

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Л.М. Савельев

ТЕОРИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Методические указания к практическим занятиям

по направлению 151600.68 – Прикладная механика
магистерская программа

"Прочность конструкций летательных аппаратов"

Самара 2013

Оглавление

Тема 1. «Изгиб круглых пластин».....	3
Тема 2. «Расчёт прямоугольных пластин».....	5
Тема 3. «Расчёт оболочек по безмоментной теории»	13
Тема 4. Расчёт цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении»	16

Тема 1. «Изгиб круглых пластин»

1.1. Требуется определить напряжения и деформации в диафрагме, предназначенной для измерения расхода жидкости (рисунок 1.1). Сопротивление, создаваемое диафрагмой при протекании жидкости, вызывает перепад давления, по величине которого можно судить о расходе.

Принять $b = 3a$; $h = \frac{a}{20}$; избыточное давление считать постоянным по плоскости диафрагмы.

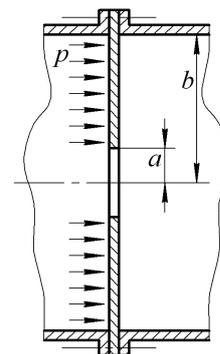


Рисунок 1.1

Выражения для изгиба имеет вид

$$w(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r + w^*(r)$$

где $w^*(r)$ – частное решение неоднородного уравнения изгиба; поскольку, $p = \text{const}$, то

$$w^*(r) = \frac{pr^4}{64D}.$$

Чтобы избежать действий с логарифмами размерных величин, перейдем к безразмерной координате ρ , положив

$$r = \rho a.$$

При $r = a$ и $r = b$ параметр ρ имеет значения 1 и 3 соответственно.

Выражение для w будет иметь тогда вид

$$w = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho + \frac{pa^4}{64D} \rho^4, \quad (1.1)$$

где C_i – новые произвольные постоянные.

Производные от w по ρ :

$$\frac{dw}{d\rho} = 2C_2 \rho + \frac{C_3}{\rho} + C_4 (2\rho \ln \rho + \rho) + \frac{pa^4}{16D} \rho^3; \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2w}{d^2\rho} = 2C_2 + \frac{C_3}{\rho^2} + C_4 (2 \ln \rho + 3) + \frac{3pa^4}{16D} \rho^2. \quad (1.3)$$

Выражения для силовых факторов получим следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right); \\
M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = \frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \mu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right); \\
Q &= -D \frac{d}{dr} \nabla^2 w = -\frac{D}{a^3} \frac{d}{d\rho} \nabla^2 w,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} = 4C_2 + 4C_4 (\ln \rho + 1) + \frac{pa^4}{4D} \rho^2.$$

Подставляя соотношения (1.2), (1.3) в формулы (1.4), находим

$$\begin{aligned}
M_r &= -\frac{D}{a^2} \left[2(1+\mu)C_2 - \frac{1-\mu}{\rho^2} C_3 + 2(1+\mu)C_4 \ln \rho + \right. \\
&\quad \left. + (3+\mu)C_4 + \frac{(3+\mu)pa^4}{16D} \rho^2 \right];
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
M_\theta &= -\frac{D}{a^2} \left[2(1+\mu)C_2 + \frac{1-\mu}{\rho^2} C_3 + 2(1+\mu)C_4 \ln \rho + \right. \\
&\quad \left. + (1+3\mu)C_4 + \frac{(1+3\mu)pa^4}{16D} \rho^2 \right];
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$Q = -\frac{D}{a^2} \left[\frac{4C_4}{\rho} + \frac{pa^4}{2D} \rho \right]. \tag{1.7}$$

Для определения произвольных постоянных имеем следующие условия:

$$\begin{aligned}
M_r|_{\rho=1} &= 0; \quad Q|_{\rho=1} = 0; \\
w|_{\rho=3} &= 0; \quad \frac{dw}{d\rho}|_{\rho=3} = 0.
\end{aligned}$$

Подстановка в них формул (1.1), (1.2), (1.5) и (1.7) приводит к уравнениям

$$2(1+\mu)C_2 - (1-\mu)C_3 + (3+\mu)C_4 + \frac{(3+\mu)pa^4}{16D} = 0;$$

$$4C_4 + \frac{pa^4}{2D} = 0;$$

$$C_1 + 9C_2 + C_3 \ln 3 + 9C_4 \ln 3 + \frac{81}{64} \frac{pa^4}{D} = 0;$$

$$6C_2 + \frac{C_3}{3} + C_4(6\ln 3 + 3) + \frac{27}{16} \frac{pa^4}{D} = 0.$$

Решая полученную систему при $\mu = 0,3$, находим

$$C_1 = 0,9994 \frac{pa^4}{D}; \quad C_2 = -0,05393 \frac{pa^4}{D};$$

$$C_3 = -0,4949 \frac{pa^4}{D}; \quad C_4 = -0,1250 \frac{pa^4}{D}.$$

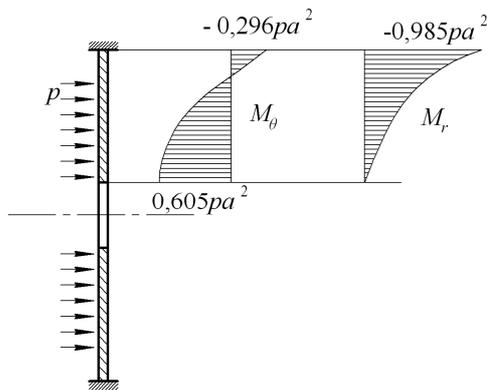


Рисунок 1.2

На рисунке 1.2 показан характер изменения изгибающих моментов M_r и M_θ вдоль радиуса пластинки. Как видим, наибольшие напряжения возникают у заделки, где

$$\sigma_{rr} = \pm \frac{M_r}{h^2} = \mp 5,91 \frac{pa^2}{h^2},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \pm \frac{6M_\theta}{h^2} = \mp 1,78 \frac{pa^2}{h^2}.$$

При $\frac{a}{h} = 20$ на растянутой стороне пластины

$$\sigma_{rr} = 2364p; \quad \sigma_{\theta\theta} = 712p.$$

Эквивалентное напряжение составит

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2} = 2101p.$$

Максимальный прогиб получается при этом равным

$$w_{\text{max}} = w|_{\rho=1} = 0,961 \frac{pa^4}{D} = 8,40 \cdot 10^4 \frac{pa}{E}.$$

Тема 2. «Расчёт прямоугольных пластин»

2.1. Найти прогиб прямоугольной пластины, жёстко заделанной по всем сторонам и нагруженной равномерным давлением (рисунок 2.1).

Для решения задачи воспользуемся методом Ритца. Прогиб будем искать в виде

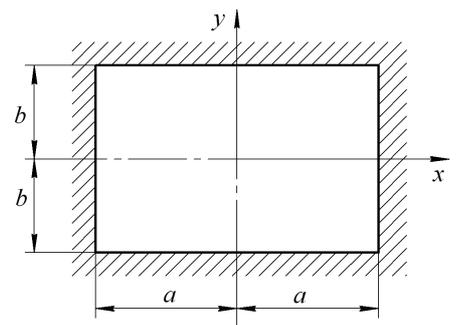


Рисунок 2.1

$$w = \sum a_i f_i(x, y),$$

где f_i – базисные функции, a_i – подлежащие отысканию коэффициенты. В качестве базисных можно взять функции

$$f_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2;$$

$$f_2 = (x^2 - a^2)^3 (y^2 - b^2)^2;$$

$$f_3 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^3;$$

$$f_4 = (x^2 - a^2)^3 (y^2 - b^2)^3 \dots$$

Все они удовлетворяют, как это и требуется в методе Ритца, кинематическим условиям

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm a;$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm b.$$

В первом приближении ограничимся одним членом:

$$w = A f_1(x, y) = A (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

Коэффициент A должен быть найден из условия минимума полной потенциальной энергии системы, которое приводит к уравнению

$$A a_{11} = b_1,$$

где

$$a_{11} = D \iint_S (\nabla^2 f_1)^2 dx dy; \quad b_1 = \iint_S p f_1 dx dy = p \iint_S f_1 dx dy,$$

где интегрирование ведётся по площади срединной поверхности пластины.

В нашем случае

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2(x^2 - a^2) \cdot 2x(y^2 - b^2)^2 = 4(x^3 - a^2 x)(y^2 - b^2)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 4(x^2 - a^2)^2 (3y^2 - b^2)^2.$$

Выражение для a_{11} может быть представлено в виде

$$a_{11} = 16D [Y_1(a)Y_2(b) + 2Y_3(a)Y_3(b) + Y_2(a)Y_1(b)],$$

где

$$Y_1(a) = \int_{-a}^a (3x^2 - a^2)^2 dx;$$

$$Y_2(a) = \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^4 dx;$$

$$Y_3(a) = \int_{-a}^a (3x^2 - a^2)(x^2 - a^2)^2 dx.$$

Вычислим эти интегралы:

$$Y_1(a) = \int_{-a}^a (9x^4 - 6x^2a^2 + a^4) dx = \left[9\frac{x^5}{5} - 6\frac{x^3}{3}a^2 + a^4x \right]_{-a}^a = \frac{8}{5}a^5;$$

$$Y_2(a) = \int_{-a}^a (x^8 - 4x^6a^2 + 6x^4a^4 - 4x^2a^6 + a^8) dx =$$

$$= \left[\frac{x^9}{9} - 4\frac{x^7}{7}a^2 + 6\frac{x^5}{5}a^4 - 4\frac{x^3}{3}a^6 + a^8x \right]_{-a}^a = \frac{256}{315}a^9.$$

$$Y_3(a) = \int_{-a}^a (3x^2 - a^2)(x^4 - 2x^2a^2 + a^4) dx =$$

$$= \int_{-a}^a (3x^6 - 7x^4a^2 + 5x^2a^4 - a^6) dx = -\frac{64}{105}a^7.$$

Кроме того,

$$\iint_S f_1 dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy = \frac{256}{225}a^5b^5.$$

Таким образом,

$$a_{11} = 16D \left(\frac{8}{5}a^5 \cdot \frac{256}{315}a^9 + 2\frac{64}{105}a^7 \cdot \frac{64}{105}b^7 + \frac{256}{315}a^9 \cdot \frac{8}{5}b^5 \right) =$$

$$= 16Da^5b^5 (1,300b^4 + 0,744a^2b^2 + 1,300a^4).$$

$$b_1 = \frac{256}{225}a^5b^5 p = 1,138pa^5b^5.$$

Приближённое решение, таким образом, получается в виде

$$w = \frac{1,138(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{16D(1,3b^4 + 0,744a^2b^2 + 1,3a^4)}.$$

В частном случае квадратной пластинки, когда $b = a$, максимальный прогиб оказывается равным

$$w_{\max} = w \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,0213 \frac{pa^4}{D}.$$

Точное решение этой же задачи даёт значение $w_{\max} = 0,0202 \frac{pa^4}{D}$, так что погрешность приближённого решения составляет в данном случае приблизительно 5%.

2.2. Прямоугольная пластина свободно опёрта по двум сторонам, жёстко заделана одной стороне; одна сторона свободна от закреплений. По свободной стороне действует погонная поперечная нагрузка постоянной интенсивности q (рисунок 2.2). Вычислить наибольший прогиб, пользуясь методом Рунца.

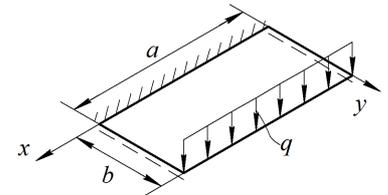


Рисунок 2.2

При выборе базисных функций необходимо удовлетворить геометрическим граничным условиям:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$w = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0 \quad \text{при } x = a.$$

Будем искомым прогиб искать в виде

$$w = Af_1(x, y) = AX(x)Y(y). \quad (2.1)$$

В качестве функции $X(x)$ можно взять функцию

$$X(x) = \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (2.2)$$

которая обеспечивает удовлетворение граничных условий при $x=0$ и при $x=a$, причём не только геометрических, но также и статических условий на этих краях:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad \text{и при } x=a.$$

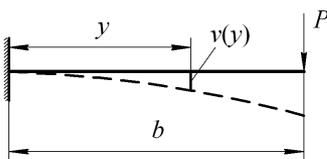


Рисунок 2.3

Для отыскания функции $Y(y)$ рассмотрим консольную балку длиной b , нагруженную силой на конце (рисунок 2.3). Дифференциальное уравнение изгиба балки при отсутствии распределённой нагрузки имеет вид

$$\frac{d^4 v}{dy^4} = 0.$$

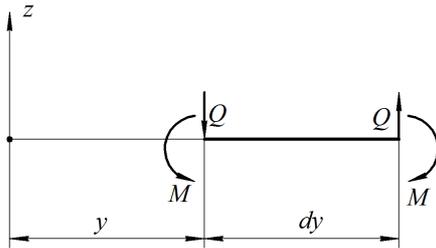


Рисунок 2.4

При этом изгибающий момент и перерезывающая сила в сечениях балки (рисунок 2.4) определяются по формулам

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dy^2}; \quad Q = -EI \frac{d^3 v}{dy^3},$$

где EI – изгибная жёсткость балки.

Решение уравнения изгиба

$$v = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3$$

нужно подчинить условиям на концах балки

$$v = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$M = 0; \quad Q = -P \quad \text{при } y = b.$$

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C_2 + 2C_3 y + 3C_4 y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2C_3 + 6C_4 y; \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 6C_4,$$

первые два условия дают значения

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0,$$

а последние два приводят к двум уравнениям относительно C_3 и C_4 :

$$2C_3 + 6C_4 b = 0$$

$$6C_4 = \frac{P}{EI}.$$

Отсюда находим

$$C_4 = \frac{P}{6EI}; \quad C_3 = -\frac{P}{2EI}.$$

Таким образом, изгиб консольной балки с силой на конце описывается функцией

$$v(y) = -\frac{P}{6EI} (3by^2 - y^3).$$

Это выражение и возьмём в качестве функции $Y(y)$. Опуская множитель $\frac{P}{6EI}$ со знаком минус (он включается в искомую постоянную A),

будем иметь

$$Y(y) = 3by^2 - y^3. \quad (2.3)$$

Постоянную A найдём из условия минимума полной энергии системы

$$Aa_{11} = b_1.$$

В данном случае потенциал внешних сил равен

$$\Pi = \int_0^a q w|_{y=b} dx,$$

что при $q = \text{const}$ порождает следующее выражение для b_1 :

$$b_1 = -qY(b) \int_0^a X(x) dx.$$

Подставляя сюда соотношения (2.2) и (2.3), найдём

$$b_1 = -q \cdot 2b^3 \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx = -\frac{4}{\pi} qab^3.$$

Поскольку пластина имеет незакреплённый край, при вычислении a_{11} следует исходить из общего выражения

$$a_{11} = D \iint_s \left\{ (\nabla^2 f_1)^2 + 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Учитывая (2.2), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2}{a^2} Y \sin \frac{\pi x}{a}; & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= Y'' \sin \frac{\pi x}{a}; \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\pi}{a} Y' \cos \frac{\pi x}{a}; & \nabla^2 f_1 &= \left(Y'' - \frac{\pi^2}{a^2} Y \right) \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}; \quad \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2},$$

для a_{11} будем иметь выражение

$$a_{11} = D \frac{a}{2} \int_0^b \left\{ \left(Y'' - \frac{\pi^2}{a^2} Y \right)^2 + 2(1-\mu) \left[-\frac{\pi^2}{a^2} Y Y'' - \frac{\pi^2}{a^2} Y'^2 \right] \right\} dy.$$

Подставим сюда выражение (2.3), а также формулы

$$Y' = 6by - 3y^2; \quad Y'' = 6(b - y).$$

Раскрыв скобки и выполнив интегрирование, можно прийти к следующему результату:

$$a_{11} = 6Dab^3\psi(\gamma),$$

где

$$\psi(\gamma) = 1 + \left(\frac{4}{5} - \mu\right)\pi^2\gamma^2 + \frac{11}{140}\pi^4\gamma^4;$$

через

$$\gamma = \frac{b}{a}$$

обозначено отношение сторон пластины.

Далее находим коэффициент A :

$$A = \frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{2q}{3\pi D\psi(\gamma)}.$$

Таким образом, приближённое выражение для прогиба пластины принимает вид

$$w(x, y) = -\frac{2q}{3\pi D\psi(\gamma)}Y^2(3b - y)\sin\frac{\pi x}{a}.$$

Максимальный прогиб

$$w_{\max} = w\left(\frac{a}{2}, b\right) = -\frac{4qb^3}{3\pi D\psi(\gamma)}.$$

В частности, при $a = b$ ($\gamma = 1$) имеем

$$w_{\max} = -0,0312\frac{qb^3}{D} = -0,341\frac{qb^3}{Eh^3}.$$

2.3. Выяснить условия закрепления и нагружения прямоугольной пластины со сторонами a и b (рисунок 2.5), если её прогиб изменяется по закону

$$w = Ax(x - a).$$

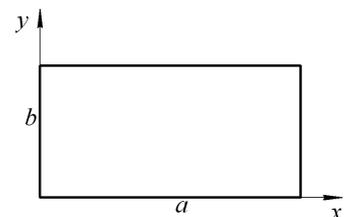


Рисунок 2.5

Прогиб должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$D\nabla^2\nabla^2w = p.$$

Так как

$$\nabla^2\nabla^2w = \frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{d^4w}{dx^2dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4} = 0,$$

приходим к выводу, что поверхностная нагрузка на пластину отсутствует.

Далее, $w=0$ при $x=0$ и при $x=a$. Это означает, что пластина имеет закрепление на сторонах $x=\text{const}$. Вычисляем углы наклона в направлении, перпендикулярном к этим сторонам:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A(2x - a).$$

Поскольку при $x=0$ или $x=a$ $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$, делаем заключение, что защемление на этих сторонах отсутствует. Учитывая также, что $w \neq 0$ при $y=0$ и при $y=b$, приходим к выводу, что пластина имеет свободное опирание по сторонам $x=0$ и $x=a$, а стороны $y=0$ и $y=b$ свободны от закреплений.

Остаётся выяснить какие нагрузки действуют по контуру пластинки.

Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2A; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0; \quad \nabla^2 w = 2a,$$

устанавливаем значения внутренних силовых факторов:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -2DA;$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -2\mu DA;$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = 0;$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = 0.$$

На сторонах $x=0$ и $x=a$ действуют погонные моменты m , равные по абсолютной величине $2DA$. На сторонах $y=0$ и $y=b$ приложены погонные моменты величиной $2\mu DA$ в направлении, перпендикулярном краю.

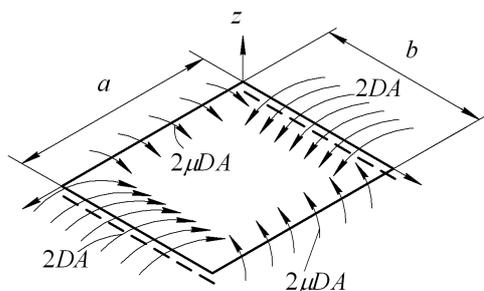


Рисунок 2.6

Учитывая принятые положительные направления для M_x и M_y , получаем изображённую на рисунке 2.5 картину нагружения пластины.

Тема 3. «Расчёт оболочек по безмоментной теории»

3.1. Составной сосуд, показанный на рисунке 3.1, заполнен жидкостью с плотностью ρ . Найти напряжения в точках A и B, пользуясь безмоментной теорией. Принять $H = 5r$; толщины стенок h на цилиндрическом и коническом участках одинаковы. Собственным весом конструкции пренебречь.

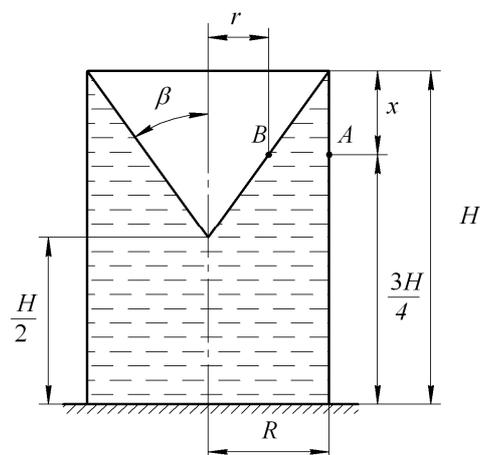


Рисунок 3.1

Для нахождения меридионального N_1 и окружного N_2 усилия в некоторой точке нужно воспользоваться уравнением равновесия отсечённой части оболочки

$$N_1 = \frac{\Phi}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} \quad (3.1)$$

и уравнением Лапласа

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_n. \quad (3.2)$$

Здесь R_1 , R_2 – первый и второй главные радиусы кривизны срединной поверхности; θ – гол между нормалью и осью вращения; p_n – нормальное давление в данной точке; Φ – результирующая внешних сил, действующих на отсечённую часть оболочки.

В частности, в точке A имеем

$$R_1 = \infty; \quad R_2 = R; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad p_n = \rho g x = \frac{\rho g H}{4}.$$

Проведём сечение в точке A, разрезав цилиндр по соответствующей окружности. При рассмотрении равновесия в отсечённую часть можно включать тот или иной объём жидкости, с тем чтобы максимально упростить вычисления. К собственно отсечённой части оболочки для точки A добавим объём жидкости, который показан на рисунке 3.2.

Найдём результирующую всех сил, действующих на выделенный участок оболочки с жидкостью. Давление p' , действующее на боковой поверхности объёма жидкости, не представляет для нас интереса, поскольку оно не даёт проекции на ось оболочки. Результирующая внешних сил,

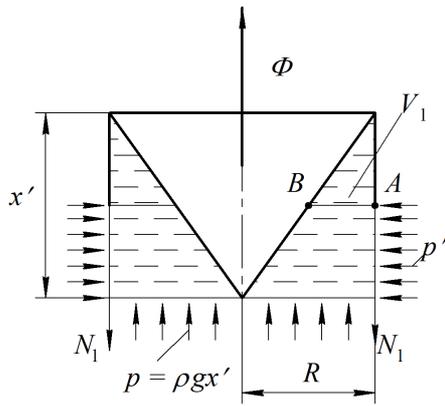


Рисунок 3.2

которую и должна уравнивать погонная сила N_1 , может быть подсчитана по формуле

$$\Phi = \pi R^2 p - \rho g V_1.$$

Здесь первое слагаемое есть результирующая внутреннего давления

$$p = \rho g x' = \rho g \frac{H}{2},$$

действующего по площади круга радиуса R . Эта составляющая имеет положительный знак,

поскольку требует уравнивания растягивающей силой N_1 .

Второе слагаемое есть вес того объема V_1 жидкости, который содержится в отсеченной части. Этот объем равен разности объемов цилиндра и конуса с основаниями радиуса R и высотой x'

$$V_1 = \pi R^2 x' - \frac{1}{3} \pi R^2 x' = \frac{2}{3} \pi R^2 x' = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Таким образом, находим

$$\Phi = \pi R^2 \rho g \frac{H}{2} - \rho g \frac{\pi R^2 H}{3} = \rho g \frac{\pi R^2 H}{6}.$$

Теперь по формуле (3.1) получаем

$$N_1 = \rho g \frac{\pi R^2 H}{6 \cdot 2\pi R} = \frac{\rho g R H}{12}.$$

Что касается окружного усилия N_2 , то из уравнения (3.2) сразу следует

$$N_2 = R_2 p_n = R \cdot \frac{\rho g H}{4} = \frac{\rho g R H}{4}.$$

Как видим, оба усилия N_1 и N_2 в точке A положительны, то есть растягивающие. Напряжения находим, разделив усилия на толщину оболочки h :

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h} = \frac{\rho g R H}{12h}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h} = \frac{\rho g R H}{4h}.$$

Далее переходим к расчёту усилий в точке B (рисунок 3.3). Здесь имеем

$$R_1 = \infty; \quad R_2 = \frac{r}{\cos \beta};$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta; \quad p_n = \rho g x = \frac{\rho g H}{4}.$$

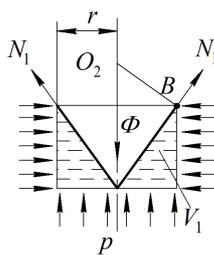


Рисунок 3.3

Из геометрии оболочки (см. рисунок 3.1) следует, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{H/4} = \frac{4R}{H}.$$

Следовательно,

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16R^2}{H^2}}}.$$

Радиус r параллельной окружности в точке B , очевидно,

$$r = \frac{R}{2}.$$

При записи условия равновесия отсечённой части для точки B включим в рассмотрение объём жидкости, показанный на рисунке 3.3. Величина Φ в этом случае будет равна

$$\Phi = \rho g V_2 - \pi r^2 p.$$

Здесь $p = \rho g H / 2$ – найденное ранее давление, а

$$V_2 = \pi r^2 x_0 - \frac{1}{3} \pi r^2 x_0.$$

Учитывая, что $x_0 = \frac{3}{4} H - \frac{H}{2} = \frac{H}{4}$, получим

$$V_2 = \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \frac{H}{4} - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \frac{H}{4} = \frac{\pi R^2 H}{24}.$$

Таким образом,

$$\Phi = \rho g \frac{\pi R^2 H}{24} - \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \frac{\rho g H}{2} = -\rho g \frac{\pi R^2 H}{12}.$$

По формуле (3.1)

$$N_1 = -\rho g \frac{\pi R^2 H}{12 \cdot 2\pi r \cos \beta} = -\rho g \frac{R^2 H}{12R \cos \beta} = -\frac{\rho g R H}{12 \cos \beta}.$$

Из уравнения (3.2) выводим также

$$N_2 = R_2 p_n = \frac{r}{\cos \beta} \cdot \frac{\rho g H}{4} = \frac{\rho g R H}{8 \cos \beta}.$$

Напряжения в точке B

$$\sigma_{11} = -\frac{\rho g R H}{12h \cos \beta}; \quad \sigma_{22} = \frac{\rho g R H}{8h \cos \beta}.$$

Как видим, в точке B окружные напряжения растягивающие, а меридиональные сжимающие.

Тема 4. Расчёт цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении»

4.1. Выполнить расчёт цилиндра, нагруженного в некотором сечении кольцевой радиальной нагрузкой q (рисунок 4.1).

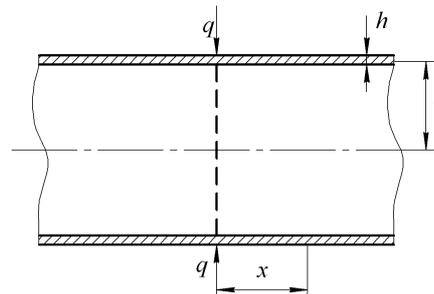


Рисунок 4.1

Рассматривая правую половину оболочки, будем отсчитывать координату x от нагруженного сечения вправо. Поскольку осевая сила $N_1 = 0$ и нормальное давление

$p_n = 0$, то $w^* = 0$, и выражение прогиба на правой половине оболочки берём в виде

$$w = C_1 f_1 + C_2 f_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

$$f_1 = e^{-\beta x} \sin \beta x; \quad f_2 = e^{-\beta x} \cos \beta x.$$

При этом

$$\vartheta = \frac{dw}{dx} = \beta [C_1(-f_1 + f_2) - C_2(f_1 + f_2)];$$

$$N_2 = \frac{Eh}{R}(C_1 f_1 + C_2 f_2);$$

$$M_1 = D\beta^2(C_1 f_2 - C_2 f_1);$$

$$M_2 = \mu M_1;$$

$$Q = -D\beta^3 [C_1(f_1 + f_2) + C_2(-f_1 + f_2)].$$

В приведённых формулах

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Граничные условия вытекают из соображений симметрии:

$$\vartheta|_{x=0} = 0; \quad Q|_{x=0} = \frac{q}{2}.$$

Учитывая, что $f_1|_{x=0} = 0$; $f_2|_{x=0} = 1$, получаем следующие уравнения относительно C_1 и C_2 :

$$\beta(C_1 - C_2) = 0;$$

$$-D\beta^3(C_1 + C_2) = \frac{q}{2}.$$

Отсюда находим

$$C_1 = C_2 = -\frac{q}{4D\beta^3}.$$

Для расчётных величин будем иметь

$$w = -\frac{q}{4D\beta^3}(f_1 + f_2) = \frac{q\beta}{Eh}e^{-\beta x}(\sin \beta x + \cos \beta x);$$

$$N_2 = -q\beta R e^{-\beta x}(\sin \beta x + \cos \beta x);$$

$$M_1 = -\frac{q}{4\beta}e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x).$$

Графики изменения w , N_2 , и M_1 по длине оболочки показаны на рисунке 4.2 применительно к случаю $R = 100h$ ($\mu = 0,3$).

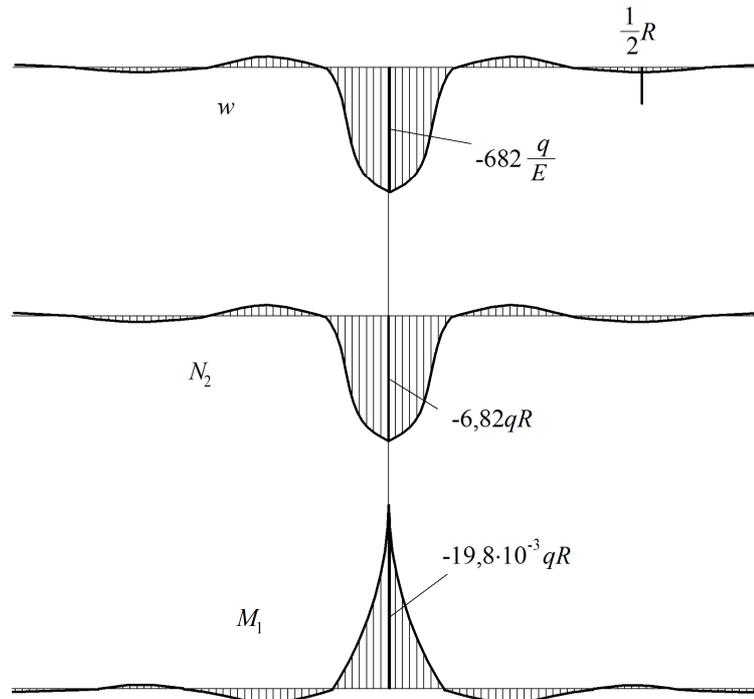


Рисунок 4.2