МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(СГАУ)

С. Н. Перов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ НАДЁЖНОСТИ

Методические указания к практическим занятиям по курсу

Электронный ресурс

САМАРА
2013

УДК 624.041: 519.2
С 24

Автор-составитель: **Перов Сергей Николаевич**

Статистическая механика и теория надёжности [Электронный ресурс]: электрон. методич. указания к практическим занятиям / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост: С.Н. Перов. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Тема «Функциональные преобразования случайных величин»

1. $\sigma = \frac{M}{W}$; Известно $\Rightarrow f_M\,(M)$

М= $\psi(\sigma) = \sigma \cdot W$; $\psi'(\sigma) = W$;

Тогда имеем: $f_\sigma(\sigma) = f_{\text{М}}(\sigma M) \cdot W$

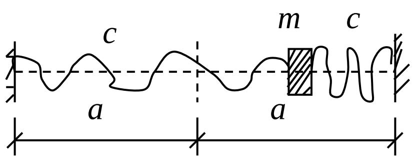
2. $Y = x^2$;

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_x} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2}\right);$$

$$X = \psi(Y) = \pm\sqrt{y}; \qquad |\psi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\exp\left(-\frac{(\sqrt{y}-m_x)^2}{2S_x^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}+m_x)^2}{2S_x^2}\right)\right];$$

3. $x = \sin\omega t$;



ω - круговая частота колебания;

a - амплитуда колебаний.

Определить функцию плотности вероятности события, заключающуюся в том, что в случайный момент времени t тело окажется на расстоянии x от положения равновесия.

$$P(x < X < x + dx) = c_1 \frac{dx}{\dot{x}};$$

$$\boldsymbol{P(x < X < x + dx) = f(x)dx}$$

$$c_1 \frac{dx}{\dot{x}} = f(x)dx; \quad f(x) = c_1 \frac{1}{\dot{x}}; \quad \dot{x} = a\omega\cos\omega t; \quad \cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t};$$

$$\sin\omega t = \frac{x}{a}; \quad \cos\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}; \quad f(x) = \frac{c_1}{\omega\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1}{\omega\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{c_1}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left(c_1 = \frac{\omega}{\pi}; \mathrm{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}} \right) = \frac{\omega\pi}{\pi\omega} = 1;$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Тема «Функциональные преобразования системы случайных величин»

1. Пусть:

$y_1 = x_1$

$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$f_x(x_1, x_2)$ - известно. Определить $f_y(y_2)$.

$\partial\varphi_2 / \partial x_2 = 1$; $x_2 = \psi_2(y_1, y_2) = y_2 - x_1$.

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x[x_1, y_2 - x_1]dx_1.$$

Если случайные величины x_1 и x_2 независимы, то можно записать:

$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x1}(x_1) \cdot f_{x2}(y_2 - x_1) \cdot dx_1$ - формула композиции законов распределения и коротко записывается следующим образом:

$f_y = f_{x_1} * f_{x_{2i}}$;

2. Пусть:

$y_1 = x_1$;

$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$;

$\partial\varphi_2 / \partial x_2 = x_1$; $x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) = y_2 / x_1$;

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x\left(x_1, \frac{y_2}{x_1}\right)}{|x_1|} \cdot dx_1;$$

Если случайные величины X_1 и X_2 независимы:

$$f_y(y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{x1}(x_1)\cdot f_{x2}\left(\frac{y_2}{x_1}\right)}{|x_1|}\cdot dx_1 .$$

3. Пусть:

$y_1 = x_1$; $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_2 / x_1$;

$\partial\varphi_2 / \partial x_2 = 1/x_1$; $x_2 = \psi_2(y_1, y_2) = x_1 \cdot y_2$;

$$f_y(y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1| f_x(x_1, x_1\cdot y_2)\cdot dx_1 .$$

И для независимых случайных величин:

$$f_y(y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f_{x1}(x_1)\cdot f_{x2}(x_1\cdot y_2)\cdot dx_1$$

Тема «Определение закона распределения бисекторного изгибающего момента в поперечном сечении ракетоносителя на старте»

Исходная формула

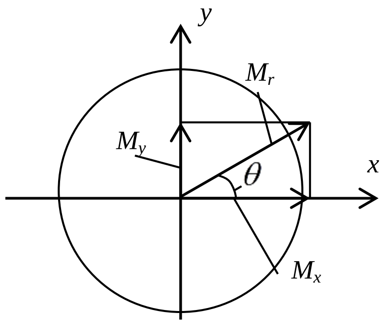
$$f_y(y_1, y_2)=\sum_{k=1}^{n} f_x(x_{1k}, x_{2k})\left|\frac{\partial(x_{1k}\ x_{2k})}{\partial(y_1\ y_2)}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{f_x(x_{1k}, x_{2k})}{\left|\frac{\partial(y_1\ y_2)}{\partial(x_{1k}\ x_{2k})}\right|};$$

$$\left\{\frac{\partial(x_1\ x_2)}{\partial(y_1\ y_2)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}\right.$$

Задача.

Определить функцию плотности вероятности эквивалентного изгибающегося момента M_r в сечении круговой балки, если известна совместная функция плотности вероятности изгибающих моментов M_x, M_y.

$$f(M_x, M_y)=\frac{1}{2\pi S_x S_y}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_x^2}{S_x^2}+\frac{M_y^2}{S_y^2}\right)\right];$$



$$M_r = \sqrt{M_x^{\ 2} + M_y^{\ 2}}\ .$$

Обратная связь:

$$\begin{cases} M_x = M_r \cos\theta \\ M_y = M_r \sin\theta \end{cases}$$ Компоненты вектора M_r; $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$f_y(M_r,\theta) = f_x(M_r\cos\theta, M_r\sin\theta)\left|\frac{\partial(M_r\cos\theta \quad M_r\sin\theta)}{\partial(M_r \quad \theta)}\right|$$ - под знаком абсолютной величины Якобиан преобразования.

$$f(M_r) = \int_0^{2\pi} f_y(M_r,\theta)d\theta$$ - из условия согласованности.

$$\frac{\partial(M_r\cos\theta \quad M_r\sin\theta)}{\partial(M_r \quad \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(M_r\cos\theta)}{\partial M_r} & \dfrac{\partial(M_r\cos\theta)}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial(M_r\sin\theta)}{\partial M_r} & \dfrac{\partial(M_r\sin\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -M_r\sin\theta \\ \sin\theta & M_r\cos\theta \end{vmatrix} = M_r\cos^2\theta + M_r\sin^2\theta = M_r\,;$$

$$f_y(M_r,\theta) = M_r / 2\pi S_x S_y \exp\left[-\frac{1}{2}(M_r^2\cos^2\theta / S_x^{\ 2} + M_r^2\sin^2\theta / S_y^2)\right] =$$

$$= \frac{M_r}{2\pi S_x S_y}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot L\right];$$

$$L = \frac{M_r^2\cos^2\theta S_y^2 + M_r^2\sin^2\theta S_x^2}{S_x^2 S_y^2} = \frac{M_r^2(\cos^2\theta S_y^2 + \sin^2\theta S_x^2)}{S_x^2 S_y^2} =$$

$$= \frac{M_r^2\left(S_y^2\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) + S_x^2\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2\theta + 1)\right)}{2S_x^2 S_y^2} =$$

$$= \frac{M_r^2\left[(S_x^2 + S_y^2) + (S_y^2 - S_x^2)\cos 2\theta\right]}{2S_x^2 S_y^2} =$$

$$=\frac{M_r^2\left[\left(S_x^2+S_y^2\right)\right]}{2S_x^2S_y^2}+\frac{M_r^2\left[\left(S_y^2-S_x^2\right)\cos 2\theta\right]}{2S_x^2S_y^2};$$

$$f_y(M_r,\theta)=\frac{M_r}{2\pi S_xS_y}\ \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2+S_y^2\right)}{S_x^2S_y^2}+\frac{M_r^2\left(S_y^2-S_x^2\right)}{S_x^2S_y^2}\cos 2\theta\right)\right];$$

$$f(m_r)=\int_0^{2\pi}\ \frac{M_r}{2\pi S_xS_y}\ \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2+S_y^2\right)}{S_x^2S_y^2}\right)\right]\cdot\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_y^2-S_x^2\right)}{S_x^2S_y^2}\cos 2\theta\right)\right]d\theta=$$

$$=\frac{M_r}{2\pi S_xS_y}\ \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2+S_y^2\right)}{S_x^2S_y^2}\right)\right]\int_0^{2\pi}\ \exp\left[\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2-S_y^2\right)}{S_x^2S_y^2}\cos 2\theta\right)\right]d\theta=$$

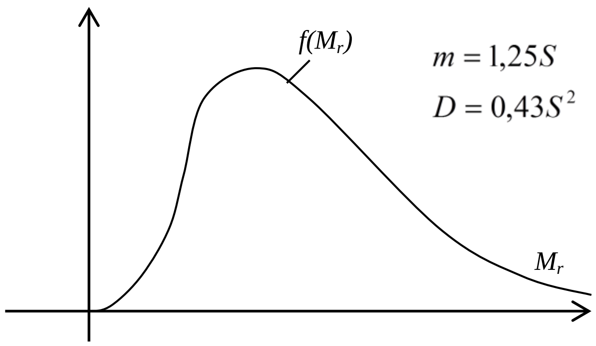
$$=\frac{M_r}{S_xS_y}\ \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2+S_y^2\right)}{S_x^2S_y^2}\right)\right]\cdot J_0\left(\frac{M_r^2\left(S_x^2-S_y^2\right)}{4S_x^2S_y^2}\right);$$

$J_0(\alpha)$ - Бесселева функция.

$$J_0(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\alpha\cdot\cos 2\varphi\right)d\varphi\ .$$

Часто на практике $S_x=S_y=S$.

Тогда $f(M_r)=\ \frac{M_r}{S^2}\cdot\exp\left(-\frac{M_r^2}{2S^2}\right)$ - релеевское распределение.

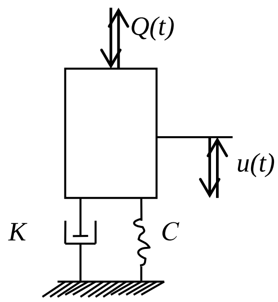


Довольно сложная задача решена, потому что составляющие вектора M_r были некоррелированы.

Тема «Решение задач статистической механики для линейных систем с конечным числом степеней свободы»

Метод функций Грина

Рассмотрим линейную систему с одной степенью свободы, находящуюся под действием случайной силы $Q(t)$.



$u(t)$ - перемещение относительно положения равновесия; M - масса; C – жесткость упругой связи; K – коэффициент вязкого трения.

Уравнение колебаний массы с одной степенью свободы записывается в виде:

$$M\frac{d^2u}{dt^2}+k\frac{du}{dt}+Cu=Q(t).$$

Введем обозначения: $\omega_0=\sqrt{\frac{C}{M}}$; $2\varepsilon=\frac{K}{M}$; $q(t)=\frac{Q(t)}{M}$.

Тогда:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\varepsilon\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=q(t).$$

Для решения задачи необходимо найти функцию Грина, т.е. реакцию системы на единичное импульсное воздействие. Согласно записанному ранее соотношению:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)q(\tau)d\tau$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2h(t,\tau)}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dh(t,\tau)}{dt}+\omega^2h(t,\tau)=\delta(t-\tau)$$

при нулевых начальных условиях.

Т.е. мы должны решить неоднородное уравнение при начальных условиях:

$$h(t,\tau)=\dot{h}(t,\tau)=0.$$

В теории автоматического управления (ТАУ) имеется математический аппарат, позволяющий приводить такие линейные системы к однородным уравнениям с ненулевыми начальными условиями.

Рассматривается в ТАУ такой случай.

Пусть имеется система, оператором которой является линейный дифференциальный оператор общего вида:

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}.$$

Тогда для определения функции Грина необходимо решить уравнение:

$Lh(t,\tau) = \delta(t-\tau)$ при нулевых начальных условиях, т.е.:

$$\left[\frac{\partial^k h(t,\tau)}{\partial t^k}\right]\Big|_{t=\tau} = 0; \quad при\ k=0,1...,n\text{-}1.$$

Т.е. опять тот же случай – уравнение неоднородное, а начальные условия нулевые.

Оказывается (в ТАУ есть такая теорема) можно заменить указанное уравнение и условие физической возможности системы следующим уравнением и начальными условиями:

$Lh(t,\tau) = 0$ при начальных условиях:

$$\left[\frac{\partial^k h(t,\tau)}{\partial t^k}\right]\Big|_{t=\tau} = 0; \quad при\ k=0,1...,n\text{-}2;$$

$$\left[\frac{\partial^{n-1} h(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\right]\Big|_{t=\tau} = \frac{1}{a_n(\tau)}.$$

Таким образом, в нашем случае необходимо решить уравнение:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dh}{dt} + \omega^2 h = 0;$$

при начальных условиях $h = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 1. \quad (t = 0)$.

Несложные вычисления дают:

$$h(t) = \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon t} \sin\omega_\varepsilon t.$$

Здесь ω_ε - частота собственных колебаний системы, вычисленная с поправкой на силу трения:

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}\ .$$

И теперь, когда известна функция Грина, можно все найти на выходе.

Определим корреляционную функцию:

$$k_u(\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta_1} \sin\omega_\varepsilon\theta_1 \cdot \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta_2} \sin\omega_\varepsilon\theta_2 \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{\omega_\varepsilon^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\varepsilon(\theta_1+\theta_2)} \sin\omega_\varepsilon\theta_1 \cdot \sin\omega_\varepsilon\theta_2 \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2\ .$$

Пусть корреляционная функция внешнего воздействия:

$K_q(\tau) = S_0\delta(\tau)$, т.е. внешнее воздействие – «белый шум».

Учитывая фильтрующее свойство δ - функции и получим:

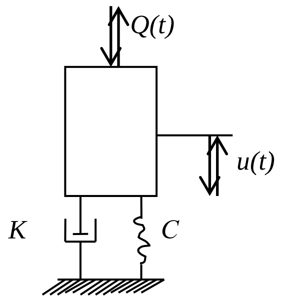
$$K_u(\tau) = \frac{S_0 e^{-\varepsilon|\tau|}}{\omega_\varepsilon^2}\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\theta} \sin\omega_\varepsilon\theta \cdot \sin\omega_\varepsilon(|\tau| + \theta)\, d\theta\ .$$

Или после вычисления интеграла:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{4\omega_0^2\varepsilon}(\cos\omega_\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\sin\omega_\varepsilon|\tau|)\cdot e^{-\varepsilon|\tau|}\ .$$

Метод дифференциальных уравнений

В качестве простого примера рассмотрим определение корреляционной функции на выходе системы, движение которой описывается уравнением:



$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t)\,.$$

Уравнение (3) для этой системы записывается так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \omega_0^2\right)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2} + \omega_0^2\right)\cdot K_u(t_1,t_2) = K_q(t_1,t_2) \qquad (7)$$

Пусть начальные условия для центрированного выходного процесса $\tilde{u}(t)$ - нулевые. Начальные условия для корреляционной функции могут быть представлены как в форме (5):

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_1} = 0 \quad (t_1 = 0)\,;$$

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_2} = 0 \quad (t_2 = 0)\,.$$

Так и в форме (6):

$$K_u = \frac{\partial^2 K_u}{\partial t_1 \partial t_2} = 0 \qquad (t_1 = 0,\, t_2 = 0)\,.$$

Если $\tilde{u}(t)$ - стационарный случайный процесс, то:

$$K_u(t_1,t_2) = K_u(t_2 - t_1).$$

Обозначим $t_2 - t_1 = \tau$. Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{d}{d\tau}\,; \qquad \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau}\,.$$

Перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon\frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right)\cdot\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon\frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right) K_u(\tau) = K_q(\tau)\,. \qquad (8)$$

Дополнительные условия получим из рассмотрения свойств корреляционной функции стационарного случайного процесса. Эта функция должна быть четной, т.е.

$$K_u(-\tau) = K_u(\tau)\,. \qquad (9)$$

Кроме того, корреляционная функция и ее производные должны быть ограничены на бесконечности, а для корреляционной функции эргодического процесса выполняется более сильное условие.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}K_u(\tau)d\tau=0.$$

В силу условия четности (9) достаточно определить решение (8) при $0\le\tau<\infty$. При этом если процесс $\tilde{u}(t)$ - дифференцируемый, то из условия (9) вытекает, что:

$$\frac{dK_u}{d\tau}=\frac{d^3K_u}{d\tau^3}=0 \qquad (\tau=0).$$

Допустим, что внешнее воздействие является стационарным «белым шумом». Его корреляционная функция имеет вид:

$$K_q(\tau)=S_0\delta(\tau). \tag{10}$$

Из уравнения (8) видно, что четвертая производная от $K_u(\tau)$ содержит сингулярную составляющую $S_0\cdot\delta(\tau)$. Следовательно, третья производная имеет в нуле скачок, равный $\frac{1}{2}S_0$. Вместо неоднородного уравнения (8) с правой частью (10) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-2\varepsilon\frac{d}{d\tau}+\omega_0^2\right)\cdot\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+2\varepsilon\frac{d}{d\tau}+\omega_0^2\right)K_u(\tau)=0.$$

с неоднородными начальными условиями:

$$\frac{dK_u}{d\tau}=0; \qquad \frac{d^3K_u}{d\tau^3}=\frac{1}{2}\mathrm{S}_0; \qquad (\tau=0). \tag{11}$$

На бесконечности должно выполняться условие ограниченности.

Решение уравнения ищем в виде:

$K_u=Ce^{r\tau}$, где r – характеристический показатель.

Уравнение для определения характеристических показателей имеет вид:

$$(r^2-2\varepsilon r+\omega_0^2)(r^2+2\varepsilon r+\omega_0^2)=0$$

Отсюда:

$r=\pm\varepsilon\pm i\omega_\varepsilon$, $\qquad \omega_\varepsilon=\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}$ - частота собственных колебаний системы с учетом демпфирования.

На основании условия ограниченности отбрасываем частные решения, которым соответствуют показатели с положительной действительной частью. Таким образом:

$$K_u(\tau) = C_1 e^{-(\varepsilon - \mathrm{i}\omega_\varepsilon)\tau} + C_2 e^{-(\varepsilon + \mathrm{i}\omega_\varepsilon)\tau}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из условий (11):

$$C_1 = \frac{S_0}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon(\varepsilon - i\cdot\omega_\varepsilon)};$$

$$C_2 = -\frac{S_0}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon(\varepsilon + i\cdot\omega_\varepsilon)}.$$

Подстановка найденных значений в решение дает:

$K_u(\tau) = \dfrac{S_0}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon}\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon - i\cdot\omega_\varepsilon} - \dfrac{e^{-\mathrm{i}\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon + i\cdot\omega_\varepsilon}\right)$, откуда после перехода к действительному выражению получаем окончательную формулу:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{4\omega_0^2\varepsilon}(\cos\omega_\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\sin\omega_\varepsilon\tau)\cdot e^{-\varepsilon\tau}.$$

Формула выведена при $\tau \geq 0$. Можно ее распространить на всю действительную ось если заменить τ на $|\tau|$. Полученная формула совпадает с формулой, полученной решением задачи статистической динамики методом функций Грина.

Тема «Решение задачи статистической механики методом спектральных представлений»

Вновь рассмотрим линейную колебательную систему, движение которой описывается уравнением:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t).$$

Пусть система при $t<0$ находится в покое, а при $t=0$ на систему начинает действовать случайная нагрузка, которая представляет собой заданную при $t \ge 0$ реализацию стационарного случайного процесса:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)\varphi(t|\omega)d\omega, \text{ где } \varphi(t|\omega) = \begin{cases} 0, & (t<0) \\ e^{i\omega t}, & (t \ge 0) \end{cases}.$$

Решение исходного уравнения ищется в форме:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)\, \psi(t|\omega)\, d\omega. \qquad (1)$$

Функция $\psi(t|\omega)$ определяется как решение дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = e^{i\omega t}.$$

Находим, что:

$$\psi(t|\omega) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-\varepsilon t}\left(\cos\omega_\varepsilon t + \dfrac{i\omega+\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\cdot\sin\omega_\varepsilon t\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega}.$$

Вероятностные характеристики выходного процесса определяются осреднением соответствующих выражений, получаемых на основе выражения (1).

Например, для среднего квадрата выходного процесса:

$$<|u(t)|^2> = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega)\left|\psi(t|\omega)\right|^2 d\omega.$$

При $t \to \infty$ средний квадрат стремится к постоянному значению:

$$<|u(\infty)|^2> = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega)d\omega}{\left|\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega\right|^2}.$$

Это значение соответствует установившейся реакции системы на стационарные воздействия.

Метод спектральных представлений легко распространяется на многомерные случайные процессы. Пусть внешнее воздействие описывается n функциями: $q_1(t),\dots,q_n(t)$, а поведение системы – m функциями $u_1(t),\dots,u_m(t)$.

Предположим, внешнее воздействие допускает стохастически ортогональное представление следующего типа:

$$q_j(t) = < q_j(t) > + \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\omega)\varphi_j(t|\omega)d\omega \qquad (j = 1,2...,n).$$

Спектры $Q_j(\omega)$ удовлетворяют условию типа:

$$< Q_j^*(\omega)Q_k(\omega') > = S_{qjqk}(\omega)\delta(\omega - \omega').$$

Здесь $S_{qjqk}(\omega)$- взаимные спектральные плотности процессов $q_j(t)$ и $q_k(t)$. Решение уравнения $Lu = q$ ищется в виде:

$$u_j(t) = < u_j(t) > + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Q_\alpha(\omega)\psi_{j\alpha}(t|\omega)d\omega \qquad (j = 1,2,...,m).$$

Здесь через $\psi_{j\alpha}(t|\omega)$ обозначены решения детерминистической системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} L_{jk}\psi_{j\alpha}(t|\omega) = \delta_{j\alpha}\varphi_\alpha; \qquad \begin{pmatrix} j = 1,2,...,n \\ \alpha = 1,2,...,n \end{pmatrix}.$$

Где $\delta_{j\alpha}$ - символ Кронекера.

Эти решения имеют смысл детерминистических реакций системы на воздействие:

$q_\alpha = \varphi_\alpha(t|\omega)$ при всех остальных $q_j = 0$.

Для рассмотренного случая взаимная корреляционная функция выходных процессов определяется по зависимостям:

$$K_{ujuk}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} S_{q_\alpha q_\beta}(\omega)\psi_{j\alpha}^*(t_1|\omega)\psi_{k\beta}(t_2|\omega)d\omega.$$

Тема «Количественные характеристики надёжности. Примеры расчёта надёжности как вероятностной прочности»

Несущая способность элемента имеет нормальный закон распределения. $m_R = 100kH$, $\sigma_R = 10kH$.

Эксплуатационная нагрузка распределена по экспоненциальному закону $f_N(N) = \lambda e^{-\lambda N}$ с математическим ожиданием $m_N = 50kH$. Определим вероятность безотказной работы. Воспользуемся для решения задачи формулой:

$$H = \int_0^{\infty} f_R(R) F_N(R) dR .$$

В данном случае:

$$F_N(R) = 1 - e^{-\lambda R} .$$

Получим:

$$H = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left[-\frac{(R-m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right](1-e^{-\lambda R})dR = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(R-m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right]dR -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_R^2}(R^2 - 2m_R R + m_R^2 + 2\lambda R\sigma_R^2\right]dR .$$

Для определения первого слагаемого введем новую переменную интегрирования:

$$t = \frac{R-m_R}{\sqrt{2}\sigma_R};\ R = \sqrt{2}\,\sigma_R\, t + m_R;\ dR = \sqrt{2}\sigma_R \cdot dt .$$

Для определения второго слагаемого введем новую переменную:

$$z = \frac{R-m_R+\lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R};\ R = \sqrt{2}\sigma_R\, z + m_R - \lambda\,\sigma_R^2;\ dR = \sqrt{2}\,\sigma_R\, dz .$$

Тогда получим:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}}^{\infty} \exp(-t^2)dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2m_R - \lambda\sigma_R^2)\right] \int_{-\frac{m_R-\lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}}^{\infty} \exp(-z^2)\,dz .$$

Но как мы знаем:

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2) = \Phi(x)$ - интеграл вероятности.

Используя его свойства $\Phi(-\infty) = 1,\ -\Phi(x) = \Phi(-x)$, получим:

$$H = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\frac{m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}) - \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2m_R - \lambda\sigma_R^2)\right](1+\Phi(\frac{m_R - \lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}))\right\}.$$

Подставляя сюда значения m_R, σ_R и $\lambda = \frac{1}{m_N}$, получим значение H.

В данном случае:

$$H = \frac{1}{2}\left\{1+\Phi(\frac{100}{\sqrt{2}\cdot 10}) - \exp\left[-\frac{1}{2\cdot 50}(2\cdot 100 - \frac{1}{50}10^2)\right](1+\Phi(\frac{100-\frac{1}{50}10^2}{\sqrt{2}\cdot 10}))\right\} = 0.86$$

Тема «Спектральный анализ узкополосных и широкополосных случайных стационарных процессов»

1. Требуется выяснить, является ли случайная функция

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(A_j \cos \omega_j t + B_j \operatorname{sun} \omega_j t\right)$$

стационарной случайной функцией, если A_j и B_j – случайные взаимно независимые величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями $\left(D_{A_j} = D_{B_j} = D_j\right)$.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ равно нулю.

Корреляционная функция

$$K_x\left(t, t^{`}\right) = M\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=1}^{n}\left(A_j \cos \omega_j t^{`} + B_j \sin \omega_j t^{`}\right)\right)\right].$$

После преобразований получим

$$K_x\left(t, t^{`}\right) = \sum_{j=1}^{n} D_j \cos \omega_j\left(t - t^{`}\right).$$

Полученное выражение зависит только от разности $t - t^{`}$, т.е. $X(t)$ является стационарной функцией. Дисперсия случайной функции $X(t)$

$$D_x = K_x(0) = \sum_{j=1}^{n} D_j.$$

2. Требуется найти корреляционную функцию K_x, если случайная функция X равна

$$X = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i\omega_j t},$$

где $A_j = A_{1j} + iA_{2j}$ – комплексная амплитуда; i – мнимая единица.

Некоррелированные случайные величины A_{1j} и A_{2j} имют равные нулю математические ожидания и равные между собой дисперсии.

Воспользуемся формулой

$$K_{xy} = M\left[\tilde{X}(t)\tilde{Y}\left(t^{`}\right)\right],$$

полагая $Y^*(t) = X^*(t)$:

$$K_x\left(t, t^{`}\right) = M[X(t)X^*(t)] = M\left[\left(\sum_{j=1}^{n} A_j e^{i\omega_j t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega_k t^{`}}\right)\right],$$

где $A_k^* = A_{1k} - iA_{2k}$.

После преобразований получим

$$K_x\left(t, t^{`}\right) = \sum_{j=1}^{n} M\left[A_j A_k^*\right] e^{i\left(t - t^{`}\right)\omega} = \sum_{j=1}^{n} 2D_j e^{i\tau\omega}.$$

Из данной формулы следует, что случайная функция X при $m_{1j} = m_{2j} =$ $= 0$, $D_{1j} = D_{2j} = D_j$ для некоррелированных A_{1j}, A_{2j} является стационарной случайной функцией.

Тема «Спектральная плотность стационарного случайного процесса»

1. Корреляционная функция случайной стационарной функции $X(t)$

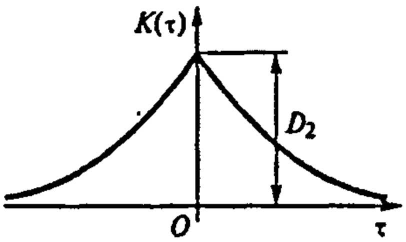
$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

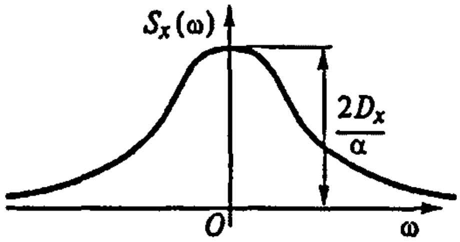
Воспользовавшись соотношениями Виннера-Хинчина, получим

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{D_x}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau\right] = \frac{D_x}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Графики изменения корреляционной функции $K_x(\tau)$ и спектральной плотности $S_x(\omega)$ представлены ниже.





2. Дана стационарная случайная функция $X(t)$ с вероятностными характеристиками $m_x = 0$, $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Требуется найти взаимную спектральную плотность стационарной функции и её первой производной. Выражение для взаимно корреляционной функции

$$K_{x\dot{x}} = \frac{d}{d\tau}K_x(\tau) = -D_x \alpha e^{-\alpha|\tau|} \sin\tau\, d\tau.$$

Для определения взаимной спектральной плотности воспользуемся соотношениями Виннера-Хинчина:

$$S_{x\dot{x}}(i\omega) = -\frac{D_x\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau} sign\tau\, d\tau =$$

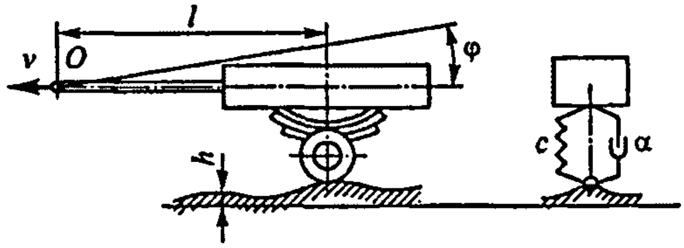
$$= -\frac{D_x\alpha}{2\pi}\left[\int_0^{-\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}(1)d\tau + \int_{\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}(-1)d\tau\right] =$$

$$== -\frac{D_x\alpha}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}(1)d\tau - \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\omega)\tau}(-1)d\tau\right] = -\frac{D_x}{\pi}\cdot\frac{\alpha i\omega}{(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Тема «Кумулятивные модели отказов. Выбросы случайных процессов»

Корреляционная функция угла φ при нормальных стационарных колебаниях прицепа $(m_\varphi = 0)$

$$K_\varphi(\tau) = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$



Требуется определить среднее число превышений углом φ допустимого значения $a_0 = \varphi_0 = \pm 5^0$ за 10 мин и среднюю продолжительность выброса τ_a. Числовые значения параметров известны: $\sigma_\varphi = 2^0$; $\alpha = 0{,}1\frac{1}{c}$; $\beta = 0{,}6\ 1/c$.

Так как

$$\sigma_{\dot{\varphi}}^2 = -\frac{d^2K_\varphi}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} = \sigma_\varphi^2(\alpha^2+\beta^2),$$

то, воспользовавшись формулой

$$N = \frac{(t_k - t_0)\sigma_{\dot{x}}}{\pi\sigma_x} e^{-(x_0 - m_x)^2/2\sigma_x^2},$$

получим

$$N = \frac{600\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\pi} e^{-\left(\varphi_0^2\right)^2/2\sigma_\varphi^2} = \frac{600}{\pi} 0{,}61 \cdot 0{,}043 \approx 5.$$

Средняя продолжительность выброса

$$\tau_a = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{\left(\varphi_0^2\right)^2/2\sigma_\varphi^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\varphi_0}{\sigma_\varphi}\right)\right].$$

Подставив числовые значения, найдём

$$\tau_a = \frac{\pi}{0{,}615} 23{,}104(1 - 0{,}9948) \approx 0{,}7\text{с}.$$