МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И
ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ордена Трудового Красного Знамени АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. Королева

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕХПРОЦЕССО В И КОНСТРУКЦИЙ РЭС

Методические указания для проведения контролируемой самостоятельной работы по курсу "Теоретические основы конструирования и технологии РЭС"

САМАРА 2007

УДК Б21.396.6.002

Рассмотрены вопросы решения и постановки задач статистического анализа конструкций и техпроцессов производства РЭС. Приводится методика предварительной обработки данных эксперимента, оценка параметров распределения, статистической проверки гипотез. Все разделы снабжены вариантами типовых задач и примерами их решения. Указания предназначены для студентов дневной и вечерней формы обучения для проведения контролируемой самостоятельной работы.

Составитель: В.А. Зеленский

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Значения параметров технологического процесса отклоняются от нормы со временем и под воздействием случайных факторов, действующих на РЭС. Поэтому значения параметров выпускаемых изделий являются случайными. При изучении степени отклонения значений какого-либо параметра статистически однородных изделий практически невозможно и экономически нецелесообразно исследовать каждый объект изучаемой совокупности. Поэтому из всей совокупности однородных объектов, называемой *генеральной,* отбирают случайно определенное количество, называемое *выборкой.* Число объектов в выборке называют *объемом выборки.*

Пусть для получения некоторого количественного признака из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Значения x_1 x_2 x_n признака X в выборке называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке - *вариационным рядом.*

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Предварительная обработка статистических данных

Для ускорения расчетов и предупреждения ошибки необходима предварительная обработка данных, полученных в результате измерений.

Если варианты выборки представлены дробными числами, то целесообразно умножить их на какую-то постоянную величину, чтобы оперировать далее только с целыми числами. Если варианты являются числами и различаются лишь в нескольких последних знаках, то следует отбросить постоянную часть вариант. После завершения расчетов необходимо провести с результатом обратные операции. Если объем выборки невелик, следует расположить варианты в виде вариационного ряда и пронумеровать их.

Выборочные данные иногда могут содержать резко отклоняющиеся результаты, так называемые *выскакивающие варианты.* Они являются, как правило, следствием грубой ошибки в проведении эксперимента или измерения, оставшейся незамеченной. Здесь рассматривается очень быстрый способ выявления выскакивающих вариант, основанный на оценке различий крайних вариант вариационного ряда, который позволяет с достаточной строгостью решить эту задачу.

Пусть имеем выборку объема n, данные которой представлены в виде вариационного ряда $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$. Для проверки вариант, относительно которых можно предположить, что они являются выскакивающими, следует вычислить отношения, представленные в табл. П1.

Отношение $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ вычисляется, когда резко отклоняющейся является наибольшая варианта. Отношение $\dfrac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$ вычисляется, когда "подозреваемой" является наименьшая варианта.

Отношения, представленные во втором и третьем столбцах табл. П1, могут использоваться в некоторых случаях для повышения эффективности проверки выскакивающих вариант. Так, отношение $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ позволяет эффективнее выявлять выскакивающую варианту, когда предлагаются выскакивающими сразу две варианты - наибольшая и наименьшая. Отношение $\dfrac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$ используется для проверки наименьшей варианты, когда подозреваемыми являются наибольшая и наименьшая варианты. Отношение $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ служит для проверки наибольшей варианты, когда предполагаются выскакивающими сразу две наибольшие варианты. Отношение $\dfrac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$ вычисляется для проверки наименьшей варианты, когда “подозреваемыми" являются две наименьшие варианты.

Затем нужно сравнить вычисленные значения отношений с соответствующими табличками для данного объема выборки n и уровней значимости α=0.05;0.01.

В общем случае, под уровнем значимости в математической статистике понимают вероятность принятия ошибочного решения. Здесь это вероятность того, что мы ошибочно исключим проверяемую к 1 варианту, хотя в действительности она не является грубой ошибкой эксперимента**,** т. е. фактически эта варианта характерна для изучаемой генеральной совокупности.

Если хотя бы одно из трех вычислительных отношений превышает соответствующее табличное значение, это уже дает право на безоговорочное исключение крайней варианты. Если каждое из трех вычисленных значений меньше соответствующего табличного, то проверяемая крайняя варианта не может быть значимости 0,05 и 0.01. В таком случае нет оснований для безоговорочного вывода об исключении крайней варианты. Можно лишь отметить, что велика вероятность грубой ошибки при получении этой варианты.

Выскакивающую варианту необходимо исключить из всех последующих операций по статистической обработке.

2.2. Точечные оценки параметров распределения

При изготовлении каких-либо деталей при конструировании РЭС необходимо знать, удовлетворяют ли их параметры требованиям технологической точности. Для этого и служит оценка, которая характеризует истинное значение параметра в некоторой точке (точечная оценка) либо в интервале (доверительная оценка). Оценкой Θ_n случайной величины X по объему выборки n называется однозначно определенная функция результатов наблюдений над этой случайной величиной, и можно записать:

$$\hat{\Theta}_n = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

В практике обработки статистических данных оценивают математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*. Математическое ожидание - это центр группирования случайной величины и в общем случае определяется выражением

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

где f(x) - плотность распределения случайной величины. Дисперсия - это отклонение случайной величины от ее математического ожидания, определяется выражением

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \cdot$$

Чтобы приблизить с достаточной точностью значение случайной оценочной функции $f(x_1, x_2 ... x_n)$ к истинному значению параметра, эта функция должна по возможности обладать следующими свойствами: состоятельностью, несмещенностью и эффективностью.

Оценка Θ_n называется *состоятельной,* если с увеличением n - объема выборки она приближается (сходится по вероятности) к оцениваемому параметру Θ.

Несмещенной называется такая оценка, математическое ожидание от которого равно оцениваемому параметру: $M[\Theta_n] = \Theta$ т. е. она контролирует наличие систематической ошибки.

Эффективной оценкой называется такая несмещенная оценка, которая имеет наименьшую дисперсию всех несмещенных оценок параметра, вычисленных по выборкам одного и того же объема.

Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания μ случайной величины -X является арифметическое среднее *X* , вычисленное по *n* независимым наблюдениям над этой случайной величиной.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \tag{1}$$

где x_i - результат i-го наблюдения.

Эффективность этой оценки зависит от вида закона распределения случайной величины *X*. Если случайная величина распределена по нормальному закону (рис.1) с параметрами μ, σ^2 плотность нормального закона распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

то среднее арифметическое *X* имеет минимальную дисперсию, равную $\frac{\sigma^2}{n}$ и является эффективной оценкой математического ожидания μ.

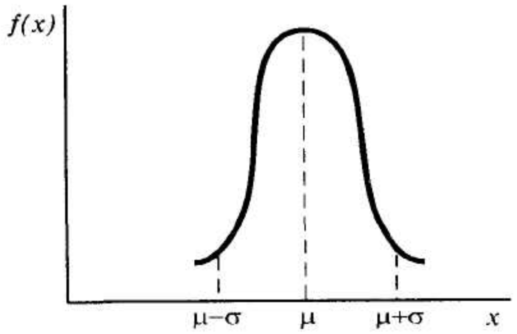


Рис.1

Состоятельная оценка дисперсии σ^2 определяется выражением:

$$\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \cdot \qquad (2)$$

Состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии является оценка:

$$\Delta_* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \cdot$$

(3)

Сравнивая оценки Δ и Δ_*, получаем:

$$\Delta_* = \frac{n}{n-1}\Delta \quad ,$$

(4)

величину $\frac{n}{n-1}$ называют поправкой Бесселя, а оценку Δ_* исправленной

выборочной дисперсией. Введение поправки Бесселя существенно лишь для малого объема выборки.

Оценка Δ_* не является эффективной, но с увеличением при нормальном законе распределения отношение ее дисперсии к минимально возможной приближается к единице и ее можно считать "'асимптотически эффективной".

Состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой дисперсии является:

$$\Delta_{**} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \qquad (5)$$

где μ - математическое ожидание случайной величины *X*. Из трех рассмотренных оценок дисперсии наиболее употребительна в практических расчетах оценка Δ_* (3), так как μ обычно неизвестно, и в этих условиях она предпочтительнее оценки Δ (2).

Среднее квадратическое отклонение σ как характеристика меры рассеяния случайной величины *X* относительно математического ожидания не менее часто используется на практике, чем дисперсия σ^2. Удобство этой характеристики заключается в том, что ее размерность равна размерности самой случайной величины *X*.

Несмещенная и состоятельная оценка среднеквадратического отклонения с учетом (3) имеет вид:

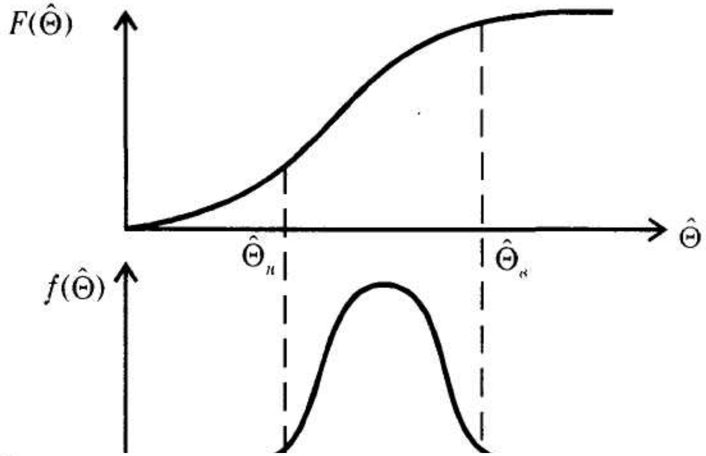
$$S = \sqrt{\Delta_*} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \qquad (6)$$

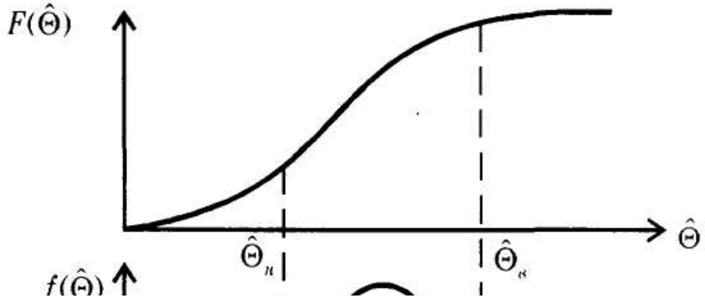
t

выб

кон
кач
слу

вер
это
дов
наз





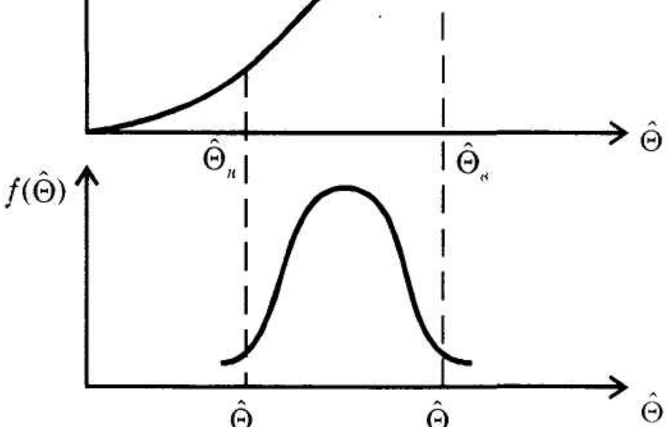


Рис.2

Здесь F(Θ) и f(Θ), соответственно, интегральная функция и плотность распределения оценки Θ. Площадь под кривой f(Θ), заключенная между верхней $\Theta_в$ и нижней $\Theta_н$ границами доверительного интервала, равна выбранному значению доверительной вероятности, т. е. вероятности того, что найденный доверительный интервал покрывает неизвестное нам истинное значение параметра. Сумма заштрихованных площадок равна уровню значимости *a*.

$$\int_{\Theta_н}^{\Theta_в} f(\hat{\Theta})d\hat{\Theta} = P; F(\hat{\Theta}_в) - F(\hat{\Theta}_н) = P$$

На рис.2 изображен двухсторонний доверительный интервал [$\Theta_н$ $\Theta_в$], относительно которого с заранее выбранной вероятностью *P* можно сказать, что внутри этого интервала находится истинное значение параметра, т. е.

$$P\{\hat{\Theta}_н < \Theta < \hat{\Theta}_в\} = P = 1 - \alpha$$

Во многих случаях целесообразно находить односторонний доверительный интервал: верхний или нижний, которые задаются в общем случае выражениями:

$$P\{\hat{\Theta}_н < \Theta\} = P; P\{\Theta < \hat{\Theta}_в\} = P$$

Принцип построения односторонних доверительных интервалов аналогичен изображенному на рис. 2, но заштрихованная площадка, равная *a,* располагается с одной стороны под кривой плотности распределения.

Функции доверительного интервала случайны, т. е. находятся по выборочным данным. Чем больше объем выборки, тем уже доверительный интервал для той же доверительной вероятности *P.* Чем больше выбранная вероятность, тем шире для той же самой выборки доверительный интервал.

Таким образом, зная выборочное распределение оценки, можно определить границы доверительного интервала $\Theta_н$ и $\Theta_в$ для выбранной доверительной вероятности *P*.

В математической статистике наиболее полно получены выборочные распределения оценок математического ожидания и дисперсии для нормально распределенной величины *X.* При этом выборочное распределение оценки *X* при известной генеральной дисперсии σ^2 является также нормальным, и поэтому доверительные интервалы здесь находятся с использованием нормального распределения.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии σ^2 генеральной совокупности

$$\left[\overline{X} - Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\right] \qquad (7)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности; *X* - оценка математического ожидания; *n* - объем выборки;

Z_p - такое значение аргумента функции Лапласа (табл. П2), при котором

$$\Phi(Z_p) = \frac{1}{2}P$$

Функция Лапласа определяет площадь под кривой нормального распределения случайной величины Z с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1, в промежутке от 0 до Z.

$$\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

В табл. П2 приведены значения Φ(Z) для значений Z от 0 до 2,94; Φ(+ ∞) =0,5.

На рис. 3 показан принцип построения двустороннего доверительного интервала и нижнего одностороннего доверительного интервала.

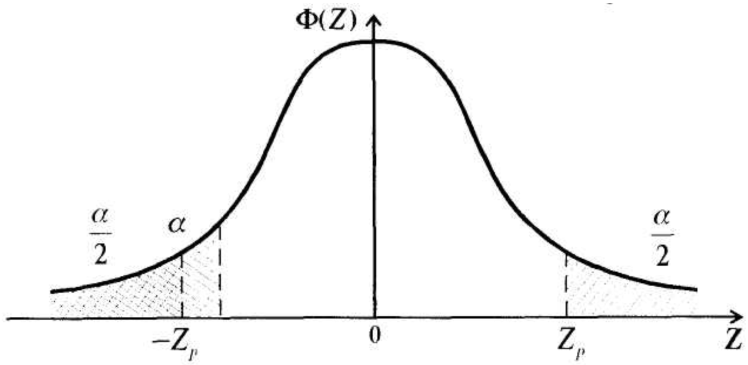


Рис.3

Как следует из рис. 3, для уровня значимости $\alpha = 1\text{-}P$ можно также записать, что

$$\Phi(Z_p) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}5 - \frac{\alpha}{2}$$

Верхний и нижний односторонние доверительные интервалы определяются, соответственно, выражениями,

$$\left[-\infty; \overline{X} + Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] и \left[\overline{X} - Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty\right]$$

При этом Z_p - такое значение аргумента функции Ф(Z) (табл. П2), при котором $\Phi(Z_p) = 0{,}5 - a$. Так как кривая нормального распределения симметрична, то при определении нижнего и двустороннего доверительного интервалов используют ту же таблицу, что и для определения верхнего интервала.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии σ^2 *генеральной совокупности равен:*

$$\left[\overline{X} - t_{k\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\Delta_*}{\sqrt{n}}}\right], \left[\overline{X} + t_{k\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\Delta_*}{\sqrt{n}}}\right]$$

где Δ^* - несмещенная состоятельная оценка дисперсии (3);

$t_{k,\frac{\alpha}{2}}$ - аргумент функции плотности распределения Стьюдента, находится по табл. П3 для заданного уровня значимости и числа степеней свободы *К*. *К=n-1*.

Кривая плотности распределения Стьюдента симметрична, поэтому односторонние доверительные интервалы находятся аналогично предыдущему случаю.

Для определения t_{ka} используется табл. П3.

'Принцип построения двустороннего и верхнего одностороннего доверительных интервалов поясняется на рис. 4, где $t_{ka/2}$ - критическая точка распределения Стьюдента при двустороннем ограничении, t_{ka} - при одностороннем.

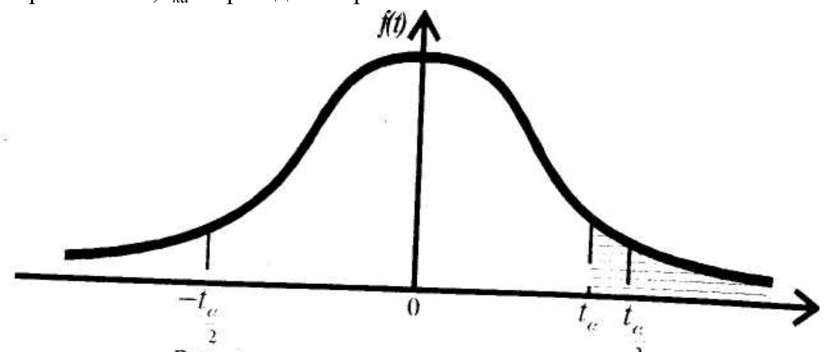


Рис. 4

Доверительные интервалы для дисперсии определяются с помощью распределения X^2 Пирсона, как для случая известного, так и неизвестного значений математического ожидания случайной величины *X*, расчетные формулы различаются здесь лишь числом степеней свободы и видом оценки дисперсии σ^2

Доверительный интервал для дисперсии при известном математическом ожидании μ *случайной величины X определяется выражением*

$$\left[\frac{n\Delta_{**}}{\chi_2^2}, \frac{n\Delta_{**}}{\chi_1^2}\right] \qquad (9)$$

где n - объем выборки;

Δ_{**} - состоятельная несмещенная и эффективная оценка дисперсии;

χ^2_2 χ^2_1 - аргументы функции плотности распределения Пирсона (табл. П4); площадь под кривой плотности, заключенная между точками χ^2_2 χ^2_1 равна выбранному значению доверительной вероятности *P*.

Кривая плотности распределения Пирсона показана на рис. 5 для числа степеней свободы К=1,2 и 6. При построении двустороннего доверительного интервала точки χ^2_2 χ^2_1, выбираются так, чтобы

$$P\{\chi^2 < \chi_1^2\} = P\{\chi^2 > \chi_2^2\} = \frac{\alpha}{2}$$

т. е. так, чтобы заштрихованные площадки на рис. 6 были одинаковы и равны α/2. Значения χ^2_2 χ^2_1 находятся по таблице для выбранной доверительной вероятности *P* и числа степеней свободы К=n.

Односторонний доверительный интервал определяется выражением:

$$\frac{n\Delta_{**}}{\chi_2^2} \text{ (нижний) и } \frac{n\Delta_{**}}{\chi_1^2} \text{ (верхний)}$$

где $P\{\chi^2 > \chi_2^2\} = \alpha \_ u \_ P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = 1-\alpha$

Принцип построения двустороннего и одностороннего доверительных интервалов показан на рис. 6.

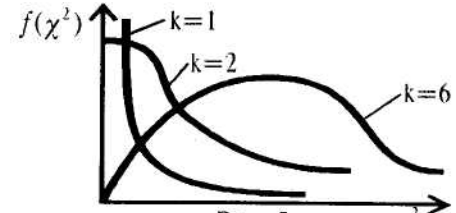


Рис. 5

Рис. 6

Доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании случайной величины X определяется выражением

$$\left[\frac{(n-1)\Delta_*}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)\Delta_*}{\chi_1^2}\right] \qquad (10)$$

где *n* - объем выборки;

Δ_* - состоятельная и несмещенная оценка дисперсии;

χ^2_2 χ^2_1 критические точки распределения Пирсона, находятся по таблице П4 для числа степеней свободы **k=n-1**

В большинстве практических случаев определяют верхний односторонний доверительный интервал для дисперсии, тем самым фиксируя верхнюю границу степени разброса исследуемого параметра с уровнем значимости *a.*

2.4 Примеры выполнения практических заданий

Задача I.

Найти двусторонний доверительный интервал для математического ожидания сопротивления резисторов по выборке: 102,3; 101,5; 92,8; 81,8; 71,4; 101; 104,2; 100,7; 102,8; 89,4; 109,7 Ом.

Известна дисперсия сопротивления резисторов σ^2 =28 Ом^2. Принять доверительную вероятность Р=0,98. Предварительно проверить выборку на выскакивающие варианты по уровню значимости *a* = 0,01.

Решение.

Проранжируем ряд:

71,4; 81,8; 89,4; 92,8; 100,7; 101; 101,5; 102,3; 102,8; 104,2; 109,7.

Как видно по вариационному ряду, подозреваемыми являются две наименьшие варианты.

Вычисляем отношение:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1} = \frac{89{,}4 - 71{,}4}{109{,}7 - 71{,}4} = 0{,}469$$

По уровню значимости *a* = 0,01 и объему выборки *n= 11* находим по табл. П1 табличное значение, равное 0,603. Полученное значение меньше табличного, т. е. нет оснований исключать наименьшие варианты.

Так как известна дисперсия генеральной совокупности σ^2 =28 Ом^2, то находим доверительный интервал для математического ожидания по формуле (7). Вычислим арифметическое среднее $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ X = 96,14. По значению функции Лапласа

$$\Phi(Z_p) = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}\cdot 0{,}98 = 0{,}49$$

в табл. П2 найдем аргумент функции Лапласа Z_p **=*0,24.*** Тогда доверительный интервал для математического ожидания получается:

[95,76; 96,52]

Ответ: генеральное среднее сопротивлений резисторов выпускаемой партии находится в интервале [92,43; 99,86] с вероятностью 0,98.

Задача 2.

Для 12 реле, случайным образом выбранных из партии, измерено напряжение срабатывания и вычислено среднее значение X = 27,4 В и состоятельная оценка дисперсии Δ = 7 В^2. Какова вероятность того, что выборочное среднее оценивает математическое ожидание напряжения срабатывания для всей партии с точностью ±4 В?

Решение.

Дисперсия генеральной совокупности неизвестна, поэтому для вычислений используем формулу (8). По условию задачи доверительный интервал для напряжения срабатывания реле находится в интервале **27,4** ± 4 В, т. е.

$$t_{\alpha,k}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} = 4$$

Вычислим состоятельную и несмещенную оценку среднеквадратического отклонения, используя формулы (4) и (6):

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}\Delta} = \sqrt{\frac{12}{12-1}7} = 2{,}7B$$

Найдем коэффициент Стьюдента

$$t_{\alpha,k} = \frac{4\sqrt{n}}{S} = \frac{4\sqrt{12}}{2{,}7} = 5{,}13$$

По табл. П3 по числу степеней свободы *k=n-l=l I* и коэффициенту

$t_{\alpha,k}$ **=5,13**

находим уровень значимости a = 0,0005.

По уровню значимости находим доверительную вероятность

P=1-α =0,9995.

Ответ: вероятность того, что выборочное среднее оценивает математическое ожидание напряжения срабатывания для всей партии с точностью ±4 В больше 0,9995.

Задача 3.

Определить доверительный интервал для дисперсии выходного напряжения микросхем по выборке:

2,41; 2,38; 2,39; 2,37; 2.43; 2.24; 2.27; 2.32; 2.30; 2.37 В.

Решение

Найдем состоятельную и несмещенную оценку дисперсии по формуле (3) предварительно вычислив среднее значение X = 2,35 .

Δ =0,016.

По числу степеней свободы К=9, и задавшись уровнем значимости α=0,05 по табл. П4 находим коэффиценты Пирсона χ^2_1 =3,33 для верхней границы доверительного интервала и χ^2_2 =16,9 для нижней границы.

Находим доверительный интервал для дисперсии по формуле (10), когда математическое ожидание неизвестно:

$$\left[\frac{9\cdot 0{,}016}{16{,}9}, \frac{9\cdot 0{,}016}{3{,}33}\right]$$

Ответ: дисперсия выходного напряжения микросхем находится в интервале [0,01; 0,041.

2.5 Варианты задании

Задача I.

Погрешность прибора оценивалась путем многократного измерения эталонной величины. Результата вычисленной абсолютной ошибки измерения занесены в табл. 1. После проверки выборки на грубые ошибки определить доверительный интервал, к котором находится математическое ожидание абсолютной погрешности прибора, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ = 0,1 . Принять доверительную вероятность Р=0,99.

Таблица 1

Варианты заданий	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,196	0,138	-0,147	0,007	0,152	0,017	-0,039	0,065	0,04	-0,227
2	0,013	0,004	-0,02	0,117	-0,061	-0,111	0,027	0,003	-0,015	0,036
3	0,114	-0,031	-0,11	0,039	0,065	-0,117	-0,18	0,016	0,141	0,125
4	-0,152	0,143	-0,134	0,005	0,161	0,013	-0,093	0,56	0,05	-0,272
5	0,031	0,174	-0,045	0,015	0,148	0,019	-0,067	0,034	-0,06	-0,196
6	-0,136	0,144	-0,056	0,013	0,148	-0,04	-0,05	-0,03	0,068	-0,131

Задача 2.

Измерен коэффициент передачи фильтра у 10 .экземпляров (табл. *2)* С какой вероятностью можно утверждать, что выборочное среднее оценивает математическое ожидание коэффициента передачи с точностью ±0,15. Предварительно проверить выборку на наличие ошибок.

Таблица2

Варианты заданий	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	0,88	0,76	0,79	0,81	0,74	0,77	0,79	0,62	0,83	0,89
8	0,24	0,75	0,83	0,75	0,65	0,89	0,76	0,78	0,86	0,78
9	0,37	0,84	0,62	0,69	0,81	0,75	0,89	0,92	0,66	0,81
10	0,79	0,85	0,68	0,8	0,75	0,81	0,73	0,82	0,74	0,75
11	0,84	0,79	0,73	0,67	0,71	0,75	0,81	0,61	0,8	0,91
12	0,98	0,54	0,63	0,74	0,88	0,79	0,89	0,74	0,61	0,65

Задача3

Из партии блокинг-генераторов взята выборка и измерены значения чистоты выходных импульсов. Результаты измерений сведены в табл. 3. Какова вероятность того, что верхняя граница одностороннего доверительного интервала для среднего квадратическое отклонения частоты не превысит 200 Гц? Предварительно проверить выборку на наличие резко отклоняющихся вариант.

Таблица3

ты i	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3070	3290	3136	3330	3283	3197	3257	3188	3279	3448
	3150	3165	3213	3420	3231	3256	3165	3314	3505	3417
	3100	3315	3212	3510	3221	3104	3310	3595	3014	3387
	3503	3195	3200	3325	3260	3180	3212	3158	3280	3420
	3010	3117	3150	3380	3160	3050	3260	3505	3237	3399
	3271	3210	3160	3500	3240	3147	3215	3190	3210	3675

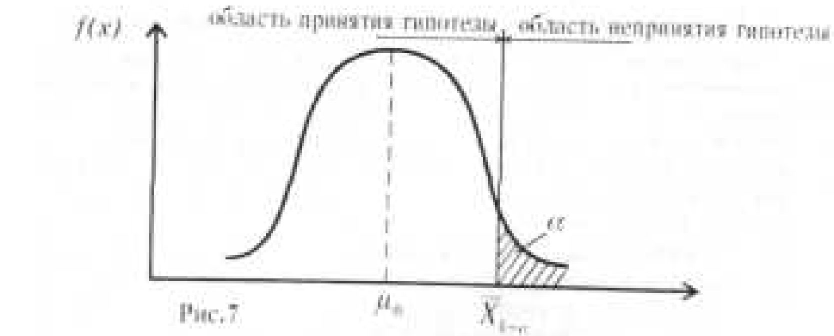
3 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

3.1 Постановка задачи проверки статистических гипотез

При сравнительном анализе конструкций или технологических процессов производства РЭС по точности и стабильности на основе выборочных данных возникает задача проверки статистических гипотез. Под статистическими понимаются такие гипотезы, в которых проверяются предположения, выдвинутые относительно каких-либо параметров закона распределения случайной величины, или относительно вида закона распределения случайной величины. Наибольшее применение в решении технических задач находят методы проверки статистических гипотез первого вида. При этом предполагается, что вид закона распределения сравниваемых величин одинаков, и особенности закона распределения каждой из них заключается в различиях значений параметров (математического ожидания, дисперсии). Эти различия отражают изменения в показателях качества конструкции или технологических процессов. Эти методы являются основой выборочного текущего и приемочного контроля качества продукции.

Рассмотрим, например, применение этих методов в текущем контроле стабильности технологического процесса производства резисторов. Пусть случайна величина X - значение сопротивления конкретного резистора, X - выборочное среднее, определенное по результатам выборы объема n ,μ_0 - требуемое номинальное значение сопротивления резистора, μ - неизвестное нам генеральное среднее в данной контролируемой партии резисторов.

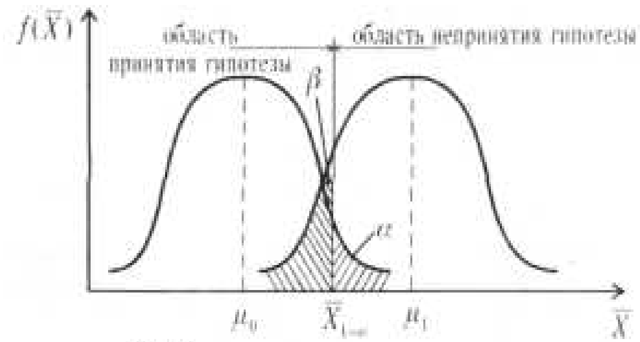
Задача заключается я том, чтобы установить, соответствуют ли изготавливаемые резисторы требуемому номинальному значению сопротивления, т. е. необходимо определить, можно ли считать, что $\mu = i\mu_0$, проверяя при этом не всю партию, а выборку объемом n. Вследствие разных причин, например, нарушений контролируемой партии может быть и не равно μ_0. Если вычисленное по выборке X незначительно отличается от μ_0 то предположение о совпадении μ и μ_0 можно считать оправданным. Необходимо установить, насколько велика может быть разность ($X — \mu_0$) чтобы гипотеза о совпадении μ и μ_0 была отвергнута как ложная. Предположим, что $M[X] = \mu = \mu_0$. назовем эту гипотезу нулевой и обозначим ее H_0 тогда наше предположение можно записать так: H_0: $\mu = \mu_0$. Если гипотеза H_0 верна, то $M_1[X] = \mu_0$ и плотность распределения выборочного среднего $f(x)$ имеет вид. показанный на рис. 7. Если гипотеза H_0 не верна, и в действительности $\mu>\mu_0$, т.е. верна так называемая конкурирующая гипотеза H_1: $\mu > \mu_0$ то плотность распределения выборочного среднего X будет расположена правее $f(x)$, представленной на рис. 7.



Рассуждая далее я предположении, что гипотеза H_o верна, мы можем найти вероятность того, что вычисленное по выборке X окажется больше, чем некоторое значение X_{1-a} . Эта вероятность равна

$$P\{\overline{X} > \overline{X}_{1-\alpha}\} = \int_{\overline{X}}^{\infty} f(\overline{X}) d\overline{X} = \alpha$$

и геометрически она определяется площадью, ограниченной кривой плотности распределения от X_{1-a} до $+\infty$. Здесь a - уровень значимости. Его выбирают малым числом (обычно 0.05; 0,01) с тем, чтобы можно было считать практически невозможным, что вычисленное по выборке X окажется больше X_{1-a}, когда верна гипотеза H_0. Таким образом, точка X_{1-a} определяет область непринятия гипотезы H_0. (рис. 7). Если X окажется меньше X_{1-a} , то можно считать, что гипотеза H_o:$\mu=\mu_0$ не противоречит выборочным данным. В противном случае гипотеза H_0 отвергается т.е. значение сопротивления резисторов контролируемой партии не соответствует требуемому номинальному значении. Вероятность принять ошибочное решение т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна, равна α. Эту ошибку называют *ошибкой первого рода.* Возможно ошибочное решение и другого вида - принятие гипотезы H_0, когда она не верна. Вероятность этой ошибки, называемой *ошибкой второго рода,* увеличивается с уменьшением α. Для оценки вероятности этой ошибки необходимо выдвинуть конкурирующую гипотезу H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$. Это возможно, когда по условиям опыта есть основания предложить альтернативное решение такого вида. На рис. 8 показаны кривые плотности распределения выборочного среднего X для случаев когда верна гипотеза H_o (сплошная ЛИНИЯ) и гипотеза H_1 (пунктирная линия). Для выбранного уровня значимости α области принятия гипотезы H_0 определены, как это показано на рис. 8.



Вероятность ошибки второго рода β, как следует из рис. 8, равна площади под кривой $f(X)$, когда верна H_1, от $— \infty$ до X_{1-a} Рассмотренные случаи можно свести в таблицу следующего вида:

Гипотеза	Верна	Неверна
Отвергается	Ошибка первого рода с вероятностью α	Правильное решение с вероятностью 1-β
Не отвергается	Правильное решение с вероятностью 1-α	Ошибка второго рода с вероятностью β

С увеличением разности $\mu_1 - \mu_0$ вероятность ошибки второго рода уменьшается. Как следует из рис. 8, при фиксированных значениях μ_1 *и* μ_0 стремление уменьшить вероятность ошибки другого вида. Для одновременного уменьшения α и β необходимо увеличивать объем выборки, что может оказаться либо невозможным, либо экономически нецелесообразным на практике.

Если конкурирующей гипотезой является гипотеза H_1; $\mu < \mu_0$ то области принятия и непринятия гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ будут расположены так, как показано на рис. 9.

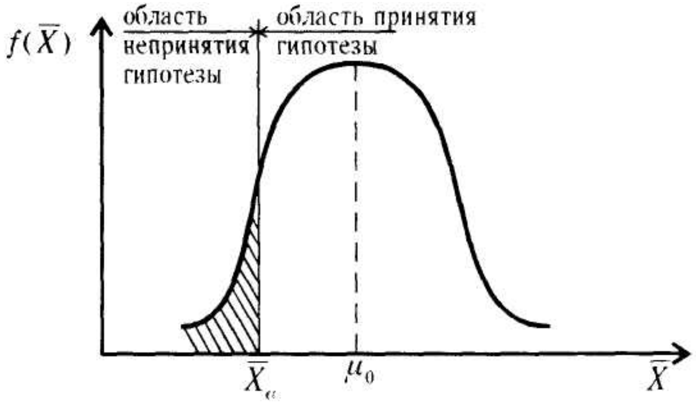


Рис.9

При конкурирующей гипотезе H_1: $\mu \neq \mu_0$ области принятия и непринятия гипотезы H_0. представлены на рис. 10.

Определение вида конкурирующей гипотезы зависит от конкретных условий решаемой задачи. Однако следует иметь в виду, что при прочих равных условиях односторонний критерий (рис. 9) предпочтительнее двустороннего (рис. 10), так как обладает меньшей вероятностью ошибки второго рода.

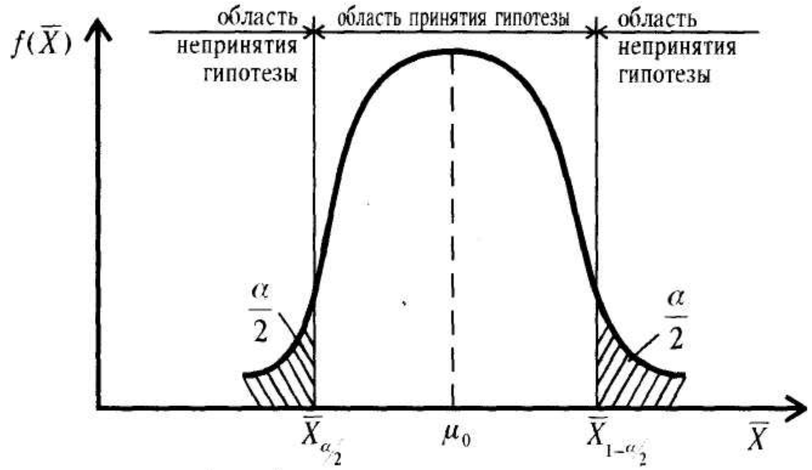


Рис.10

Итак, для проверки статистической гипотезы относительно какого-либо параметра закона распределения необходимо знать закон распределения этого параметра. Так как наиболее полно изучены выборочные распределения для нормально распределенных случайных величин, будем рассматривать методы проверки статистических гипотез для случайных величин с нормальным законом распределения.

3.2. Проверка гипотез о равенстве средних значений

Этот метод используется при сравнении средних в выборочном контроле качества изделий, изготовленных на разных установках, из различных партий сырья или при разных технологических режимах, при контроле стабильности технологического процесса, при проверке наличия систематического сдвига между показаниями приборов.

Пусть из генеральных совокупностей X_1 и X_2 извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2 по которым вычислены соответствующие выборочные средние X_1 и $X_г$. Если дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, то дополнительно вычисляются выборочные дисперсии Δ_{*1} и Δ_{*2}

Проверка гипотезы о равенстве средних, дисперсии которых известны, осуществляется по Z-критерию.

Для проверки нулевой гипотезы H_0:$M[X_1]=M[X_2]$ при заданном уровне значимости необходимо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (11)$$

и сравнить с табличным значением $Z_{табл}$ найденным по табл. П2 функции Лапласа из равенства $\Phi(Z_{табл}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{P}{2}$ для конкурирующей гипотезы H_1:M|X$_1$]≠M|X$_2$].

Если конкурирующая гипотеза имеет вид:

H_1: M[X_1] > M[X_2] или H_1: M[X_1] < M[X_2]

то в этих случаях табличное значение $Z_{табл}$ находят по таблице функции Лапласа

по формуле: $\Phi(Z_{табл}) = \frac{1-2\alpha}{2}$

Если $|Z_{табл}| < Z_{табл}$ то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.

Если $|Z_{табл}| > Z_{табл}$ нулевую гипотезу отвергают.

Проверка гипотезы о равенстве средних, дисперсии которых неизвестны осуществляется с использованием критерия Стьюдента.

Для проверки нулевой гипотезы H_0: M[X_1]=M[X_2] при заданном уровне значимости надо вычислить наблюдаемое значение t-критерия $t_{табл}$ по формуле

$$t_{набл} = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{(n_1-1)\Delta_{*1} + (n_2-1)\Delta_{*2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+2)}{n_1+n_2}} \qquad (12)$$

сравнить с табличным значением $t_{табл}$, найденным по таблице распределения Стьюдента (табл. П3) по уровню значимости (вдвое заданного при конкурирующей гипотезе H_1:M|X$_1$]≠M|X$_2$] и числу степеней свободы $K=n_г+n,-2$.

При конкурирующих гипотезах вида H_1: M[X_1] > M[X_2] или H_1: M[X_1] < M[X_2] табличное значение $t_{табл}$, находят по уровню значимости.

Если $|t_{табл}| < t_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.

Если $|t_{табл}| > t_{табл}$, то нулевую гипотезу отвергают.

3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий

При анализе точности измерении (одних и тех же физических величин), выполненных в различных условиях, например, различными измерительными приборами, возникает задача сравнения дисперсии.

Рассмотрим вначале для простоты две серии опытов. В каждой из них выделим выборки объемом n_1 и n_2 вычислим для них средние значения X_1 и X_2,. Поскольку точность измерении в этих сериях неизвестна, то для ее оценки по (3) вычислим эмпирические дисперсии Δ_{*1} и Δ_{*2} где $\Delta_{*1} > \Delta_{*2}$. При известных n_1 и n_2 для каждой из них определяют число степеней свободы $K_1=n_1-1$ и $K_2=n_2-1$. Полученных данных достаточно для решения вопроса о случайном или неслучайном отличии дисперсий. Для этого рассчитываем наблюдаемое значение критерия Фишера.

$$F_{набл} = \frac{\Delta_{*1}}{\Delta_{*2}} \qquad (13)$$

По таблице F - распределения (табл. П5) находим $F_{табл}$. по заданному уровню значимости a и числам степеней свободы K_1 и K_2 (K_1 - число степеней свободы большой исправленной выборочной дисперсии).

Если $F_{набл} < F_{табл}$ то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $F_{набл} > F_{табл}$ то нулевую гипотезу отвергают.

Если необходимо сравнить несколько дисперсий с определенным уровнем значимости a, то поступают следующим образом. В каждой из l серий измерений, осуществляемых, например, различными приборами, проводят одинаковое количество опытов я или берут из них выборки одинакового объема. Вычисляют число степеней свободы K. Для каждой серии по (3) подсчитывают эмпирические

$$\Delta_{*1}, \Delta_{*2}, ..., \Delta_{*c}, ..., \Delta_{*l} \, (i = 1,2,...,l; \Delta_{*1} > \Delta_{*2})$$

Далее наибольшую по абсолютной величине эмпирическую дисперсию Δ_{*1} сравнивают с суммой всех дисперсий по критерию Кохрена:

$$G_{набл} = \frac{\Delta_{*1}}{\Delta_{*1} + \Delta_{*2} + ... + \Delta_{*i} + ... + \Delta_{*l}} \qquad (14)$$

Задаваясь требуемым уровнем значимости в зависимости от l и K по табл. П6 находят критическое значение G-критерия.

Если $G_{набл} < G_{табл}$ то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $G_{набл} > G_{табл}$ то нулевую гипотезу отвергают.

3.4. Примеры выполнения практических заданий

ЗадачаI.

С какой вероятностью можно утверждать, что гипотеза о равенстве математических ожиданий емкости конденсаторов двух партии верна, если известны средние значения емкости в выборках: X_1=9880 пФ. X_2 =10100 пФ. Среднее квадратическое отклонение емкости одинаково и равно 500 пФ. Объемы выборок $n_1=30$ $n_2=25$.

Решение

Выдвигаем конкурирующую гипотезу H_1:M|X$_1$]≠M|X$_2$]. Вычислим наблюдаемое значение Z-критерия по формуле (11):

$$Z_{набл} = \frac{10100-9880}{\sqrt{\frac{500^2}{30}+\frac{500^2}{25}}} = 1{,}625$$

По вычисленному значении) Z_1 **=1,625** и по табл. П2 находим значение функции Лапласа Φ(Z)=0,4495. Зная, что *Φ(Z)=0,5P,* находим вероятность того, что емкость конденсаторов в двух партиях одинакова

P=2Φ(Z)=0,899

Ответ: вероятность того, что емкость конденсаторов в двух партиях одинакова, равна **0,899.**

Задача 2.

Для выборки объемом $n_1=10$ из партии блокинг-генераторов вычислены оценки математического ожидания и дисперсии X_1 =12,8 кГц, Δ_{*1} =0,11 кГц2 частоты импульсов. После испытания этой партии на воздействие влажности из партии извлечена выборка объемом n_2= 16, для которой также вычислены оценки X_2 =12,35 кГц, Δ_{*2}=0,07 кГц2. Проверить при уровне значимости α=0,05 гипотезу о равенстве математических ожиданий частоты импульсов блокинг-генераторов относительно конкурирующей гипотезы, заключающейся в том, что после испытаний частота импульсов уменьшилась.

Решение.

Конкурирующая гипотеза HI: M[X2]>M[X1]. Вычисляем наблюдаемое значение критерия Стьюдента по формуле (12):

$$t_{набл} = \frac{12{,}8-12{,}35}{\sqrt{(10-1)\cdot 0{,}11+(16-1)\cdot 0{,}07}}\sqrt{\frac{10\cdot 16\cdot(10+16-2)}{10+16}} = 4{,}01$$

По табл. П3 для уровня значимости α=0,05 и числу степеней свободы К= 10+16-2=24 находим табличное значение $t_{табл}$ =2,06.

$t_{набл} > t_{табл}$, таким образом, отвергается гипотеза о равенстве математических ожиданий и утверждается конкурирующая гипотеза, заключающаяся в том, что частота импульсов после испытаний блокинг-генераторов уменьшилась.

Задача 3.

Для сравнения точности пяти приборов произведено 6 измерений одной и той же величины каждым прибором. С доверительной вероятностью P=0,99 проверить гипотезу о том, что точность приборов одинакова, если состоятельные оценки дисперсий результатов измерений равны: 0,21; 0,35; 0,38; 0,65; 0,81.

Решение.

Выбираем максимальную оценку дисперсии Δ_{*max} =0.81. Вычисляем значение критерия Кохрена по формуле (14):

$$G_{набл} = \frac{0{,}81}{0{,}21+0{,}35+0{,}38+0{,}65+0{,}81} = 0{,}337$$

По числу степеней свободы К=6-1=5 и количеству приборов, на которых производились измерения *1=5* находим по табл. П6 значение G-критерия. $G_{табл}$ =0,588. Таким образом, $G_{набл} < G_{табл}$

Ответ: точность пяти приборов одинакова.

3.5. Варианты заданий

Задача 1.

Известна частота генератора цифрового частотомера до ремонта и после него. Данные измерений сведены в табл. 1. Среднее квадратическое отклонение частоты равно 90 Гц. Проверить гипотезу о том. что после ремонта существенно уменьшилась частота генератора цифрового частотомера.

Задача 2.

С какой вероятностью можно отвергнуть гипотезу о равенстве математических ожиданий длины деталей, изготавливаемых на разных технологических линиях, если известны результаты измерения этого параметра для выборок, взятых с каждой линии (табл. 2).

Задача 3.

Для контроля устойчивости технологического процесса производства изделий в течение смены было взято 10 выборок, каждая объемом 16 изделий. Вычислены состоятельные оценки дисперсии величины контролируемого параметра для каждой выборки (табл. 3). Можно ли с доверительной вероятностью P=0,95 утверждать, что технологический процесс устойчив?

Таблица1

Варианты заданий	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	1019	823	1031	1083	830	1104	1040	1033	1030	1050
	959	802	1106	886	970	845	933	915	1000	1100
2	1010	930	1045	1085	950	980	1050	1055	1035	1010
	990	925	1115	860	1000	950	975	925	1000	1000
3	1005	845	1055	1038	1083	1094	1025	1035	1067	1005
	825	900	989	895	1028	950	948	915	1095	1108
4	1025	1005	1087	1046	1095	1030	1005	1045	1090	1085
	900	850	1000	1000	905	885	950	975	1000	990
5	1085	1080	1010	1080	1055	1070	1010	1055	1080	1010
	895	1000	1000	950	930	985	845	900	875	900
6	1000	1030	1025	1085	1050	1030	1010	1000	1088	1040
	800	950	925	1010	1000	950	830	845	1005	1000

Таблица2

Варианты заданий	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	152	149	157	155	158	156	154	151		
	153	141	149	145	148	144	145	146	143	142
8	145	140	155	151	156	154	151	148		
	150	140	148	145	148	146	142	145	138	140
9	154	150	149	156	152	154	149	155		
	156	146	147	147	149	148	144	153	151	155
10	155	150	155	152	140	156	150	155		
	145	140	141	149	140	148	142	151	148	150
11	151	155	150	152	155	150	149	152		
	146	148	140	142	144	143	142	151	140	144
12	155	151	149	150	155	155	143	148		
	150	148	148	144	146	150	143	145	145	145

Таблица3

Варианты заданий	Результаты измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	2,5	2,3	1,9	2,1	1,8	1,9	1,7	2	2,2	2,1
14	2,3	2,1	1,7	1,5	2,9	2,5	1,8	2,4	1,9	2,2
15	2,1	2,5	2	1,9	2,1	2,3	2,1	1,8	1,7	2,2
16	2,8	2,4	2,3	1,9	2,2	2,1	2,6	1,9	2	2,3
17	2,5	2,7	2	2	1,8	2,4	2,7	1,5	1,8	2,0
18	2	2,2	2,1	1,7	1,6	2	2,4	1,9	2,3	2,5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., «Наука», 1976.
2. Ашмарин И. П. Быстрые методы статистической обработки и планирования эксперимента. ЛГУ, 1975.
3. Смирнов В. Н., Бунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.
4. Яншин А. А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА.

Таблица П1

Объем выборки	Уровень значимости					
	0,05			0,01		
	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$
	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$
3	0,941	1	1	0,998	1	1
4	0,765	0,955	0,967	0,889	0,991	0,992
5	0,642	0,807	0,845	0,78	0,916	0,929
6	0,56	0,689	0,736	0,698	0,805	0,836
7	0,507	0,61	0,661	0,637	0,74	0,778
8	0,468	0,554	0,607	0,59	0,683	0,71
9	0,437	0,512	0,565	0,555	0,635	0,667
10	0,412	0,477	0,531	0,527	0,597	0,632
11	0,392	0,45	0,504	0,502	0,566	0,603
12	0,376	0,428	0,481	0,482	0,541	0,579
15	0,338	0,381	0,43	0,438	0,486	0,522
20	0,3	0,334	0,372	0,391	0,43	0,464
24	0,281	0,309	0,347	0,367	0,4	0,434
30	0,26	0,283	0,322	0,341	0,369	0,402

Таблица П2

Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)	Z	Ф(Z)
1,6	0,4452	1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,62	0,4956
1,62	0,4474	1,96	0,475	2,3	0,4883	2,64	0,4959
1,64	0,4495	1,98	0,4751	2,32	0,4898	2,66	0,4961
1,66	0,4515	2	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963
1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,7	0,4965
1,7	0,4554	2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967
1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,4	0,4918	2,74	0,4969
1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971
1,76	0,4608	2,1	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973
1,78	0,4625	2,12	0,483	2,46	0,4931	2,8	0,4974
1,8	0,4648	2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,5	0,4938	2,84	0,4977

1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,86	0,4686	2,2	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,498
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,9	0,4981
1,9	0,4713	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,92	0,4726	2,26	0,4881	2,6	0,4953	2,94	0,4984

Таблица П3

Распределение Стьюдента. Значения t=f(k,P)

К	P				
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,61
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,859	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,86	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,25	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,16	2,65	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,14
15	1,753	2,131	2,602	2,497	4,073
16	1,746	2,12	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,85
25	1,708	2,06	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,75	3,646
35	1,689	2,03	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2	2,39	2,66	3,46
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,99	2,374	3,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,66	1,984	2,364	2,626	3,391
	1,645	1,96	2,326	2,576	3,291

Таблица П4

Критические значения x^2 при надежности и числе степеней свободы К

К								
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,9	16,9	18,5
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,3	18,9	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,02	14,07	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,24	14,68	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,44	15,99	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,63	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34	36,1

15	19,3	22,3	25	28,3	30,6	32,7	35,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32	34,2	37,1	39,3
17	21,6	24,8	27,6	31	33,4	35,7	38,6	40,8
18	22,8	26	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	25	24,8	31,4	35	37,6	40	43,1	45,3
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,7	45,9	48,3
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43	45,5	48,7	51,2
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,2	51,5	54,1
28	34	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,3	56,9
30	36,3	40,3	43,8	48	50,9	53,7	57,1	59,7

Таблица П5

	1	2	3	4	5	6	7
1	161	200	216	225	230	234	237
	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,36
	98,49	99,01	99,17	99,25	99,3	99,33	99,34
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88
	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09
	21,2	18	16,59	15,98	15,52	15,21	14,98
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21
	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,49	8,26
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19
9	5,12	4,46	3,86	3,63	3,48	3,37	3,28
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,8	5,62
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01
	9,85	7,2	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3	2,92
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66
	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,2	4,03
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,52
	8,1	5,85	4,94	4,43	4,1	3,87	3,71
	3,84	2,99	2,6	2,37	2,21	2,09	2,01
	6,64	4,6	3,78	3,32	3,02	2,8	2,64

Продолжение таблицы П5

	8	9	10	11	16	20	
1	239	241	242	243	246	248	254
	5981	6022	6056	6082	6169	6234	6366
2	19,37	19,38	19,39	19,4	19,43	19,44	19,5
	99,36	99,38	99,4	99,41	99,44	99,45	99,5
3	8,84	8,81	8,78	8,76	8,69	8,66	8,53
	17,49	27,34	27,23	27,13	26,83	26,69	26,12
4	6,04	6	5,96	5,93	5,84	5,8	5,63
	14,8	14,66	14,54	14,45	14,15	14,02	13,46
5	4,82	4,78	4,74	4,7	4,6	4,56	4,36
	10,27	10,15	10,05	9,96	9,68	9,55	9,02
6	4,15	4,1	4,06	4,03	3,92	3,87	3,67
	8,1	7,98	7,87	7,79	7,52	7,39	6,88
7	3,73	3,68	3,63	3,6	3,49	3,44	3,23

	6,84	6,71	6,62	6,54	6,27	6,15	6,65
8	3,44	3,39	3,34	3,31	3,2	3,15	2,93
	6,03	5,91	5,82	5,74	5,48	5,36	4,86
9	3,23	3,18	3,13	3,1	2,98	2,93	2,71
	5,47	5,35	5,26	5,18	4,92	4,8	4,31
10	3,07	3,02	2,97	2,94	2,82	3,77	2,54
	5,06	4,95	4,85	4,78	4,52	4,41	3,91
11	2,95	2,9	2,86	2,82	2,7	2,65	2,4
	4,74	4,63	4,54	4,46	4,21	4,1	3,6
12	2,85	2,8	2,76	2,72	2,6	2,54	2,3
	4,5	4,39	4,3	4,22	3,98	3,86	3,36
16	2,59	2,54	2,49	2,45	2,33	2,28	2,01
	3,89	3,78	3,49	3,61	3,37	3,25	2,75
20	2,45	2,4	2,35	2,31	2,18	2,12	1,84
	3,56	3,45	3,37	3,3	3,05	2,94	2,42
	1,94	1,88	1,83	1,79	1,64	1,57	1
	2,15	2,41	2,32	2,24	1,99	1,87	1,09

Таблица П6

Критические значения отношения G при доверительных вероятностях 0,95 и 0,99

	К								
	4	5	6	8	10	16	36	144	
5	0,544	0,507	0,478	0,439	0,412	0,365	0,307	0,251	0,2
	0,633	0,588	0,553	0,504	0,47	0,409	0,335	0,264	0,2
6	0,48	0,445	0,418	0,382	0,357	0,314	0,261	0,212	0,167
	0,564	0,52	0,487	0,44	0,408	0,353	0,286	0,223	0,167
7	0,431	0,397	0,373	0,338	0,315	0,276	0,228	0,183	0,143
	0,508	0,466	0,435	0,391	0,362	0,311	0,249	0,193	0,143
8	0,391	0,36	0,336	0,304	0,283	0,246	0,202	0,162	0,125
	0,463	0,427	0,393	0,352	0,325	0,278	0,221	0,17	0,125
9	0,358	0,329	0,307	0,277	0,257	0,223	0,182	0,145	0,111
	0,463	0,427	0,393	0,352	0,325	0,278	0,221	0,17	0,125
10	0,331	0,303	0,282	0,254	0,235	0,203	0,166	0,131	0,1
	0,393	0,357	0,331	0,295	0,27	0,22	0,181	0,138	0,1
15	0,242	0,22	0,203	0,182	0,167	0,143	0,114	0,089	0,067
	0,288	0,259	0,239	0,21	0,192	0,161	0,125	0,093	0,067
20	0,192	0,174	0,16	0,142	0,13	0,111	0,088	0,068	0,05
	0,229	0,205	0,188	0,165	0,15	0,125	0,096	0,071	0,05
30	0,138	0,124	0,114	0,1	0,092	0,077	0,06	0,046	0,033
	0,164	0,145	0,133	0,116	0,105	0,087	0,066	0,048	0,033
40	0,108	0,097	0,089	0,078	0,071	0,06	0,046	0,035	0,025
	0,128	0,114	0,103	0,09	0,082	0,067	0,05	0,036	0,025
60	0,077	0,068	0,062	0,055	0,05	0,041	0,041	0,032	0,017
	0,09	0,08	0,072	0,063	0,057	0,046	0,034	0,025	0,017
120	0,042	0,037	0,034	0,029	0,027	0,022	0,017	0,012	0,008
	0,049	0,043	0,039	0,033	0,03	0,024	0,018	0,013	0,008