МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)»

Теория случайных процессов. Сборник задач

Электронные методические указания к практическим занятиям

Самара 2011

УДК 519.21

Составитель: **Храмов Александр Григорьевич**

Теория случайных процессов. Сборник задач [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания к практ. занятиям / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-т); сост. А.Г. Храмов. – Электрон. текстовые дан. (0,18 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Темы задач: терминология и основные понятия случайных процессов, вероятностные распределения и моментные функции, процессы с независимыми приращениями, стационарные в широком смысле процессы и их корреляционные и спектральные характеристики, цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова.

Сборник задач предназначен для проведения практических занятий при подготовке бакалавров по направлению 010400.62 *«Прикладная математика и информатика»*, изучающих дисциплину *«Теория случайных процессов»* в 5 и 6 семестрах.

Разработан на кафедре технической кибернетики.

Содержание

1 Определение случайных процессов. Моментные функции

1.1 Определение и вероятностные распределения

1.1.1 Найти двумерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$, если случайные величины α и β независимы и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а ω - детерминированная величина.

1.1.2 Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)=\alpha\sin\omega t$, если случайная величина α имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, а ω - детерминированная величина.

1.1.3 Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)=\sin(\omega t+\varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$, а ω - детерминированная величина.

1.1.4 Найти одномерное и двумерное распределения случайного процесса $\eta(t)=(-1)^{\xi(t)}$, где $\xi(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ.

1.1.5 Записать двумерную плотность распределения $f_w(t,s,x,y)$ Винеровского случайного процесса $w(t)$.

1.1.6 Записать одномерный ряд распределения $p_\pi(t,k)=\Pr\{\pi(t)=k\}$ пуассоновского процесса $\pi(t)$.

1.1.7 Записать двумерный ряд распределения $p_\pi(t,s,k,m)=\Pr\{\pi(t)=k,\pi(s)=m\}$ пуассоновского процесса $\pi(t)$.

1.2 Моментные функции случайных процессов

1.2.1 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$, если случайные величины α и β независимы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, а ω - детерминированная величина.

1.2.2 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos(\omega t+\varphi)$, если случайные величины α и φ независимы и распределены равномерно на отрезках $[-A,A]$ и $[-\pi,\pi]$ соответственно, ω - детерминированная величина.

1.2.3 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos(\omega t+\varphi)$, если случайная величина α распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Случайные величины α и φ независимы, ω - детерминированная величина.

1.2.4 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos(\omega t)$, если случайные величины α и ω независимы и распределены равномерно на отрезках $[-A,A]$ и $[-\Omega,\Omega]$ соответственно.

1.2.5 Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, если случайные величины ω и φ независимы и распределены равномерно соответственно на отрезках $[-\Omega, \Omega]$ и $[-\pi, \pi]$.

1.2.6 Найти моментные функции случайного процесса $Y(t) = (-1)^{X(t)}$, где $X(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ.

1.2.7 Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t), T > 0$, где $\xi(t)$ - винеровский процесс с параметром σ^2.

1.2.8 Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t), T > 0$, где $\xi(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ.

1.2.9 Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) + \xi(t), T > 0$, где $\xi(t)$ - винеровский процесс с параметром σ^2.

1.2.10 Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t) = \sin \xi(t)$, где $\xi(t)$ - винеровский процесс с параметром $\sigma^2 = 1$.

1.2.11 Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t) = \cos \xi(t)$, если $\xi(t)$ - винеровский процесс.

1.2.12 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса $\eta(t) = \exp[i\xi(t)]$, если $\xi(t)$ - винеровский процесс с параметром $\sigma^2 = 1$.

1.2.13 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса $\xi(t) = X \exp(i\omega t) + Y \exp(-i\omega t)$, если комплексные случайные величины X и Y независимы, имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, а ω - детерминированная величина.

1.2.14 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса $\xi(t) = X(t) + iY(t)$, если вещественные случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ независимы и являются стационарными в широком смысле с корреляционными функциями $R_X(\tau)$ и $R_Y(\tau)$ соответственно.

1.2.15 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$, если случайные величины α и φ независимы и распределены равномерно на отрезках $[-A, A]$ и $[-\pi, \pi]$ соответственно, ω - детерминированная величина.

1.2.16 Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$, если случайная величина α распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m дисперсией σ^2, а случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Случайные величины α и φ независимы, ω - детерминированная величина.

1.2.17 Является ли стационарным в узком смысле случайный процесс $\eta(t) = \exp(\xi(t))$, если $\xi(t)$ - стационарный в узком смысле случайный процесс?

1.2.18 Пусть $\xi(t)$ - пуассоновский процесс. Является ли процесс $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t), T > 0$ стационарным в широком смысле?

1.2.19 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $Z_t = X_t + Y_t$, если X_t и Y_t - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

1.2.20 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\xi(t) = \sin \omega t$, если случайная величина ω распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$?

1.2.21 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t),\ T > 0$, если $\xi(t)$ - пуассоновский процесс?

1.2.22 Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t),\ T > 0$.

1.2.23 Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t) = \xi(t+T) + \xi(t),\ T > 0$.

1.2.24 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $Z_t = X_t Y_t$, если X_t и Y_t - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

1.3 Ортогональное разложение случайных процессов

1.3.1 Записать разложение Карунена-Лоэва винеровского процесса $\xi(t)$ с параметром $\sigma^2 = 1$ на отрезке [0;1].

1.3.2 Записать ортогональное разложение на отрезке [0;1] стационарного случайного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|)$.

1.3.3 Записать разложение Карунена-Лоэва стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и треугольной корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \begin{cases} (1-|\tau|), & |\tau| \le 1; \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases}$ на отрезке $t \in [-1, 1]$.

1.3.4 Какое минимальное количество членов надо взять в разложении Карунена-Лоэва винеровского процесса $\xi(t)$ с параметром $\sigma^2 = 1$ на отрезке [0;1], чтобы обеспечить 10-процентную относительную интегральную среднюю квадратичную погрешность аппроксимации?

1.3.5 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \cos(\tau)$ на отрезке $t \in [0, \pi]$.

1.3.6 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \cos(\tau)$ на отрезке $t \in [-\pi, \pi]$.

1.3.7 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|)$ на отрезке $t \in [0, 1]$.

2 СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

2.1 Определение стационарности и моментные функции

2.1.1 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\xi(t)=\sin\omega t$, если случайная величина ω распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$?

2.1.2 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\eta(t)=\xi(t+T)-\xi(t),\ T>0$, если $\xi(t)$ - пуассоновский процесс? Найти корреляционную функцию процесса $\eta(t)$.

2.1.3 Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)$. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t)=\xi(t+T)-\xi(t),\ T>0$.

2.1.4 Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)$. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t)=\xi(t+T)+\xi(t),\ T>0$.

2.1.5 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $Z_t=X_tY_t$, если X_t и Y_t - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

2.1.6 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $Z_t=X_t+Y_t$, если X_t и Y_t - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

2.1.7 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $Y_t=\exp(X_t)$, если X_t - стационарный в узком смысле случайный процесс?

2.1.8 Является ли стационарным в узком смысле случайный процесс $Y_t=\exp(X_t)$, если X_t - стационарный в узком смысле случайный процесс?

2.1.9 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса $\eta(t)=\exp[i\xi(t)]$, если $\xi(t)$ - стационарный вещественный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)=\exp(-|\tau|)$.

2.2 Спектральная плотность мощности

2.2.1 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет спектральную плотность мощности $S_X(\omega)$. Найти спектральную плотность мощности $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y_t=X_{t+T}-X_t,\ T>0$.

2.2.2 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет корреляционную функцию $R_X(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$. Найти спектральную плотность стационарного в широком смысле случайного процесса $Y_t=X_{t+T}-X_t,\ T>0$.

2.2.3 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет корреляционную функцию $R_X(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\cos(\beta\tau)$. Найти спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.4 При каких значениях параметров α и β функция $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}(1+\beta|\tau|)$ является корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса X_t?

2.2.5 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет корреляционную функцию $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Найти спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.6 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет корреляционную функцию $R_X(\tau)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), |\tau|\le T;\\ 0, |\tau|>T\end{cases}$. Найти и изобразить графически спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.7 Доказать, что не существует стационарного в широком смысле случайного процесса X_t с корреляционной функцией $R_X(\tau)=\begin{cases}1, |\tau|\le T;\\ 0, |\tau|>T\end{cases}$.

2.2.8 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет спектральную плотность мощности $S_X(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|\le \Omega;\\ 0, |\omega|>\Omega\end{cases}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию этого случайного процесса.

2.2.9 Стационарный в широком смысле случайный процесс X_t имеет спектральную плотность мощности $S_X(\omega)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\omega|}{\Omega}\right), |\omega|\le \Omega;\\ 0, |\omega|>\Omega\end{cases}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию этого случайного процесса.

2.3 Эргодические случайные процессы

2.3.1 Является ли эргодическим по математическому ожиданию случайный процесс $\xi(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t$, если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, а ω - детерминированная величина?

2.3.2 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс $\xi(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t$, если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, а ω - детерминированная величина?

2.3.3 Удовлетворяет ли закону больших чисел случайный процесс $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а ω – детерминированная величина?

2.3.4 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а ω - детерминированная величина?

2.3.5 Является ли эргодическим по математическому ожиданию случайный процесс $\xi(t) = X \sin(\omega t)$, если случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$, а ω - детерминированная величина?

2.3.6 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс $\xi(t) = X \sin(\omega t)$, если случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$, а ω - детерминированная величина?

3 МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

3.1 Цепи Маркова с дискретным временем

3.1.1 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Чему равна средняя продолжительность игры, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и ста ставкам?

3.1.2 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Найти вероятность завершения игры до пятого бросания монеты включительно, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и трём ставкам?

3.1.3 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Найти вероятность выигрыша каждого из игроков, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и девяти ставкам?

3.1.4 Цепь Маркова с дискретным временем имеет два состояния. Вероятности переходов равны *1/2* и *1/3*. Найти предельные вероятности стационарного состояния.

3.1.5 В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица смещается на единицу вправо или влево с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(n)$ (координата частицы в момент времени $n=0,1,2,3,\ldots$).

3.1.6 В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица смещается на единицу вправо или влево с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Найти вероятность нахождения частицы в точке $k=0,\pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots$ в произвольный момент времени $n=0,1,2,3,\ldots$.

3.1.7 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Каковы должны быть вероятности выигрыша партии каждым из игроков, чтобы вероятности банкротства каждого из игроков были одинаковы, если начальный капитал первого игрока составляет один рубль, а начальный капитал второго игрока составляет два рубля?

3.1.8 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком в два раза выше вероятности выигрыша партии вторым игроком. Вероятность банкротства которого из игроков выше, если начальный капитал второго игрока в два раза выше начального капитала первого игрока?

3.1.9 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком в два раза выше вероятности выигрыша партии вторым игроком. Найти среднюю продолжительность игры, если начальные капиталы каждого из игроков равны пяти рублям?

3.1.10 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Каковы должны быть вероятности выигрыша партии каждым из игроков, чтобы вероятности банкротства каждого из игроков были одинаковы, если начальный капитал первого игрока составляет один рубль, а начальный капитал второго игрока составляет два рубля?

3.1.11 Найти среднюю продолжительность игры при игре с бесконечно богатым соперником, если вероятность выигрыша каждой партии равна *0,49*, а начальный капитал игрока составляет *10* единиц.

3.1.12 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна *1/2*, вторым – *1/3*. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятность того, что дуэль закончится не более чем за шесть выстрелов.

3.1.13 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна *1/2*, вторым – *1/3*. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятности поражения каждого из соперников.

3.1.14 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна *1/2*, вторым – *1/3*. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти среднюю продолжительность дуэли.

3.1.15 Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки ***3 x 3*** на один шаг во всех допустимых горизонтальных и вертикальных направлениях с одинаковой вероятностью. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.

3.1.16 Частица совершает случайное блуждание в пространстве, перемещаясь по узлам решетки ***3 x 3 x 3*** на один шаг во всех допустимых направлениях с одинаковой вероятностью. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.

3.1.17 Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки ***3 x 3*** на один шаг во всех допустимых горизонтальных и вертикальных направлениях с равной вероятностью. Угловые положения являются поглощающими. В начальный момент времени частица находится в центре. Найти вероятность поглощения частицы до шестого шага включительно и математическое ожидание числа шагов до поглощения.

3.1.18 Частица совершает случайное блуждание в пространстве, перемещаясь на каждом шаге из центра куба в одну из вершин куба с одинаковыми вероятностями или из вершин куба в центр куба. Найти предельную вероятность нахождения частицы в центре куба.

3.1.19 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания каждым дуэлянтом в соперника при каждом выстреле равна $\boldsymbol{p}$. Дуэль продолжается до первого попадания. При какой вероятности $\boldsymbol{p}$ средняя продолжительность дуэли будет равна четырем выстрелам?

3.2 Цепи Маркова с непрерывным временем

3.2.1 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью $2c^{-1}$. Среднее время обслуживания заявки – *1с*. Если при поступлении заявки все линии заняты, то заявка теряется. Найти вероятности стационарного состояния (вероятность занятости ровно m линий обслуживания).

3.2.2 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки равно T. Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти соотношение между параметрами λ и T, при котором вероятность занятости линии обслуживания в стационарном состоянии равна *1/2*.

3.2.3 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки равно T. Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти вероятность потери заявки в стационарном состоянии.

3.2.4 Сколько мест должно быть на автомобильной парковке, чтобы вероятность её полного заполнения была не больше ***0,1***. Автомобили прибывают на парковку с интенсивностью *10 штук* в час, среднее время парковки равно *12 минутам*.

3.2.5 Найти вероятностное распределение времени ожидания <u>*второго*</u> события в простейшем потоке событий.

3.2.6 Однородная цепь Маркова с непрерывным временем имеет три состояния. Интенсивности перехода из первого состояния во второе и из второго состояния в третье равны λ. В начальный момент времени цепь Маркова находится в первом состоянии. Найти и изобразить графически вероятность нахождения цепи Маркова во втором состоянии в произвольный момент времени $\boldsymbol{t}$.

3.2.7 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки на каждой линии равно $\boldsymbol{T}$. Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятности занятости каждой линии в стационарном состоянии.

3.2.8 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки на первой линии равно $\boldsymbol{T}$. Среднее время обслуживания заявки на второй линии равно $\boldsymbol{2T}$. Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятность потери заявки в стационарном состоянии.

3.2.9 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки равно $\boldsymbol{T}$. Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти соотношение между параметрами λ и $\boldsymbol{T}$, при котором вероятность занятости линии обслуживания в стационарном состоянии равна $\boldsymbol{p}$.

3.2.10 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается из точки с координатой $\boldsymbol{0}$ в точку с координатой $\boldsymbol{1}$ или из точки с координатой $\boldsymbol{1}$ в точку с координатой $\boldsymbol{0}$. В начальный момент времени частица находится в точке с координатой $\boldsymbol{0}$. Пусть $\xi(t)$ - координата частицы в момент времени $\boldsymbol{t}$. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)$.

3.2.11 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается по сторонам треугольника, переходя из одной вершины в другую по часовой стрелке. Найти вероятности нахождения частицы в каждой вершине треугольника в произвольный момент времени ***t***.

3.2.12 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается из центра единичного квадрата в его вершины с одинаковыми вероятностями и из вершин квадрата в его центр. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центра квадрата в момент времени ***t*** при условии, что в начальный момент времени частица находилась в центре квадрата.

3.3 Процессы гибели и размножения

3.3.1 Частицы размножаются делением на три с интенсивностью λ. В начальный момент времени имеется одна частица. Найти вероятность того, что в момент времени *t* будет ровно *n* частиц.

3.3.2 Частицы размножаются делением пополам и гибнут с одинаковой интенсивностью, равной λ. В начальный момент времени имеется одна частица. Найти вероятность того, что в момент времени *t* будет ровно *n* частиц.

4 Случайные последовательности

4.1 Моментные функции случайных последовательностей

4.1.1 Некоррелированная стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(n)$ имеет математическое ожидание m и дисперсию σ^2. Последовательность $\eta(n)$ порождается из последовательности $\xi(n)$ по формуле $\eta(n) = \sum_{k=0}^{N} \xi(n-k)$. Найти моментные функции случайной последовательности $\eta(n)$. Изобразить графически корреляционную функцию.

4.1.2 Некоррелированная стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(n)$ имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Последовательность $\eta(n)$ порождается из последовательности $\xi(n)$ по формуле $\eta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \xi(n-k), \quad |a| < 1$. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\eta(n)$.

4.1.3 Стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность мощности $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \in [\omega_1; \omega_2]; \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$ $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\xi(n)$.

4.1.4 Стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(n)$ имеет экспоненциальную корреляционную функцию $R_\xi(m) = \sigma^2 \rho^{|m|}, \quad |\rho| < 1$. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\eta(n) = \xi(n) - \rho\xi(n-1)$.

4.1.5 Стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(n)$ имеет экспоненциальную корреляционную функцию $R_\xi(m) = \sigma^2 \rho^{|m|}$, $|\rho| < 1$. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\eta(n) = \xi(n) + \xi(n-1) + \xi(n-2)$.

Список рекомендуемой литературы

1. **Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций** [Текст]: учеб. пособие / [Б. Г. Володин и др.]; под общ. ред. А.А. Свешникова. – Изд. 4-е, стер. – СПб. Лань, 2008. – 445с. – ISBN 978-5-8114-0708-8.
2. **Миллер, Б.М.** Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И. Кибзуна. – М. : Наука: Физматлит. – 2007. – 317с.