объекта. Теоретической основой анализа текущих отклонений, то есть нетривиальных решений системы (1.8), является теория устойчивости, разработанная А.М. Ляпуновым сто лет назад [4]. Приведем еще два определения устойчивости, необходимые для постановки основных задач синтеза управления.

Определение

Тривиальное решение называется устойчивым с оценкой $\nu(t)$, если существуют положительная конечная кусочно-непрерывная функция $\nu(t)$ ($\sup\limits_{t_0\leq t<t_1}\nu(\mathrm{t})<\infty$) такая, что выполняется неравенство

$$|x(t)|\leq \nu(t)|x(t_0)| \tag{1.11}$$

для $\forall x(t_0)\in X_0$ и $\forall t\in[t_0,t_1)$, причем $\lim\limits_{t\to\infty}\nu(t)=0$, а при $t_1<\infty$- $\nu(t_1)<1$.

Определение

Тривиальное решение называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные числа α и β такие, что выполняется неравенство

$$|x(t)|\leq \beta|x(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{1.12}$$

для $\forall x(t_0)\in X_0,\ \forall t\in[t_0,\infty)$.

Если окрестность X_0 совпадает со всем пространством состояний R^n, то говорят об **экспоненциальной (асимптотической) устойчивости**

тривиального решения в целом. Очевидно, что из экспоненциальной устойчивости следует асимптотическая устойчивость.

При $t_1 = \infty$ и $y^П(t) = y^C(t), u^П(t) \equiv u^C$ в случае выполнения условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и условия принадлежности функции $\tilde{f}(x)$ классу дважды непрерывно дифференцируемых функций можно показать, что тривиальное решение является и экспоненциально устойчивым [4].

Перейдем к математической постановке задач линейного синтеза позиционного управления [2]. Ограничимся при этом следующим описанием функционального множества W - это множество кусочно-заданных функций, в каждый момент времени принадлежащих замкнутому множеству Ω пространства управлений R^s:

$$W = \{u(.) \in KC \mid u(t) \in \Omega \subset R^s,\ t \in [t_0, t_1)\}.$$

Предположим, что $u^П(t) \in \operatorname{int}\Omega$ при $\forall t \in [t_0, t_1)$. Физический смысл этого предположения заключается в том, что исполнительный механизм обладает еще некоторыми дополнительными ресурсами для уменьшения возможных текущих отклонений. Выберем линейную стратегию управления

$$u = u^П(t) + \tilde{u}(z,t), \tag{1.13}$$

где $\tilde{u}$ - дополнительное (позиционное) управление.

Напишем **линейное уравнение в отклонениях**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\tilde{u}, \tag{1.14}$$

где $A(t) = \dfrac{\partial f\left(y^П(t), u^П(t)\right)}{\partial y}, B(t) = \dfrac{\partial f\left(y^П(t), u^П(t)\right)}{\partial u}$

и **линейную модель измерений**

$$\tilde{z} = H(t)x + \gamma(t), \tag{1.15}$$

где $H(t) = \dfrac{\partial \varphi\left(y^П(t)\right)}{\partial y}, \quad \tilde{z} = z - \varphi\left(y^П(t)\right).$

z – первичная информация, определяемая согласно (1.7).

Требуется найти управление $\tilde{u} = \tilde{u}[\tilde{z}(t)]$ такое, чтобы текущие отклонения удовлетворяли неравенству (1.12). Задачу (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) будем называть **задачей стабилизации программного движения**. Это одна из основных задач линейного синтеза позиционного управления. Действительно, при $t_1 = \infty$ будем иметь асимптотическое уменьшение начальных отклонений. При $t_1 < \infty$ (стабилизация на конечном интервале) необходимо потребовать выполнение неравенства

$$\nu(t_1) < 1$$

Если рассматривается задача стабилизации стационарного движения $y^C(t), t \in [t_0, t_1)$, и функция $\varphi(y)$ является линейной по циклическим координатам, то матрицы *A, B, H* являются постоянными, что значительно облегчает решение задачи стабилизации.

Постановка задачи (1.13), (1.14), (1.15) линейного синтеза УДС не является единственно возможной. В качестве примера приведем постановку еще одной задачи линейного синтеза позиционного управления, получившей название **задачи слежения**.

Предположим, что имеется нестационарное желаемое движение $y^{П}(t), t \in [t_0, \infty)$. Соответствующее основное управляющее воздействие $u^{П}(t)$ не существует или не известно, но зато известно, что

$$y\ (t) = y^C(t) + \Delta y(t),$$

где $y^c(t)$ - реализуемое стационарное движение. То есть известен стационарный управляемый процесс $\{y^C(t), u^C, t \in [t_0, \infty)\}$. Тогда, воспользовавшись (1.13) и (1.14), где $x = y - y^C$, получим следующую задачу: требуется найти такое дополнительное управляющее воздействие $\tilde{u}(.)$, чтобы текущее отклонение отслеживало со временем разность $\Delta y(t)$:

$$\begin{gathered} x(t) \to \Delta y(t), \\ t \to \infty. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Задача линейного синтеза (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) называется **задачей слежения**, а УДС, реализующая решение этой задачи, получила название **следящей системы**.

Следует отметить, что данные постановки задачи синтеза УДС, являясь простейшими, в то же самое время позволяют наиболее быстро войти в круг проблем механики управляемых систем.

1.5 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе в основном будем рассматривать линейные стационарные управляемые системы, описывающие поведение отклонений от стационарного процесса при дополнительных управляющих воздействиях $\tilde{u}$. Для простоты записи оставим прежние обозначения принадлежности управления u функциональному множеству W

$$u(.) \in W = \{u(.) \in KC\ \ /\ \ u(t) \in \tilde{\Omega} \subset R^s\},$$

где KC – пространство векторных кусочно-непрерывных функций, $\tilde{\Omega}$ - замкнутое выпуклое множество возможных значений позиционных управлений, R^s - s-мерное пространство позиционных управлений.

Заметим, что так как $u^C \in \operatorname{int}\Omega$, то $0 \in \operatorname{int}\tilde{\Omega}$.

Рассмотрим линейную управляемую систему с функциональным включением

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{1.17}$$

$$u(.) \in W; \tag{1.18}$$

где A - матрица коэффициентов a_{ij}, $x(t)=y(t)-y^{П}(t)$ – n-мерный вектор-столбец отклонений, u – s-мерный вектор-столбец управляющих воздействий с матрицей B размера $n\times s$ произвольных коэффициентов b_{ij}.

Исследуем влияние управления u на состояние x линейной системы (1.17). Для этого введем следующее понятия.

Определение

Управление $u^{C}(t)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость тривиального решения $x(t)\equiv 0$ системы (1.17) (а тем самым и программного движения $y^{П}(t)$ исходной системы (1.1)), называется стабилизирующим управлением.

Определение

Линейная система (1.17) называется вполне (или полностью) управляемой, если с помощью управления можно за конечное время t перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)=\xi$ в заданное состояние $x(t)=\eta$.

Определение

Если в системе (1.17) матрица $B=0$, то линейная система называется неуправляемой.

Определение

Для линейных стационарных систем ($A=const, B=const$) блочная матрица $U=\left(B, AB,.., A^{n-1}B\right)$ называется матрицей управляемости.

Для линейных стационарных систем существует простой и удобный критерий управляемости, основанный на вычислении ранга матрицы U. Предположим, что в начальный момент $x(0)=0$, и определим множество D (область достижимости) в евклидовом пространстве отклонений $x\in R^n$ как множество, в каждую точку которого можно привести систему (1.17) с помощью управления $u(.)\in W$ за фиксированное время $t_1,\ 0<t_1<\infty$. Предположим теперь, что $\tilde{\Omega}=R^s$, то есть управления $u_1(t),...,u_s(t)$ могут принимать любые значения в пространстве управлений R^s. В этом случае можно дать еще два эквивалентных определения полной управляемости системы (1.17). В силу линейности системы (1.17) в качестве начальной (первой) точки можно взять начало координат. Тогда определение полной управляемости соответствует ситуации, когда область достижимости D совпадает со всем пространством отклонений R^n.

Определение

Если областью достижимости системы (1.17) является все пространство отклонений, то система (1.17) называется полностью управляемой.

Если же начало координат взять в качестве конечной (второй) точки, то тогда естественно сначала ввести понятие области управляемости как множества $\tilde{D}\subset R^n$, из каждой точки которого можно привести систему (1.17) в начало координат за конечное время. Если $\tilde{D}=R^n$, то говорят, что система (1.1) полностью управляема.

Определение

Если область управляемости системы (1.17) совпадает со всем пространством отклонений, то система (1.17) называется полностью управляемой.

Теорема (критерий полной управляемости линейной стационарной системы):

Для полной управляемости системы (1.17) необходимо и достаточно, чтобы $rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right) = n$.

Следствие

При $s = 1$ критерий полной управляемости принимает более простой вид

$$\det\left(b,\ Ab, ..., A^{n-1}b\ \right) \neq 0\ . \tag{1.19}$$

Следствие

Если в системе (1.17) матрица $B \neq 0$ и имеет размерность $n \times n$, то соответствующим подбором ее элементов линейную систему всегда можно сделать полностью управляемой.

Одним из важнейших следствий критерия полной управляемости является достаточное условие стабилизируемости линейных стационарных систем.

Теорема

Если линейная стационарная система вполне управляема, то она стабилизируема.

Эта теорема дает возможность стабилизировать программные движения и нелинейных систем.

Пусть для управляемой стационарной механической системы, описываемой уравнениями (1.17), имеются идеальные измерительные устройства, причём по поступающей от них первичной информации можно узнать точные текущие значения отклонений. В этом случае можно строить управление линейное по отклонениям, то есть вида

$$Bu = Bx$$

и подобрать элементы матрицы B так, чтобы в рамках линейной постановки решить задачу стабилизации. Это всегда возможно сделать, так как уравнения движения (1.17) примут вид

$$\dot{x} = Ax + Bx\,, \tag{1.20}$$

а значит, можно так подобрать коэффициенты b_{ij}, чтобы все корни характеристического уравнения для системы (1.20) имели отрицательные действительные части. Поэтому согласно теореме об устойчивости систем по линейному приближению, будем иметь асимптотическую устойчивость тривиального решения $x \equiv 0$ нелинеаризованной системы возмущенного движения, и тем самым, асимптотическую устойчивость программного движения $y^{\Pi}(t)$ исходной управляемой системы (1.1).

При подборе значений элементов матрицы B удобно пользоваться следующими соображениями. Во-первых, желая построить по возможности простое управление, ищут его в скалярном виде, то есть два из трех столбцов матрицы B можно положить нулевыми. Во-вторых, подбор коэффициентов b_{ij}, обеспечивающих необходимые значения корней характеристического уравнения, можно провести методом неопределенных коэффициентов. Для этого заранее задаются нужные значения λ_i (i=1,2,3), по ним строится характеристическое уравнение (например, характеристическое уравнение $(\lambda+1)^3=0$ имеет три отрицательных корня $\lambda_i=-1$) и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях λ к соответствующим коэффициентам характеристического уравнения системы (1.20). Решая полученные уравнения, определяем значения b_{ij}.

Построив стабилизирующее управление, можно проверить критерий управляемости и стабилизируемости, посчитав ранг матрицы управляемости U для найденных значений коэффициентов b_{ij}.

В завершение приведем без доказательства критерий полной управляемости нестационарных линейных систем вида (1.14). т.е. систем, у которых хотя бы одна из матриц A или B не является постоянной. В связи с этим расширим понятие управляемости.

Определение

Система (1.14) называется вполне управляемой с момента t_0, если существует момент t и конечное управление $u(\tau) \quad (t_0 \le \tau \le t)$, переводящее систему из произвольного начального состояния $x(t_0)=\zeta$ в заданное состояние $x(t)=\eta$.

Сформулируем критерий полной управляемости. Образуем симметричную матрицу $W(t,t_0)$, называемую грамианом управляемости

$$W(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau \quad . \tag{1.21}$$

Здесь $\Phi(t,t_0)$ - переходная матрица системы (1.1), удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению

$$\Phi(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0),\quad \Phi(t,t_0)=E$$

С помощью переходной матрицы удобно записать решение системы (1.14)

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad .$$

Очевидно, $W(t,t_0)\ge 0$.

Теорема

Для того, чтобы нестационарная система (1.14) была вполне управляема с момента t_0, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой момент t, для которого $\det W(t,t_0)\ne 0$, то есть $W(t,t_0)>0$.

Эквивалентная формулировка теоремы об управляемости.

Теорема

Для полной управляемости системы (1.14) с момента t_0 необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\zeta^T \Phi(t,\tau) B(\tau) = 0, \text{ где } t_0 \le \tau \le t, \tag{1.22}$$

имело единственное тривиальное решение $\zeta \equiv 0$ для всех τ.

Замечание Поскольку полная управляемость определяется видом матриц A и B, принято говорить об управляемости или неуправляемости пары (A,B).

Замечание Грамиан управляемости служит мерой управляемости, поскольку позволяет судить не только о принципиальной возможности управлять системой, но и, до некоторой степени, о качестве управления.

Итак, для анализа устойчивости реализованных программных движений и для их стабилизации необходимо:

1. Составить и линеаризовать уравнения возмущенного движения управляемой системы в окрестности заданного программного движения.
2. На основе теорем об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению исследовать устойчивость программного движения.
3. Проиллюстрировать поведение отклонений программного движения с помощью графиков численных решений системы возмущенного движения.
4. Построить стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения управляемой системы.
5. Построить графики отклонений, иллюстрирующие асимптотическую устойчивость программного движения управляемой механической системы.

Рассмотрим пример стабилизации программных управляемых движений маятника.

1.6. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА

Для анализа устойчивости по Ляпунову заданного движения управляемой системы выпишем для уравнений (1.6) соответствующие уравнения возмущенного движения. Для этого опять введем отклонения x_i (i=1,2,3) для переменных y_i (i=1,2,3) согласно равенствам:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + k_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + k_2 \end{cases}$$

Перейдём от системы (1.6) к уравнениям в отклонениях и получим уравнения возмущённого движения в нормальном виде.

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = \dfrac{A-C+mh^2}{2(A+mh^2)}((k_2+x_3)^2 \sin 2(k_1+x_1) - k_2^2 \sin 2k_1) - \dfrac{mgh}{A+mh^2}(\sin(k_1+x_1) - \sin k_1) \\
\dot{x}_3 = -2\dfrac{A-C+mh^2}{(A+mh^2)\sin^2(k_1+x_1) + C\cos^2(k_1+x_1)} x_2(x_3+k_2)\cos(x_1+k_1)\sin(x_1+k_1)
\end{cases} \tag{1.23}
$$

Линеаризуем полученную систему. Для этого разложим правые части уравнений (1.23) в ряд по степеням отклонений и оставим члены только первого порядка малости.

При этом учтем соотношения

$$
\begin{aligned}
&\sin(x_1+k_1)\cos(x_1+k_1) = (\sin x_1 \cos k_1 + \cos x_1 \sin k_1)(\cos x_1 \cos k_1 - \sin x_1 \sin k_1) = \\
&= (\sin k_1 + x_1 \cos k_1)(\cos k_1 - x_1 \sin k_1) = x_1 \cos 2k_1 + \sin k_1 \cos k_1
\end{aligned}
$$

и для бесконечно малых величин считаем, что $\dfrac{1}{x+\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. Получим линейную систему дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{12}x_2 \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{23}x_3 \\
\dot{x}_3 = a_{32}x_2
\end{cases} \tag{1.24}
$$

которую можно записать в матричном виде (1.17), где соответствующие элементы a_{ij} матрицы A определяются равенствами:

$$
\begin{gathered}
a_{12} = 1 \\
a_{21} = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} k_2^2 \cos 2k_1 - \frac{mgh}{A+mh^2}\cos k_1 \\
a_{23} = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} k_2 \sin 2k_1 \\
a_{32} = -2\frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 k_1 + C\cos^2 k_1} k_2 \sin 2k_1
\end{gathered}
$$

Составив и решив характеристическое уравнение для этой системы

$$
\begin{vmatrix}
-\lambda & a_{12} & 0 \\
a_{21} & -\lambda & a_{23} \\
0 & a_{32} & -\lambda
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
\lambda(a_{21} + a_{32}a_{23} - \lambda^2) = 0,
$$

имеем один нулевой корень и соответственно два ненулевых:

$$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{a_{21} + a_{32}a_{23}}\,.$$

При выполнении неравенства

$$a_{21} + a_{32}a_{23} > 0\,, \tag{1.25}$$

или в явном виде при

$$\frac{A - C + mh^2}{A + mh^2}k_2^2 \cos 2k_1 - \frac{mgh}{A + mh^2}\cos k_1 - 2\frac{(A - C + mh^2)^2}{(A + mh^2)\left[(A + mh^2)\sin^2 k_1 + C\cos^2 k1\right]}k_2^2 \sin^2 2k_1 > 0$$

один из корней $\lambda_{2,3}$ имеет положительную вещественную часть. Поэтому по теореме о неустойчивости системы уравнений по ее линейному приближению [4] имеем неустойчивость заданных программных движений.

Анализ и получение аналитического решения последнего неравенства представляется сложной задачей. Но проверить его выполнение для заданных программных движений при соответствующих значениях k_1 и k_2 несложно.

Пусть необходимо реализовать программные движения маятника для значений $k_1 = \frac{2\pi}{3}\,рад$ и $k_2 = 0{,}5\,рад/с$. Легко видеть, что при этих значениях неравенство (1.25) выполнено, тем самым соответствующее программное движение является неустойчивым, то есть фактически не может быть реализовано одним лишь программным управлением.

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений программного движения управляемой системы для указанных значений $k_1 = \frac{2\pi}{3}\,рад$ и $k_2 = 0{,}5\,рад/с$. Неограниченный рост отклонений x_i (i=1,2,3), изображенных на рисунках 3-5, подтверждает неустойчивость программного движения, реализованного полученным программным управлением.

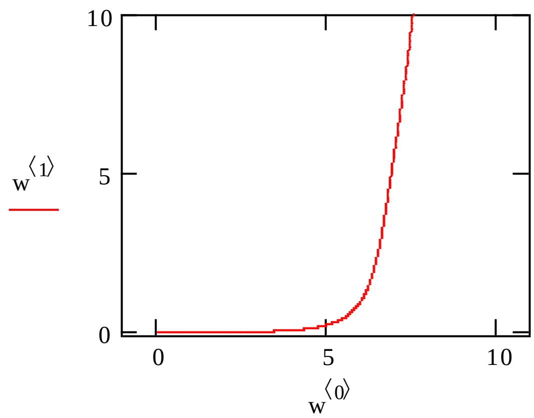


Рис. 3. График отклонения $x_1(t)$

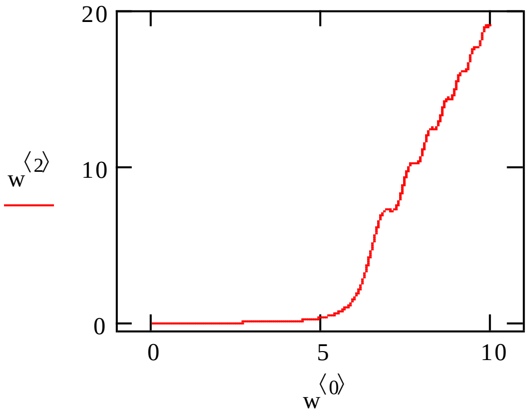


Рис. 4. График отклонения $x_2(t)$

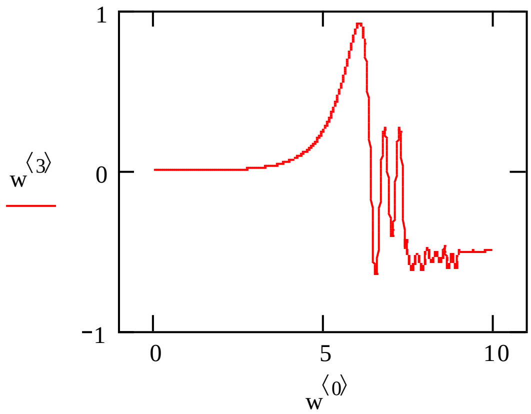


Рис. 5. График отклонения $x_3(t)$

Неравенство (1.25) не выполняется для значений $k_1 = \frac{\pi}{3} рад$ и $k_2 = 5 рад/с$. В этом случае все три корня характеристического уравнения имеют нулевую действительную часть, тем самым на основе анализа уравнений линейного приближения вывода об устойчивости или неустойчивости решений исходной нелинейной системы сделать нельзя. Построим графики отклонений для этого случая (см. рис. 6-8).

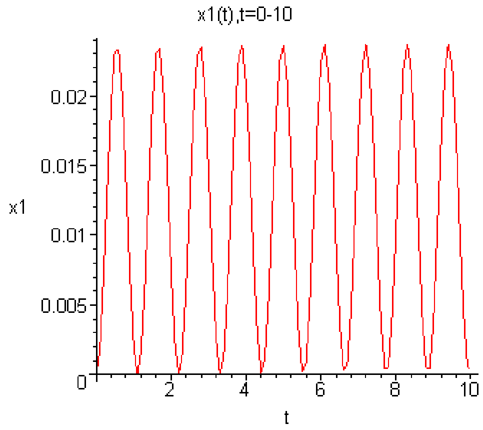


Рис. 6. График отклонения $x_1(t)$

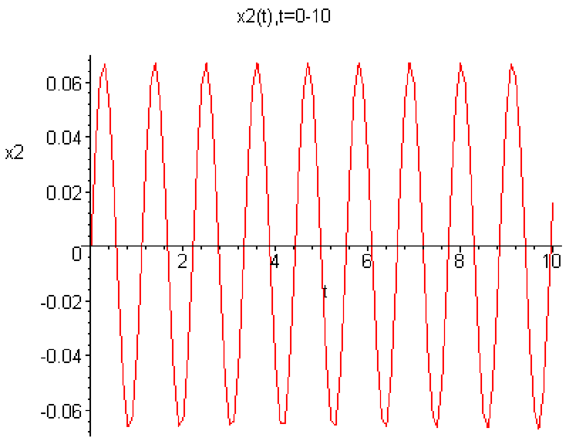


Рис. 7. График отклонения $x_2(t)$

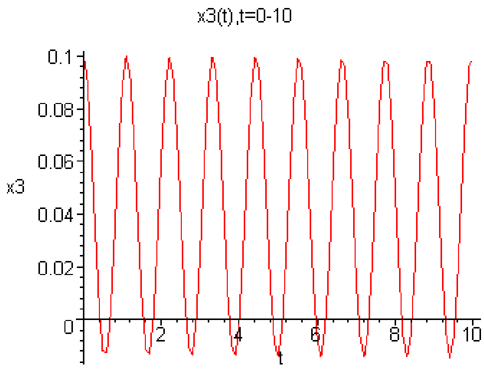


Рис. 8. График отклонения $x_3(t)$

Добавим к системе уравнений первого приближения (1.24) стабилизирующее управление, чтобы сделать её тривиальное решение асимптотически устойчивым при любых значениях параметров k_1 и k_2.

Выберем управление следующим образом:

$$u = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.26)$$

и составим систему (1.17), которая с управлением (1.26) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = (a_{21} + b_{21})x_1 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = b_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases} \qquad (1.27)$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} + b_{21} & -\lambda & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

После раскрытия определителя получим уравнение третьей степени относительно λ:

$$\lambda^3 - b_{11}\lambda^2 - \lambda(a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} + a_{12}b_{21}) + a_{23}(a_{32}b_{11} - b_{31}) = 0 \qquad (1.28)$$

Для того, чтобы тривиальное решение системы (1.27) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.28) имели отрицательные вещественные части. Подберем элементы b_{ij} таким образом, чтобы уравнение (1.28) совпало с уравнением $(\lambda + 1)^3 = 0$, все решения которого равны -1 и являются тем самым отрицательными вещественными числами. Согласно методу неопределенных коэффициентов, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ уравнений (1.28) и

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} -b_{11} = 3 \\ -(a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} + a_{12}b_{21}) = 3 \\ a_{23}(a_{32}b_{11} - b_{31}) = 1 \end{cases},$$

из которой определим значения элементов b_{ij}:

$$
\begin{cases}
b_{11} = -3 \\
b_{21} = -(3 + a_{23}a_{32} + a_{21}) \\
b_{31} = -\dfrac{3a_{23}a_{32} + 1}{a_{23}}
\end{cases}
\tag{1.29}
$$

(при вычислении коэффициента b_{21} учтено, что $a_{12} = 1$).

Согласно критерию управляемости автономных систем, чтобы полученная линейная система была управляема, необходимо и достаточно, чтобы ранг соответствующей матрицы управляемости равнялся размерности пространства, то есть трем. Легко убедиться, что при выборе управления (1.26) с элементами матрицы B, вычисленными по формулам (1.29), этот критерий выполнен. Тем самым получили еще одно подтверждение того, что с помощью выбранного управления система (1.27) полностью управляема и тем самым стабилизируема.

Добавив полученное управление в нелинейную систему возмущенного движения (1.23), получим систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 + b_{11}x_1 \\
\dot{x}_2 = \dfrac{A - C + mh^2}{2(A + mh^2)}((k_2 + x_3)^2 \sin 2(k_1 + x_1) - k_2^2 \sin 2k_1) - \dfrac{mgh}{A + mh^2}(\sin(k_1 + x_1) - \sin k_1) + b_{21}x_1 \\
\dot{x}_3 = -2\dfrac{A - C + mh^2}{(A + mh^2)\sin^2(k_1 + x_1) + C\cos^2(k_1 + x_1)} x_2(x_3 + k_2)\cos(x_1 + k_1)\sin(x_1 + k_1) + b_{31}x_1
\end{cases}
\tag{1.30}
$$

Во-первых, система (1.30) имеет тривиальное решение $x = 0$, соответствующее программному движению $y^{П}(t)$ исходной управляемой системы (1.6). Во-вторых, при выборе управления вида (1.26) с коэффициентами (1.29) система (1.27), являясь ее линейным приближением, имеет все три отрицательных корня характеристического уравнения. Поэтому по теореме об устойчивости по линейному приближению заключаем, что управление (1.26), с (1.29) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения $x = 0$ системы возмущенного движения (1.30) и, тем самым, асимптотическую устойчивость программного движения $y^{П}(t)$ исходной управляемой системы (1.6).

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений численного решения системы (1.30) с коэффициентами (1.29) для значений $k_1 = \dfrac{2\pi}{3} рад$, $k_2 = 0{,}5 рад/с$ (ранее эти управляемые движения были неустойчивы):

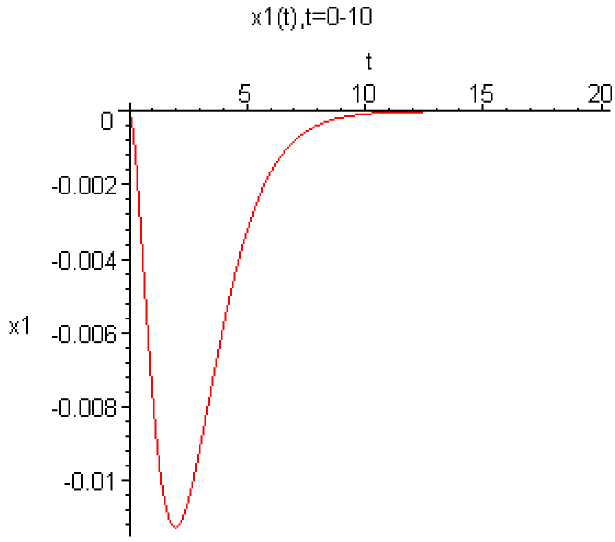


Рис. 9. График зависимости отклонения $x_1(t)$

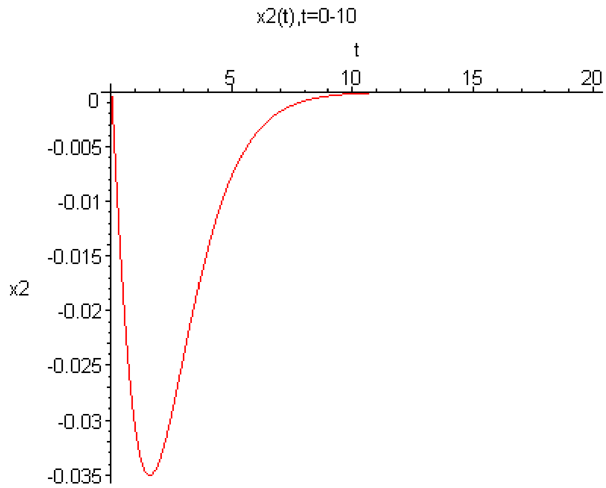


Рис. 10. График зависимости отклонения $x_2(t)$

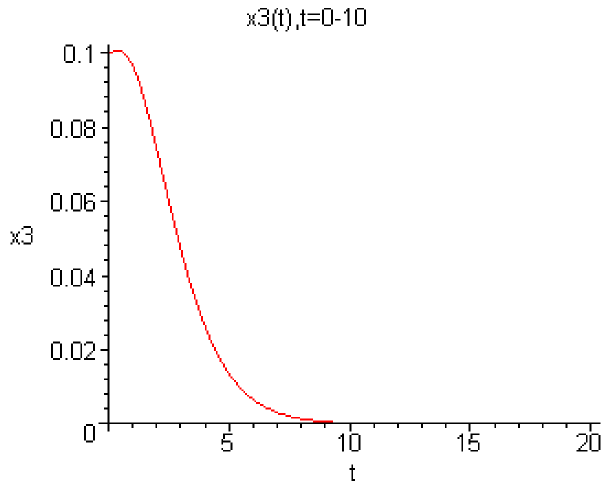


Рис. 11. График зависимости отклонения $x_3(t)$

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

С помощью способа построения стабилизирующего позиционного управления, описанного в первой части работы, можно синтезировать управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость неустойчивых стационарных движений неуправляемой системы, исследованных на примере маятника в работе [6].

На этом этапе курсовой работы для стабилизации неустойчивых стационарных движений механической системы необходимо:

1. Составить и линеаризовать уравнения возмущенного движения в окрестности неустойчивого стационарного движения механической системы (можно воспользоваться полученными ранее уравнениями).
2. Построить стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость выбранного неустойчивого движения системы.
3. Построить графики отклонений, иллюстрирующие асимптотическую устойчивость программного движения управляемой механической системы.

Рассмотрим пример стабилизации неустойчивых стационарных движений маятника.

2.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА.

В работе [6] при исследовании методом Рауса устойчивости стационарных движений маятника было установлено (см. [6], таблицу 3 на стр. 41), что относительное положение равновесия маятника $\theta = \pi$, $\omega = 5$ неустойчивое, а положение $\theta = 1{,}36$, $\omega = 5$ — устойчивое (но не асимптотически).

Поставим и решим задачу о стабилизации этих стационарных движений, то есть определим и добавим в систему управления, делающие оба этих относительных равновесия маятника асимптотически устойчивыми.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения в окрестности относительного равновесия $\theta = \pi$, $\omega = 5$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(\dfrac{A - C + mh^2}{A + mh^2}\omega^2 + \dfrac{mgh}{A + mh^2}\right)x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\dot{x} = Ax,$$

где матрица A имеет два ненулевых элемента

$$a_{12}=1$$
$$a_{21}=\frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}\omega^2+\frac{mgh}{A+mh^2}$$

и семь нулевых.

Выберем управление следующим образом:

$$u=Bx, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

и составим линеаризованную управляемую систему вида (1.17), которая с управлением (2.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + b_{33}x_3 \end{cases} \tag{2.2}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = (\frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}\omega^2+\frac{mgh}{A+mh^2})x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + b_{33}x_3 \end{cases}$$

Запишем для такой системы характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & -\lambda & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - b_{33}\lambda^2 - \lambda(b_{23}+a_{12}a_{21}) + (a_{12}a_{21}b_{33} - b_{13}a_{21}) = 0\,. \tag{2.3}$$

Для того, чтобы тривиальное решение системы (2.2) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы все корни его характеристического уравнения (2.3) имели отрицательные вещественные части. Подберем элементы b_{ij} таким образом, чтобы уравнение совпало с уравнением $(\lambda+1)^3=0$, все решения которого равны -1. Согласно методу неопределенных коэффициентов, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ уравнений (2.3) и

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0,$$

получим численные значения коэффициентов из равенств

$$\begin{cases} b_{13}=-\dfrac{3a_{21}+1}{a_{21}} \\ b_{23}=-3-a_{12}a_{21} \\ b_{33}=-3 \end{cases}$$

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений численного решения системы возмущенного движения в окрестности положения относительного равновесия $\theta=\pi$, $\omega=5$ с добавленным управлением (2.1) (ранее это стационарное движение было неустойчиво):

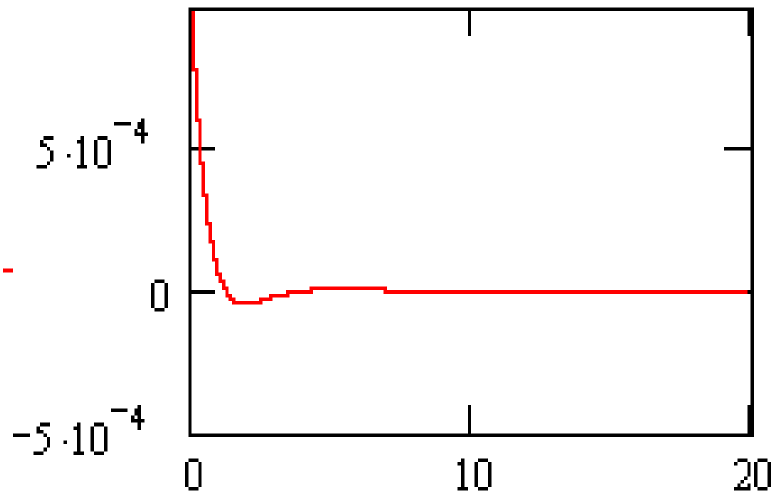


Рис.12. График зависимости отклонения $x_1(t)$

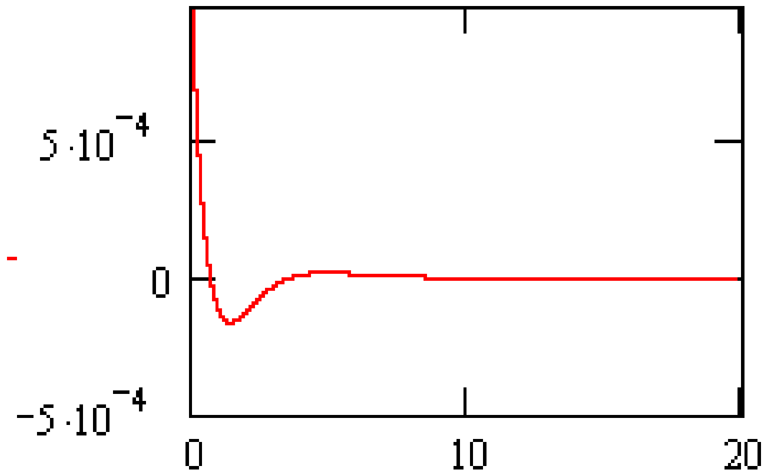


Рис.13. График зависимости отклонения $x_2(t)$

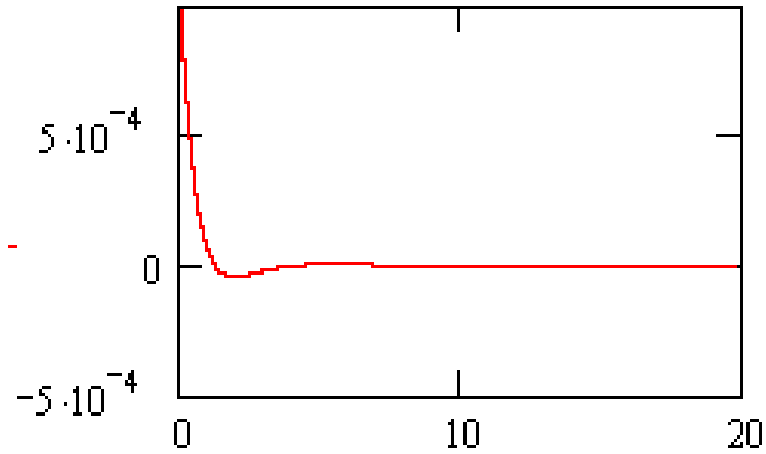


Рис.14. График зависимости отклонения $x_3(t)$

Аналогично проведем стабилизацию стационарного движения маятника $\theta = 1.36$, $\omega = 5$ (получим из устойчивых движений асимптотически устойчивые).

Линейное приближение уравнений возмущенного движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{A - C + mh^2}{A + mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta)x_1 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{C - A - mh^2}{(A + mh^2)\sin^2 \theta + C\cos^2 \theta} x_2 \omega \sin 2\theta \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\dot{x} = Ax,$$

где матрица A имеет три ненулевых элемента

$$a_{12} = 1$$

$$a_{21} = \frac{A - C + mh^2}{A + mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta)$$

$$a_{32} = \frac{C - A - mh^2}{(A + mh^2)\sin^2 \theta + C\cos^2 \theta}\omega \sin 2\theta$$

Добавив управление вида:

$$u = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{A - C + mh^2}{A + mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta)x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{C - A - mh^2}{(A + mh^2)\sin^2 \theta + C\cos^2 \theta}x_2 \omega \sin 2\theta + b_{33}x_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{cases}$$

с характеристическим уравнением.

$$\lambda^3 - b_{33}\lambda^2 - \lambda(b_{23}a_{32} + a_{21}) + (a_{21}b_{33} - b_{13}a_{32}a_{21}) = 0 \tag{2.5}$$

Подберем элементы b_{ij} таким образом, чтобы уравнение (2.5) совпало с уравнением $(\lambda + 1)^3 = 0$, все решения которого равны -1 . Применив метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} b_{13} = -\dfrac{3a_{21} + 1}{a_{32}a_{21}} \\ b_{23} = -\dfrac{3 + a_{21}}{a_{32}} \\ b_{33} = -3 \end{cases}$$

Поэтому по теореме об устойчивости по линейному приближению заключаем, что управление (2.4) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения $x = 0$ системы возмущенного движения и, тем самым, асимптотическую устойчивость относительного положения равновесия $\theta = 1.36$, $\omega = 5$ маятника .

Для иллюстрации полученного результата проинтегрируем численно и построим графики отклонений системы возмущенного движения в окрестности положения относительного равновесия $\theta = 1.36$, $\omega = 5$ с добавленным управлением (2.4) (ранее это стационарное движение было просто устойчиво, но не асимптотически):

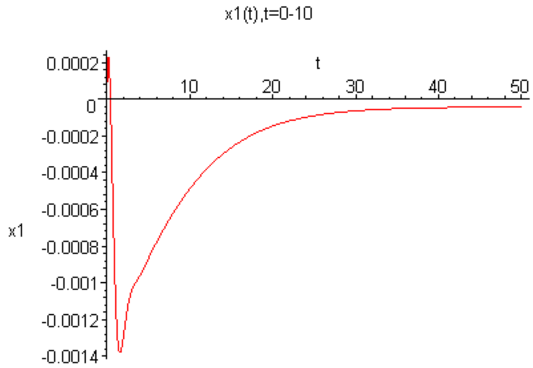


Рис.15. График зависимости отклонения $x_1(t)$

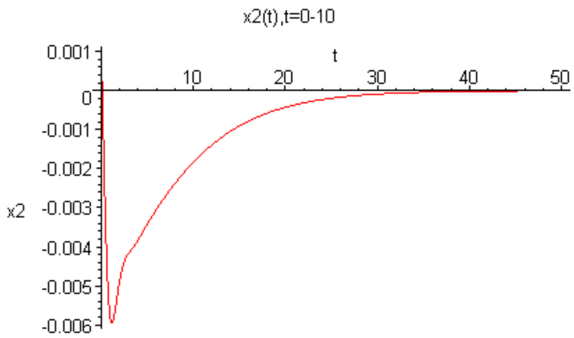


Рис.16. График зависимости отклонения $x_2(t)$

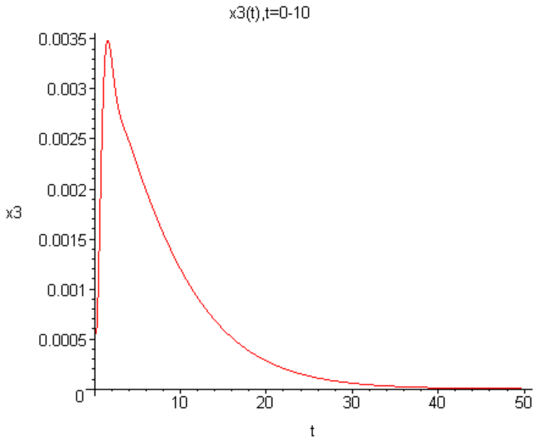


Рис.17. График зависимости отклонения $x_3(t)$

Асимптотическая сходимость графиков к нулю демонстрирует асимптотическую устойчивость исследуемого стационарного движения $\theta = 1.36$, $\omega = 5$, реализуемую стабилизирующим управлением (2.4).

3. СИНТЕЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ

Эта часть посвящена одной из вышеперечисленных проблем теории управления, а именно - построению и стабилизации программного движения неавтономной лагранжевой системы. Основной интерес изложенных в этой главе результатов состоит в том, что исследованное программное движение в общем случае произвольно и может не являться собственным движением системы, а управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость этого программного движения, найдено аналитически в общем виде.

Рассматривается неавтономная управляемая механическая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода. Для нее исследуются задача о синтезе и стабилизации управляющих воздействий, реализующих заданное нестационарное программное движение системы, не являющееся его собственным движением в том смысле, что функции, описывающие поведение системы, не обязаны быть решением соответствующей исходной системы. Стабилизация этого движения подразумевает построение управляющих воздействий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость этого движения. Исследование проводится на основе прямого метода Ляпунова с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными с применением метода предельных уравнений и предельных систем [10]. В качестве примера рассматривается задача о синтезе и стабилизации нестационарных программных движений дискообразного маятника с двумя степенями свободы. Представлены графики численного интегрирования уравнений с полученными управлениями, наглядно иллюстрирующие асимптотическое поведение рассматриваемых систем в окрестности исследуемых движений.

3.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая механическая система, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=Q \qquad (3.1)$$

где $q \in R^n, \dot{q} \in R^n$ — обобщённые координаты и скорости (вектор - столбцы). Кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0 ,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(t,\dot{q})\dot{q}$$

— квадратичная форма скоростей $\dot{q}$, а матрица A размерности $n\times n$, симметрична и такова, что для нее справедливы равенства

$\alpha_0 E \le A(t,q) \le \alpha_1 E \qquad (0<\alpha_0<\alpha_1 - const)$

$$T_1 = B^T(t,q)\dot{q}$$

— линейная форма скоростей $\dot{q}$, а $B(t,q)-$ n- вектор-столбец.

$$T_0 = T_0(t,q)$$

— скалярная функция.

Величина Q в правой части уравнений (3.1) представляет собой сумму внешних обобщенных сил, действующих на механическую систему и управляющий воздействий, определяемых в дальнейшем. В общем случае будем считать, что действующие на систему внешние силы не равны нулю, т.е. $Q_{вн}\neq 0$.

Движение системы рассматривается на множестве $G = R^+\times Г,\ Г=\{\|q\|\le H, \|\dot{q}\|\le H,\ H>0-const\}$. Предполагается, что уравнения (3.1) удовлетворяют условиям существования и единственности решений в области G.

Уравнения управляемого движения системы имеют вид:

$$A\ddot{q} + M + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{q} + [\frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q}]\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} = Q_{вн} + Q_u, \qquad (3.2)$$

где

$$M_i = \dot{q}^T\frac{\partial A_i}{\partial q}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}\ ,\ (i=\overline{1,n}) \qquad (3.3)$$

– i-ая компонента вектор–столбца, вычисляемая по формуле :

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j\ ,\ (i=\overline{1,n})$$

<u>Определение</u>

Программным (желаемым) движением системы назовем пару ($r(t)$, $\dot{r}(t)$), где $r(t)$-ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая n-мерная вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

В общем случае функция *r(t),* может не являться решением системы (1.1). Поэтому для реализации программных движений будем рассматривать задачу о двухуровневом управлении.

Добавим к правой части системы (1.1) управляющие силы вида:

$$Q_u = Q_{np} + Q_{cm}$$

где Q_{np}–силы, реализующие программное движение *r(t),* Q_{cm}–стабилизирующие его.

Тем самым имеем две взаимосвязанные задачи:

1) О реализации программных движений *r(t)*: определить вид сил Q_{np}, при которых функция *r(t)* является решением системы (3.1) при взаимодействии сил Q_{np}.

2) О стабилизации программного движения: указать управление Q_{cm} и условия на силы $Q_{вн}$ (исходя из их вида), при которых программное движение (*r(t)*, $\dot r(t)$) системы (3.1) будет асимптотически устойчиво.

Управление Q_{np}, будем называть программным, а Q_{cm} будем называть стабилизирующим.

Тогда уравнения управляемого движения примут вид:

$$A\ddot{q} + M + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{q} + [\frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q}]\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} = Q_{вн} + Q_{np} + Q_{cm} \tag{3.4}$$

Для нахождения Q_{np} подставим в последние уравнение функцию *r=r(t)*, получим:

$$Q_{np} = A\ddot{r} + M + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + [\frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q}]\dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} - Q_{вн}(t, r(t), \dot{r}(t)) \tag{3.5}$$

где

$$M_i = \dot{r}^T \frac{\partial A_i}{\partial r}\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial r_i}\dot{r} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$A = A(t, r(t)),\ B = B(t, r(t)),\ T_0 = T_0(t, r(t))$$

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [7,9].

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений (3.2) или (3.4) при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид:

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(t, q)\dot{q} + B^T(t, q)\dot{q} + T_0(t, q) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^T \overline{A}(t, x)\dot{x} + \overline{B}^T(t, x)\dot{x} + \overline{T}_0(t, x) = \overline{T}(t, x, \dot{x}),$$

где

$$\overline{A}(t, x) = A(t, x + r(t))$$

$$\overline{B}^T(t, x) = \dot{r}^T(t)A(t, x + r(t)) + B^T(t, x + r(t)) \tag{3.6}$$

$$\overline{T}_0(t, x) = \frac{1}{2}\dot{r}(t)^T A(t, x + r(t))\dot{r}(t) + B^T(t, x + r(t))\dot{r}(t) + T_0(t, x + r(t)).$$

В результате указанной замены получим выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^T A(t, x + r(t))\dot{x} + (\dot{r}^T(t)A(t, x + r(t)) +$$
$$+ B^T(t, x + r(t)))\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}(t)^T A(t, x + r(t))\dot{r}(t) +$$
$$+ B^T(t, x + r(t))\dot{r}(t) + T_0(t, x + r(t))$$

Выпишем уравнения движения механической системы в отклонениях в виде уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T(t, x, \dot{x})}{\partial x} = Q_{вн}(t, x, \dot{x}) + Q_u(t, x, \dot{x}) \qquad (3.7)$$

Во избежание громоздкости в дальнейшем будем опускать аргументы, то есть $r(t) = r$, $A(t, x + r(t)) = A$, $B(t, x + r(t)) = B$, $T_0(t, x + r(t)) = T_0$.

Вычислим необходимые производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A\dot{x} + A\dot{r} + B$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x^T}\dot{x} + \frac{\partial B}{\partial x^T}\dot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \left(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r} + \frac{\partial B^T}{\partial x}\dot{r} + \frac{\partial T_0}{\partial x}$$

Подставляя полученные производные в (3.7), получим уравнение движения в отклонениях:

$$A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x^T}\dot{x} + \frac{\partial B}{\partial x^T}\dot{r} -$$
$$-\frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} - \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\dot{r} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = Q_{вн} + Q_u \qquad (3.8)$$

или

$$A\ddot{x} + M + M' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{x} + A\ddot{r} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} +$$
$$+\frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = Q_{вн} + Q_u \qquad (3.9)$$

где

$$M_i = \dot{x}^T\frac{\partial A_i}{\partial x}\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x_i}\dot{x} \qquad (i = \overline{1,n})$$

M – обозначает n-вектор-столбец, компоненты которого M_i, определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j;$$

$$M_i' = \dot{x}^T\frac{\partial A_i}{\partial x}\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x_i}\dot{r} + \dot{r}^T\frac{\partial A_i}{\partial x}\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x_i}\dot{x} \qquad (i = \overline{1,n})$$

M' обозначает n-вектор-столбец, компоненты которого M_i', определены равенствами

$$M_i' = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j ;$$

$$M_i'' = \dot{r}^T \frac{\partial A_i}{\partial x} \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{r} \qquad (i = \overline{1,n})$$

M'' обозначает n-вектор-столбец, компоненты которого M_i'', определены равенствами

$$M_i'' = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j .$$

Разрешим систему (3.9) относительно обобщенных скоростей. Это возможно, так как матрица A не вырожденная. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt} = A^{-1}\left(-M - M' - [\dfrac{\partial B}{\partial x^T} - \dfrac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} - M'' - [\dfrac{\partial B}{\partial x^T} - \dfrac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{r} - \dfrac{\partial A}{\partial t}\dot{x} - \dfrac{\partial A}{\partial t}\dot{r} - \dfrac{\partial B}{\partial t} + \dfrac{\partial T_0}{\partial x} + Q_{вн} + Q_{и} \right) - \ddot{r}; \end{cases} \tag{3.10}$$

где A^{-1}–матрица, обратная к матрице A.

Пусть C–диагональная матрица, удовлетворяющая условию:

$$c_0 E \le C = const \le c_1 E \qquad (0 < c_0 < c_1 - const); \tag{3.11}$$

$$0 \le D(t,q) \le d_1 E \qquad (0 < d_1 - const); \tag{3.12}$$

$$2D + \frac{\partial A}{\partial t} \ge \alpha_0 E \qquad (0 < \alpha_0 - const). \tag{3.13}$$

Рассмотрим положительно-определенную по отклонениям x и скоростям $\dot{x}$, допускающую бесконечно-малый высший предел функцию Ляпунова

$$V(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2} x^T C x + \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x}$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид:

$$\dot{V}(t,x,\dot{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)^T \ddot{x}$$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T C x + \dot{x}^T A \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T (\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x}) \dot{x}$$

и в силу системы (3.10) получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \dot{x}^T (\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r}) \dot{x} + \dot{x}^T C x + \frac{1}{2} \dot{x}^T (\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^T \dot{x}) \dot{x} + \dot{x}^T A A^{-1} \times$$

$$\times \left(-M - M' - [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} - M'' - [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{r} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + Q_{вн} + Q_{и} \right)$$

Учтем, что

$$AA^{-1} = E$$

– единичная матрица;

$$\dot{x}^T[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} = 0$$

в силу кососимметричности матрицы $[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]$;

обозначим: $-\dot{x}^T M + \frac{1}{2}\dot{x}^T(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^T N$,

– где символом N обозначен n-вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j \quad (i = \overline{1,n}).$$

Кроме того, справедливо равенство

$$M' = (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r} + (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r})\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} = (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{r} + (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r})\dot{x} - \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}$$

Тогда с учетом вышеизложенного производная по времени от функции Ляпунова имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T\{&Cx - M'' - [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{r} - \frac{1}{2}(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r})\dot{x} - (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{r} + \\ &+(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x})\dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + \frac{1}{2}N + Q_{вн} + Q_{и}\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ УПРАВЛЕНИИ

Запишем, некоторые дополнительные определения для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x).$$

Определение

Правая часть системы уравнений называется ограниченной, если существует константа *M*, такая что для любого *t* выполняется условие

$$\|X(t,x)\| \le M$$

Определение

Правая часть системы уравнений удовлетворяет условию Липшица равномерно по *x* относительно *t*, если существует константа *К,* такая что для любого *t* выполняется условие

$$\|X(t,x_2) - X(t,x_1)\| \le K\|x_2 - x_1\|$$

Предположим, что на систему (3.1) не действует никаких внешних сил, т.е. $Q_{вн} = 0$. Тогда поставленную задачу решает следующее утверждение.

Утверждение 1

Пусть для системы (1.1) справедливы следующие условия:

1) правые части системы (3.10) для любого $H < \infty$ ограничены и удовлетворяют в G условиям Липшица равномерно по $x, \dot{x}$, относительно t:

2) матрицы C и D удовлетворяют условиям (3.11), (3.12), (3.13).

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + A\ddot{r} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} - \left(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} \tag{3.15}$$

решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (3.10). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

При выполнении условия 1 теоремы уравневния системы (3.10) предкомпактны [10], то есть существует некоторая последовательность $t_k \to \infty$, при $k \to \infty$, для которой определены пределы:

$$A^{-1^*} = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t A^{-1}(t_k+\tau,x)$$

$$M^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t M(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial A}{\partial t}(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial A}{\partial x}(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial B}{\partial x^T}(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial B^T}{\partial x}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial B^T}{\partial x}(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial B}{\partial t}(t_k+\tau,x)$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t \frac{\partial T_0}{\partial x}(t_k+\tau,x)$$

$$(Q_{вн})^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t Q_{вн}(t_k+\tau,x)$$

$$(Q_{u})^* = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t Q_{u}(t_k+\tau,x)$$

Предельные к ним уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt} = A^{*-1}\Big(-(M)^* - (M')^* - [\left(\dfrac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* - \left(\dfrac{\partial B^T}{\partial x}\right)^*]\dot{x} - (M'')^* - [\left(\dfrac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* - \left(\dfrac{\partial B^T}{\partial x}\right)^*]\dot{r} - \\ -\left(\dfrac{\partial A}{\partial t}\right)^*\dot{x} - \left(\dfrac{\partial A}{\partial t}\right)^*\dot{r} - \left(\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)^* + \left(\dfrac{\partial T_0}{\partial x}\right)^* + (Q_{вн})^* + (Q_u)^*\Big) - \ddot{r}; \end{cases} \tag{3.16}$$

При указанном в теореме управлении из структуры уравнений (3.10) очевидно, что движение $x=\dot{x}=0$ является решением предельной системы к системе (3.16), причем множество $\{\dot{x}^2 = 0\}$ не содержит решений системы (3.16), кроме $x=\dot{x}=0$.

Подставляя выражение (3.15) в (3.9), получим:

$$A\ddot{x} + M + M' + [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} + A\ddot{r} + M'' + [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} +$$
$$+\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + A\ddot{r} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} - \left(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r}.$$

Упростив последнее выражение получим:

$$A\ddot{x} + M + [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} + Cx + D\dot{x} = 0$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}x^T Cx + \frac{1}{2}\dot{x}^T A\dot{x}$$

Вычислим значение производной от функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T \{Cx - M'' - [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{r} - \frac{1}{2}(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r})\dot{x} - (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{r} +$$
$$+(\dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x})\dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + \frac{1}{2}N + Q_{вн} + Q_{и}\}.$$

Подставляя значения $Q_{вн}$ и $Q_{и}$ и упростив, получим:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D \right) \dot{x} + \dot{x}^T \frac{1}{2} N \,,$$

где второе слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей $\dot{x}$.

Поэтому производная для выбранной функции Ляпунова в силу системы (3.10) при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D \right) \dot{x} \le -\frac{\alpha_0}{2}\|\dot{x}\|^2 \le 0,$$

то есть $\dot{V}$ определенно-отрицательная по скоростям.

На основе теоремы 3 об асимптотической устойчивости из [10] имеем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения, т.е. указанное управление решает задачу стабилизации программного решения исходной системы.

Теорема доказана.

Управление, выбранное в утверждении 1, можно существенно упростить, выбрав матрицу D в специальной форме. Пусть матрица D выбрана таким образом, что удовлетворяется условие:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \ge c_0 E \,,\ (c_0 > 0 - const) \qquad (3.17)$$

где L - матрица, задающая квадратичную форму $\dot{x}^T (\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x})\dot{r}$, то есть матрица $\{l_{ik}\}$ с элементами, вычисляемыми через элементы матрицы А по правилу:

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_j$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2

Пусть для системы (3.1) справедливы следующие условия:

1) правые части системы (3.10) для любого $H < \infty$ ограничены и удовлетворяют в G условиям Липшица равномерно по $x,\ \dot{x}$, относительно t:

2) матрица C удовлетворяет условиям (3.11) и матрица D

удовлетворяет условиям (3.12), (3.17).

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + A\ddot{r} \qquad (3.18)$$

решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (3.10). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство.

Как и в утверждении 1, при выполнении условия 1 теоремы уравнения системы (3.10) предкомпактны, предельные к ним уравнения имеют вид (3.16).

Подставляя выражение (3.18) в (3.9) получим:

$$A\ddot{x} + M + M' + [\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}]\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} + Cx + D\dot{x} = 0 \qquad (3.19)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^T Cx + \frac{1}{2}\dot{x}^T A\dot{x}$$

Вычислим значение производной от функции Ляпунова. В силу уравнений (3.19) она равна:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} - \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T N$$

где второе слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей $\dot{x}$.

Поэтому производная для выбранной функции Ляпунова в силу системы (3.10) при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{x}^T\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} - \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D\right)\dot{x} \le -c_0\left\|\dot{x}\right\|^2 \le 0$$

На основе теоремы 3 об асимптотической устойчивости из [10] имеем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Теорема доказана.

Управление, указанное в утверждении 2, имеет меньше слагаемых и тем самым является проще, чем управление из утверждения 1.

Пусть теперь на систему действуют некоторые обобщенные силы $Q_{вн} = Q_{вн}(t, x, \dot{x})$, характеризующие внешние воздействия на систему. В общем случае они являются функциями координат x, скоростей $\dot{x}$ и времени t.

В общем случае при воздействии на систему некоторых сил $Q_{вн}$ неизвестной структуры поставленные задачи решает следующее утверждение.

Утверждение 3

Пусть для системы (3.1) $Q_u = Q_{cm} + Q_{вн}$ и выполнены условия утверждения 1.

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + A\ddot{r} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} - \left(\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r} - Q_{np} \tag{3.20}$$

решает задачу о стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (3.10). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

Утверждение 4

Пусть для системы (3.1) $Q_u = Q_{cm} + Q_{вн}$ и выполнены условия утверждения 2.

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + A\ddot{r} - Q_{np} \tag{3.21}$$

решает задачу о стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (3.10). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

На этом этапе курсовой работы для стабилизации неустойчивых стационарных движений механической системы необходимо:

1. Составить уравнения Лагранжа для рассматриваемой механической системы (можно воспользоваться полученными ранее уравнениями).
2. Выбрать желаемое движение системы и определить программное управление (управляющие силы), его реализующее, аналогично пункту 1.2, записать уравнения движения управляемой системы.
3. Введя отклонения в окрестности программного движения, записать уравнения возмущенного движения в отклонениях.
4. Записать выражение для кинетической энергии системы в отклонениях и определить ее квадратичную, линейную и нулевую формы по скоростям $\dot{x}$.
5. Выписать стабилизирующие силы согласно основным утверждениям.
6. Построить графики отклонений, иллюстрирующие асимптотическую устойчивость программного движения управляемой механической системы.

3.3. СИНТЕЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА

Для примера рассмотрим задачу о стабилизации нестационарных программных движений маятника.

Тогда уравнения движения маятника в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\begin{cases} (A+mh^2)\ddot{\theta}-(A-C+mh^2)\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta=-mgh\sin\theta \\ \left[\left(A+mh^2\right)\sin^2\theta+C\cos^2\theta\right]\ddot{\varphi}+2(A-C+mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta=0 \end{cases}$$

Выберем программное движение : $\begin{matrix}\varphi(t)=\varphi_0(t)\\ \theta(t)=\theta_0(t)\end{matrix}$.

Определим силы, реализующие программное движение (программные силы). Для этого подставим в уравнения движения маятника выбранное нами программное движение, получим:

$$Q_{пр\ \varphi}=\left((A+mh^2)\sin^2(\theta_0)+C\cos^2(\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0+2\left(A-C+mh^2\right)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0\cos(\theta_0)\sin(\theta_0)$$
$$Q_{пр\ \theta}=\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}_0-\left(A-C+mh^2\right)\dot{\varphi}^2\cos(\theta_0)\sin(\theta_0)+mgh\sin(\theta_0)$$

Добавив к уравнениям движения программные силы, получим уравнения управляемого движения маятника:

$$\left((A+mh^2)\sin^2(\theta)+C\cos^2(\theta)\right)\ddot{\varphi}+2\left(A-C+mh^2\right)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)=Q_{пр\ \varphi}$$
$$\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}-\left(A-C+mh^2\right)\dot{\varphi}^2\cos(\theta)\sin(\theta)+mgh\sin(\theta)=Q_{пр\ \theta}$$

Введем отклонения следующим образом:

$$x_1=\varphi-\varphi_0(t)$$
$$x_2=\theta-\theta_0(t)$$

Тогда кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T=\frac{1}{2}\left(A+mh^2\right)\left(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(A+mh^2\right)\left(\dot{x}_1+\dot{\varphi}_0\right)^2\sin^2(x_2+\theta_0)+$$
$$+\frac{1}{2}C\left(\dot{x}_1+\dot{\varphi}_0\right)^2\cos^2(x_2+\theta_0)$$

и уравнения движения возмущенной системы примут вид:

$$\begin{cases} \left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)(\ddot{x}_1+\ddot{\varphi}_0)+ \\ +2\left(A-C+mh^2\right)(\dot{x}_1+\dot{\varphi}_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)\cos(x_2+\theta_0)\sin(x_2+\theta_0)=Q_{np\ \ \varphi} \\ \left(A+mh^2\right)(\ddot{x}_2+\ddot{\theta}_0)-\left(A-C+mh^2\right)(\dot{x}_1+\dot{\varphi}_0)^2\cos(x_2+\theta_0)\sin(x_2+\theta_0)+ \\ +mgh\sin(x_2+\theta_0)=Q_{np\ \ \theta} \end{cases}$$

Составим стабилизирующее управление по формуле (3.21).

$$Q_{cm}=\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial x}-Cx-D\dot{x}+M''+\left[\frac{\partial B}{\partial x^T}-\frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r}+\frac{\partial A}{\partial t}\dot{r}+A\ddot{r}-Q_{np}$$

Для этого сначала произведем вспомогательные вычисления:

$$T=T_2+T_1+T_0$$

$$T_2=\frac{1}{2}\dot{q}^T A(t,\dot{q})\dot{q}$$

$$T_1=B^T(t,q)\dot{q}$$

$$T_0=T_0(t,q)$$

$$C=D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_i''=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\qquad r=\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \theta_0\end{bmatrix}$$

$$T_2=\frac{1}{2}\left(A+mh^2\right)\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\dot{x}_1^2$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=(A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)$$

$$a_{22}=A+mh^2$$

$$T_1=\left(A+mh^2\right)\dot{\theta}_0\dot{x}_2+\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\dot{\varphi}_0\dot{x}_1$$

$$B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

$$b_1=\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\dot{\varphi}_0$$

$$b_2=\left(A+mh^2\right)\dot{\theta}_0$$

$$T_0=\frac{1}{2}\left(A+mh^2\right)\dot{\theta}^2{}_0+\frac{1}{2}\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\dot{\varphi}^2{}_0$$

$$M_1''=\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\dot{r}_1\dot{r}_2=2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0$$

$$M_2''=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\dot{r}^2{}_1=-\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial t}=2(A+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)-2C\cos(x_2+\theta_0)\sin(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)=$$
$$=2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t}=2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)\dot{\varphi}_0+\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial t}=\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}_0$$

$$\left[\frac{\partial B}{\partial x^T}-\frac{\partial B^T}{\partial x}\right]\dot{r}=\sum_i\sum_j\left[\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right]\dot{r}_i=-2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0+$$
$$+2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_2}=(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0$$

Теперь запишем выражения для управляющих воздействий согласно формуле (3.21):

$$Q_{ст\ \ \varphi}=2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)\dot{\varphi}_0+\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0-$$
$$-x_1-\dot{x}_1+2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0-2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0+$$
$$+2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)\dot{\varphi}_0+\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0-Q_{пр\ \ \varphi}=$$
$$=4(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)(\dot{x}_2+\dot{\theta}_0)\dot{\varphi}_0-2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0+$$
$$+2\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0+2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0-$$
$$-x_1-\dot{x}_1-Q_{пр\ \ \varphi}=$$
$$=2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\left(2\dot{x}_2+4\dot{\theta}_0-\dot{\varphi}_0\right)+2\left((A+mh^2)\sin^2(x_2+\theta_0)+C\cos^2(x_2+\theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0-$$
$$-x_1-\dot{x}_1-Q_{пр\ \ \varphi}$$

$$Q_{ст\ \ \theta}=\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}_0-(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0-x_2-\dot{x}_2-$$
$$-\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}^2{}_0+\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}_0+$$
$$+2\left(A-C+mh^2\right)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0\dot{\theta}_0-Q_{пр\ \ \theta}=$$
$$=2\left(A+mh^2\right)\ddot{\theta}_0-2(A-C+mh^2)\sin(x_2+\theta_0)\cos(x_2+\theta_0)\dot{\varphi}_0(\dot{\varphi}_0+\dot{\theta}_0)-x_2-\dot{x}_2-Q_{пр\ \ \theta}$$

$$Q_{cm\ \varphi} = 2(A - C + mh^2)\sin(x_2 + \theta_0)\cos(x_2 + \theta_0)\dot{\varphi}_0\left(2x_2 + 4\dot{\theta}_0 - \dot{\varphi}_0\right) +$$
$$+ 2\left((A + mh^2)\sin^2(x_2 + \theta_0) + C\cos^2(x_2 + \theta_0)\right)\ddot{\varphi}_0 - x_1 - \dot{x}_1 - Q_{np\ \varphi}$$
$$Q_{cm\ \theta} = 2\left(A + mh^2\right)\ddot{\theta}_0 - 2(A - C + mh^2)\sin(x_2 + \theta_0)\cos(x_2 + \theta_0)\dot{\varphi}_0(\dot{\varphi}_0 + \dot{\theta}_0) - x_2 - \dot{x}_2 - Q_{np\ \theta}$$

Уравнения движения соответственно примут вид:

$$\begin{cases} \left((A + mh^2)\sin^2(x_2 + \theta_0) + C\cos^2(x_2 + \theta_0)\right)(\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_0) + \\ + 2\left(A - C + mh^2\right)(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)(\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0)\cos(x_2 + \theta_0)\sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np\ \varphi} + Q_{cm\ \varphi} \\ \left(A + mh^2\right)(\ddot{x}_2 + \ddot{\theta}_0) - \left(A - C + mh^2\right)(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)^2\cos(x_2 + \theta_0)\sin(x_2 + \theta_0) + \\ + mgh\sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np\ \theta} + Q_{cm\ \theta} \end{cases}$$

Далее подставим стабилизирующие и программные силы в уравнения возмущенного движения и проведем численное интегрирование системы.

Графики поведения отклонений $x(t)$ и скоростей отклонений $\dot{x}(t)$, приведенные на рисунках 18 – 21, иллюстрируют асимптотическую устойчивость исследуемых решений.

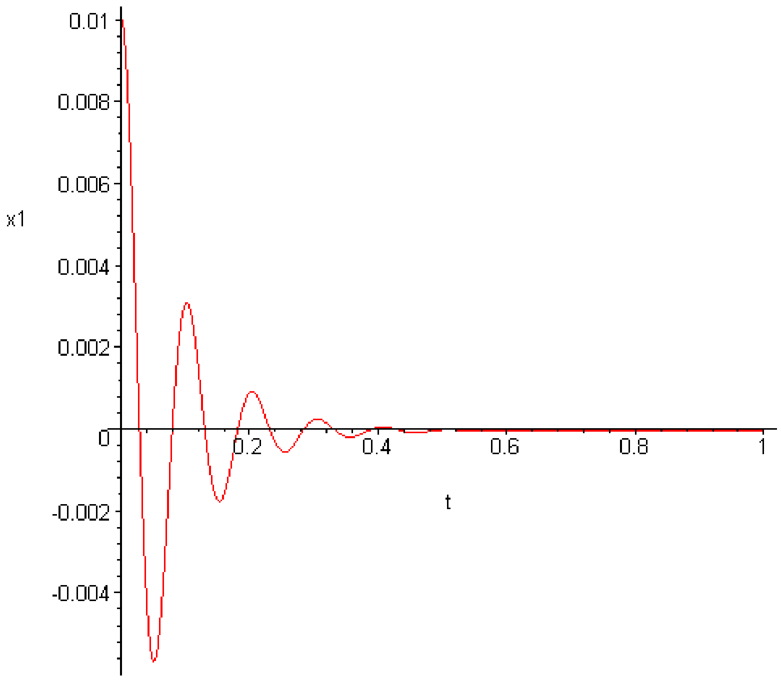


Рисунок 18 - График зависимости отклонения $x_1(t)$

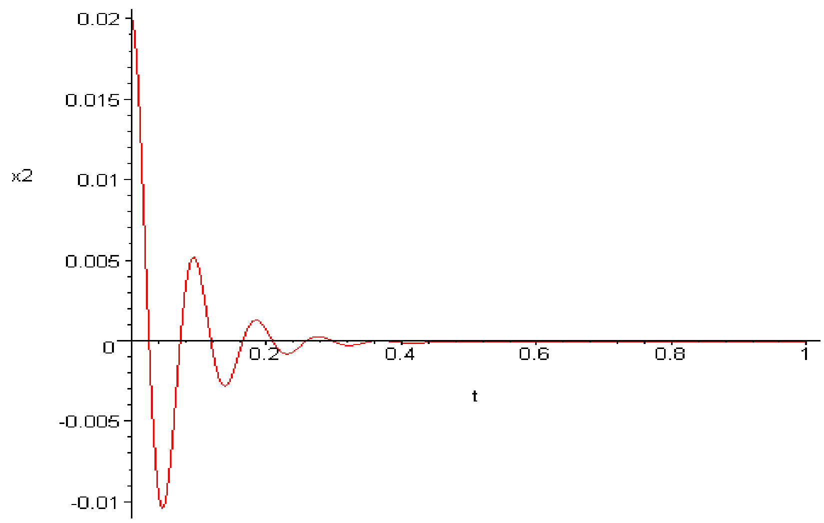


Рисунок 19 - График зависимости отклонения $x_2(t)$

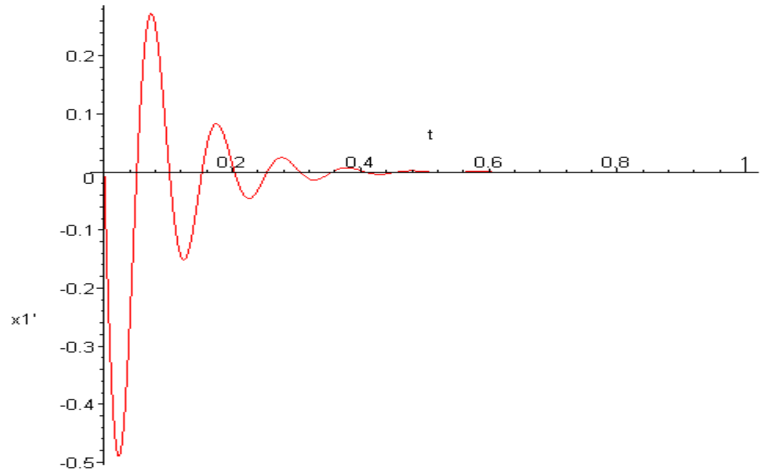


Рисунок 20. - График зависимости $\dot{x}_1(t)$

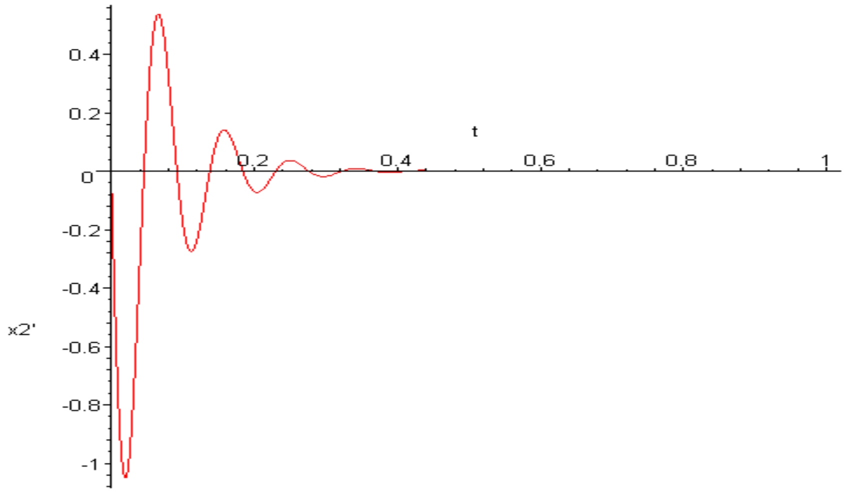


Рисунок 21 - График зависимости $\dot{x}_2(t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических указаниях подробно рассмотрены вопросы, связанные с выполнением курсовой работы по курсу «Стабилизация и управление динамическими системами» для магистрантов направления «Механика и математическое моделирование». Содержатся общие требования к выполнению работы, представлена четкая последовательность действий при реализации того или иного метода теории управления, содержатся краткие теоретические сведения, необходимые для решения поставленных задач и приводится конкретный пример выполнения данной курсовой работы. Также представлены все необходимые типы графиков, иллюстрирующих полученные теоретические и численные результаты. В конце работы приводится список литературы, рекомендованной для выполнения курсовой работы.

На примере маятника было проведено комплексное исследование свойств управляемости различных движений механической системы с двумя степенями свободы. В частности, проведены реализация и стабилизация заданного программного движения методом построения внешнего управления: решены задача конструирования программного управления, обеспечивающего реализацию заданного желаемого движения механической системы (в общем случае не являющегося решением исходной неуправляемой системы), и задача синтеза позиционного (стабилизирующего) управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость программного движения и неустойчивых стационарных движений неуправляемой механической системы.

Также рассмотрен один из методов решения задачи стабилизации программных движений для лагранжевых систем и продемонстрирован на примере построения асимптотически устойчивых движений маятника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т,1-2. М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.; 487 с.
2. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.—375 с.
3. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: «Эдиториал УРСС», 1998. – 168 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – Учеб. Пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит. , 1988, 304 с.
6. Авраменко А.А., Безгласный С.П. Исследование устойчивости движений механических систем: Методические указания к курсовой работе по теории устойчивости и управлиния. Часть 1. – Самар. Гос. Аэрокосм. Ун-т. Самара. 2008. 48 с.
7. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы// ПММ. - 1996. - Т.60. Вып. 3 С. 388-396.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб пособие для университетов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. Лит., 1990. – 416 с.
9. Bezglasny S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems// Journal of applied mathe-matics & computing, vol. 14, No. 1-2, Korea, 2004.
10. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. -- 1984. -Т.48. Вып.2. - С.225-232.
11. СТП СГАУ 6.1.4. – 97. Общие требования к оформлению учебных текстовых документов: методические указания.