

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Л.М. Савельев

## **УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ**

Методические указания к практическим занятиям

по направлению 151600.68 – Прикладная механика  
магистерская программа

"Прочность конструкций летательных аппаратов"

Самара 2013

## **Оглавление**

### **Оглавление**

Тема 1. «Исследование влияния дискретных рёбер на устойчивость пластин» .....	3
Тема 2. «Устойчивость конструктивно-ортотропных пластин».....	10
Тема 3. «Применение метода Бубнова – Галёркина к расчёту пластин на устойчивость.....	15

## Тема 1. «Исследование влияния дискретных рёбер на устойчивость пластин»

1.1. Квадратная пластина со стороной  $c$  сжимается в направлении оси  $x$ . Пластина подкреплена рёбрами имеющими большую изгибную жёсткость. Сравнить эффект от подкрепления пластины при ориентации рёбер в продольном или поперечном направлениях.

Будем считать, что пластина свободно опёрта по всем сторонам и что рёбра при потере устойчивости сохраняют прямолинейную форму. Подкрепляющие рёбра разбивают пластину на отдельные ячейки, каждую из которых можно рассматривать как свободно опёртую по всем сторонам прямоугольную пластину.

При вычислении критических напряжений в качестве исходной используем формулу

$$\sigma_{\text{сд}} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2}, \quad (1.1)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $b$ ,  $h$  – ширина и толщина пластины. Коэффициент  $k$  для пластины, у которой отношение сторон

$$\gamma = \frac{b}{a}$$

больше или равно единице, можно принимать равным 4, а в случае, когда  $\gamma < 1$ , следует вычислять по формуле

$$k = \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2. \quad (1.2)$$

Для исходной пластины критическое напряжение при  $k = 4$  составит

$$(\sigma_{\text{сд}})_0 = \frac{3,6Eh^2}{c^2}. \quad (1.3)$$

При поперечном расположении подкрепляющих рёбер (рисунок 1.1, а) отдельные клетки имеют продольный размер

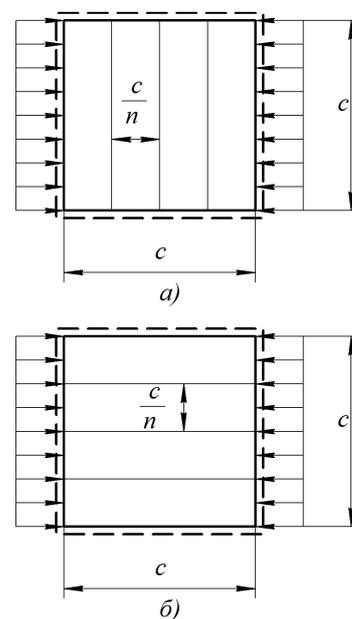


Рисунок 1.1

$$a = \frac{c}{n},$$

где  $n$  – количество участков, на которые разбивается пластина. При достаточно большом количестве рёбер можно считать, что  $\gamma = \frac{a}{b} = \frac{1}{n} \ll 1$ .

Коэффициент устойчивости в этом случае определим по формуле (1.2):

$$k = \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2 \approx \frac{1}{\gamma^2} = n^2.$$

Критическое напряжение по формуле (1.1) оказывается равным

$$(\sigma_{\text{сд}})_1 = \frac{0,9n^2 E h^2}{c^2}, \quad (1.4)$$

то есть возрастает по сравнению с (1.3) приблизительно в  $n^2/4$  раз.

В случае же продольного подкрепления (рисунок 1.1, б) поперечный размер отдельной панели  $b = \frac{c}{n}$ , в то время как продольный размер остаётся

таким же, как и в исходной пластине:  $a = c$ . Поскольку здесь

$$\gamma = \frac{a}{b} = n > 1,$$

необходимо принять  $k = 4$ , и мы получаем для критического напряжения значение

$$(\sigma_{\text{сд}})_2 = \frac{3,6E}{(b/h)^2} = n^2 \frac{3,6E h^2}{b^2}. \quad (1.5)$$

Как видим, в этом случае критическое напряжение возрастает по сравнению с неподкреплённой пластиной в  $n^2$  раз, то есть вчетверо больше, чем при поперечном подкреплении.

Полученный результат ещё не отражает всех преимуществ продольного подкрепления по сравнению с поперечным. Суммарная сила, которую может воспринять пластина, равна произведению критического напряжения на площадь поперечного сечения. При продольной постановке рёбер площади их сечений добавляются к площади сечения  $ch$  самой пластины, тем самым увеличивая дополнительно несущую способность конструкции.

1.2. Пластина длиной  $a$ , шириной  $b$ , и толщиной  $h$  имеет свободное опирание по одной из продольных сторон и по обеим поперечным сторонам и испытывает равномерное сжатие в продольном направлении. Оценить,

какое влияние на критическое напряжение окажет подкрепление свободного края пластины ребром жёсткости, имеющим прямоугольное сечение высотой  $d$  и толщиной  $\delta$  (рисунок 1.2).

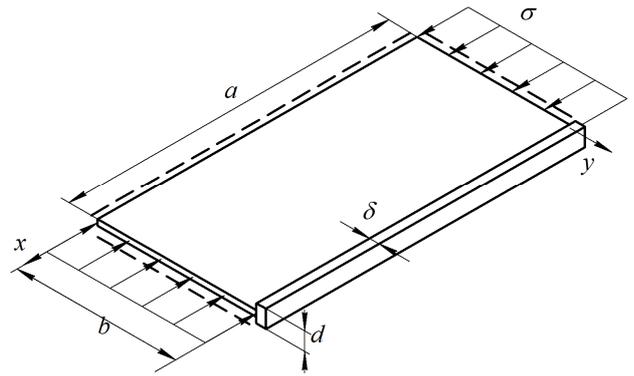


Рисунок 1.2

Для решения задачи воспользуемся методом Ритца. Условие устойчивости пластины записывается как условие стационарности приращения полной энергии системы при выпучивании пластины

$$\Delta V = U + A,$$

где  $U$  – приращение потенциальной энергии системы при потере устойчивости,  $A$  – работа сил начального состояния, производимая ими в процессе потери устойчивости.

В рассматриваемой задаче величина  $U$  будет представлять собой сумму

$$U = U_{\text{изг}} + U_{\delta},$$

где  $U_{\text{изг}}$  – потенциальная энергия изгиба пластины

$$U_{\text{изг}} = \frac{D}{2} \iint_S \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1 + \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy; \quad (1.6)$$

$U_{\delta}$  – потенциальная энергия изгиба ребра

$$U_{\delta} = \frac{EI_y}{2} \int_0^a v''^2 dx. \quad (1.7)$$

В формулах (1.6) и (1.7)  $w(x, y)$  – прогиб пластины;  $v(x)$  – прогиб ребра;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

– изгибная жёсткость пластины;

$$I_y = \frac{\delta d^3}{12}$$

– момент инерции сечения ребра;  $E$ ,  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала. Интегрирование в (1.6) распространяется на всю площадь  $S$  срединной плоскости пластины, а в (1.7) – на всю длину ребра.

Работа сил начального состояния при одноосном сжатии вычисляется так:

$$A = \frac{1}{2} \iint_S N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a N_o v'^2 dx. \quad (1.8)$$

Здесь  $N_x = -\sigma h$  – начальная погонная сила в пластине в сечении  $x = \text{const}$ ;  $N_o = -\sigma \delta d$  – начальная осевая сила в сечениях ребра.

В соответствии с методом Ритца зададимся выражением для  $w(x, y)$  в виде

$$w(x, y) = C y \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad (1.9)$$

где  $m = 1, 2, \dots$  – целое число. Выражение (1.9) удовлетворяет, как нетрудно убедиться, геометрическим граничным условиям на закреплённых сторонах пластинки, как это и требуется в методе Ритца.

Прогиб ребра  $v(x)$  должен равняться  $w$  при  $y = b$ , то есть

$$v(x) = C b \sin \frac{m\pi}{a} x. \quad (1.10)$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad (1.11)$$

запишем

$$w = C y \sin \alpha x;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = C \alpha y \cos \alpha x; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = C \sin \alpha x;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \alpha^2 y \sin \alpha x; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C \alpha \cos \alpha x;$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \alpha^2 y \sin \alpha x;$$

$$v = C b \sin \alpha x; \quad v' = C \alpha b \cos \alpha x; \quad v'' = -C \alpha^2 b \sin \alpha x.$$

С учётом этих выражений вычисляем

$$U_{i\ddot{e}} = \frac{DC^2}{2} \iint_S \left[ (-\alpha^2 y \sin \alpha x)^2 + 2(1 + \mu)(\alpha \cos \alpha x)^2 \right] dx dy =$$

$$= \frac{DC^2}{2} \left[ \alpha^4 \frac{b^3}{3} \cdot \frac{a}{2} + 2(1+\mu) \alpha^2 b \frac{a}{2} \right] = \frac{DC^2 \alpha^2 ab}{2} \left( \frac{\alpha^2 b^2}{6} + 1 - \mu \right);$$

$$U_{\delta} = \frac{EI_y}{2} C^2 \int_0^a (-\alpha^2 b \sin \alpha x)^2 dx = \frac{EI_y C^2 \alpha^4 ab^2}{4}.$$

Таким образом

$$U = U_{i\ddot{e}} + U_{\delta} = \frac{DC^2 \alpha^2 ab}{2} \left( \frac{\alpha^2 b^2}{6} + 1 - \mu \right) + \frac{EI_y C^2 \alpha^4 ab^2}{4} =$$

$$= \frac{DC^2 \alpha^2 ab}{2} \left( \frac{\alpha^2 b^2}{6} + 1 - \mu + \frac{\alpha^2 b^2}{2} \chi \right). \quad (1.12)$$

Под  $\chi$  здесь понимается безразмерная величина

$$\chi = \frac{EI_y}{Db}, \quad (1.13)$$

характеризующая жёсткость подкрепляющего ребра.

Далее находим

$$A = -\frac{C^2}{2} \iint_S \sigma h (\alpha y \cos \alpha x)^2 dx dy - \frac{C^2}{2} \int_0^a \sigma \delta d (\alpha b \cos \alpha x)^2 dx =$$

$$= -\frac{C^2}{2} \sigma \left( h \alpha^2 \frac{b^3}{3} \cdot \frac{a}{2} + \delta d \alpha^2 b^2 \frac{a}{2} \right) = -\frac{C^2}{12} \sigma \alpha^2 ab^3 h \left( 1 + 3 \frac{\delta d}{bh} \right). \quad (1.14)$$

Необходимое условие стационарности

$$\frac{dV}{dC} = \frac{dU}{dC} + \frac{dA}{dC} = 0$$

приводит к равенству

$$C \left\{ D \alpha^2 ab \left[ \frac{\alpha^2 b^2}{6} (1 + 3\chi) + 1 - \mu \right] - \frac{\sigma \alpha^2 ab^3 h}{6} \left( 1 + 3 \frac{\delta d}{bh} \right) \right\} = 0.$$

Приравняв нулю выражение в фигурных скобках, находим

$$\sigma = \frac{D}{b^2 h} \frac{\alpha^2 b^2 (1 + 3\chi) + 6(1 - \mu)}{1 + 3 \frac{\delta d}{bh}}.$$

Если подставить сюда соотношение (1.11) и положить  $m=1$ , имея в виду наименьшее значение  $\sigma$ , то получим приближённое значение критического напряжения  $\sigma_{\delta\delta}$ . Формулу для  $\sigma_{\delta\delta}$  можно с учётом выражения для  $D$  записать в стандартной форме

$$\sigma_{\delta\delta} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2},$$

где коэффициент устойчивости  $k$  получается равным

$$k = \frac{\frac{1}{\gamma^2}(1+3\chi) + \frac{6}{\pi^2}(1-\mu)}{1+3\frac{\delta d}{bh}}, \quad (1.15)$$

где

$$\gamma = \frac{a}{b}.$$

При отсутствии подкрепления на свободном краю получаем отсюда

$$k = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{6}{\pi^2}(1-\mu).$$

В частности, для весьма длинной пластины, когда слагаемое  $1/\gamma^2$  можно опустить, при  $\mu = 0,3$  получаем отсюда

$$k = 0,426,$$

что практически совпадает с точным значением  $k = 0,425$ .

Для оценки влияния подкрепления возьмём пластину с параметрами  $\gamma = \frac{a}{b} = 2$ ; подкрепляющее ребро имеет характеристики  $\delta/b = 1/20$ ;  $d/h = 5$ .

При этом параметр  $\chi$  по (1.13) будет

$$\chi = \frac{EI_y}{Db} = \frac{E\delta d^3}{12} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3b} = \frac{\delta}{b} \left(\frac{d}{h}\right)^3 (1-\mu^2).$$

При  $\mu = 0,3$  имеем  $\chi = 5,69$ .

Коэффициент устойчивости оказывается равным

$$k = \frac{\frac{1}{2^2}(1+3 \cdot 5,69) + \frac{6}{\pi^2}(1-0,3)}{1+3\frac{1}{20} \cdot 5} = 2,82$$

что более чем вчетверо превышает значение  $k = 0,675$ , которое получается для неподкреплённой пластины тех же размеров.

Заметим, что для весьма длинной пластины ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) из формулы (1.16) следует, что наличие подкрепления приводит к снижению критического напряжения по сравнению с неподкрепленной пластиной. Это означает, что в

такой конструкции рёбра не только не поддерживают пластину, а, напротив, сами поддерживаются пластиной.

## Тема 2. «Устойчивость конструктивно-ортотропных пластин»

2.1. Прямоугольная изотропная пластина толщиной  $h = 4 \text{ мм}$  с размерами сторон  $a = 500 \text{ мм}$ ,  $b = 400 \text{ мм}$  свободно опёрта по всем сторонам и испытывает равномерное осевое сжатие вдоль оси  $x$  (рисунок 2.1). Пластина подкреплена тремя продольными рёбрами корытообразного сечения (рисунок 3.2); толщины стенок ребра одинаковы и равны  $\delta = 5 \text{ мм}$ . Сравнить критические напряжения пластины при двух вариантах крепления рёбер, показанных на рисунке 3.3, а и б. Принять  $E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,3$ .

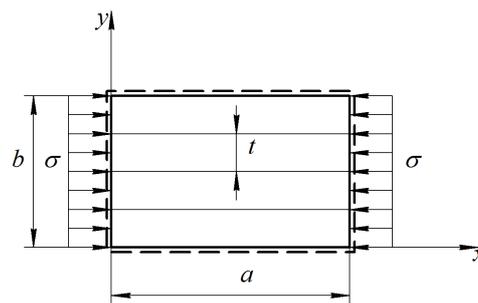


Рисунок 2.1

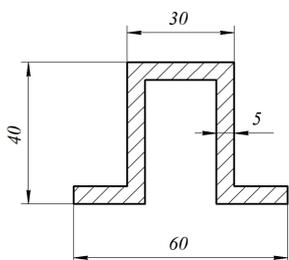


Рисунок 2.2

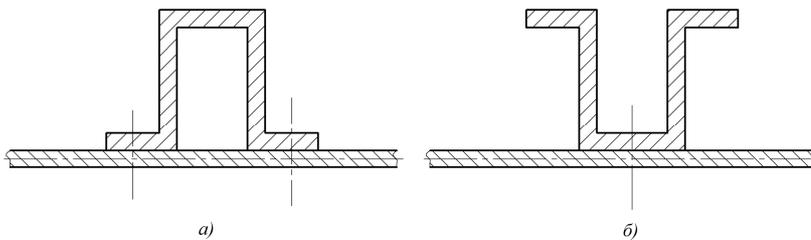


Рисунок 2.3

Рассматривая пластину, как конструктивно-ортотропную, критическую погонную силу для неё будем определять по формуле

$$N_{\text{крит}} = \frac{k\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2}, \quad (2.1)$$

где

$$k = 2 \left( 1 + \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right). \quad (2.2)$$

Вычислим жесткостные характеристики приведённой пластины.

Поскольку поперечные подкрепления отсутствуют, сразу находим

$$D_y = D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{7,2 \cdot 10^4 \cdot 4^3}{12(1-0,3^2)} = 4,22 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2.$$

Далее выполняем расчёт геометрических характеристик сечения подкрепляющего ребра (рисунок 3.4).

Площадь сечения ребра

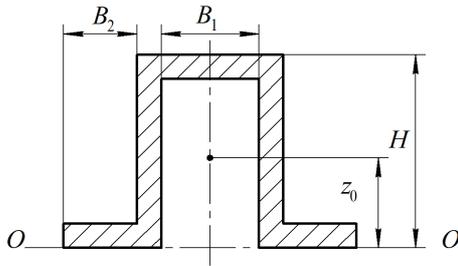


Рисунок 2.4

$$F_{\delta} = \delta(B_1 + 2B_2 + 2H),$$

где  $B_1 = 20 \text{ мм}$ ,  $B_2 = 15 \text{ мм}$ ,  $H = 40 \text{ мм}$ .

Находим

$$F_{\delta} = 5(20 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 40) = 650 \text{ мм}^2.$$

Статический момент сечения относительно оси  $O-O$ :

$$\begin{aligned} S_o &= \delta \left[ B_1 \cdot \left( H - \frac{\delta}{2} \right) + 2B_2 \cdot \frac{\delta}{2} + 2H \cdot \frac{H}{2} \right] = \\ &= 5 \left[ 20 \cdot \left( 40 - \frac{5}{2} \right) + 2 \cdot 15 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 40 \cdot \frac{40}{2} \right] = 12125 \text{ мм}^3. \end{aligned}$$

Расстояние центра тяжести от оси  $O-O$ :

$$z_o = \frac{S_o}{F_{\delta}} = \frac{12125}{650} = 18,65 \text{ мм}.$$

Момент инерции сечения относительно оси  $O-O$ :

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{B_1 \delta^3}{12} + B_1 \delta \left( H - \frac{\delta}{2} \right)^2 + 2 \left[ \frac{B_2 \delta^3}{12} + B_2 \delta \left( \frac{\delta}{2} \right)^2 \right] + 2 \left[ \frac{\delta H^3}{12} + \delta H \left( \frac{H}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot 5 \left( 40 - \frac{5}{2} \right)^2 + 2 \left[ \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 15 \cdot 5 \left( \frac{5}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 2 \left[ \frac{5 \cdot 40^3}{12} + 5 \cdot 40 \cdot \left( \frac{40}{2} \right)^2 \right] = 3,554 \cdot 10^5 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси, параллельной оси  $O-O$  (собственный момент инерции сечения ребра):

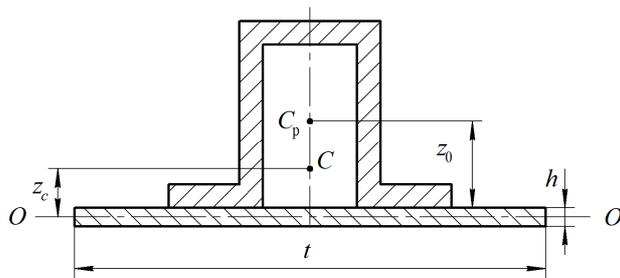
$$I_{\delta} = I_o - F_{\delta} z_o^2 = 3,554 \cdot 10^4 - 650 \cdot 18,65^2 = 1,293 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Выделим теперь участок сечения пластины размером

$$t = \frac{b}{4} = \frac{400}{4} = 100 \text{ мм}$$

вместе с сечением ребра, установленного по схеме рисунка 2.3, а) (рисунок 2.5). Площадь совокупного сечения участка пластины с ребром найдём по формуле

$$F = \frac{th}{1 - \mu^2} + F_{\delta} = \frac{100 \cdot 4}{1 - 0,3^2} + 650 = 1090 \text{ мм}^2.$$



**Рисунок 2.5**

деформирование выделенной полосы.

Статический момент относительно прежней оси  $O-O$  совокупного сечения будет

$$S = S_o - \frac{th}{1-\mu^2} \cdot \frac{h}{2} = 12125 - \frac{100 \cdot 4}{1-0,3^2} \cdot \frac{4}{2} = 11246 \text{ мм}^3.$$

Расстояние  $z_c$  от оси  $O-O$  до центра тяжести совокупного сечения составит

$$z_c = \frac{S}{F} = \frac{11246}{1090} = 10,32 \text{ мм}.$$

Теперь подсчитаем момент инерции совокупного сечения относительно оси  $O-O$ :

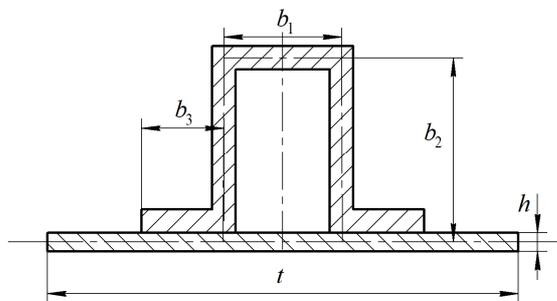
$$I = I_o + \frac{th^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{th}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 =$$

$$= 3,554 \cdot 10^5 + \frac{100 \cdot 4^3}{12(1-0,3^2)} + \frac{100 \cdot 4}{1-0,3^2} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 3,577 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Далее находим жёсткость на изгиб приведённой пластинки по формуле

$$D_x = \frac{E}{t} (I - Fz_c^2) = \frac{7,2 \cdot 10^4}{100} (3,577 \cdot 10^5 - 1090 \cdot 10,32^2) = 1,735 \cdot 10^8 \text{ Ё} \cdot \text{мм}.$$

Жёсткость на кручение выделенной полоски находим как для тонкостенной балки с замкнутым сечением (рисунок 2.6).



**Рисунок 2.6**

Заметим, что при вычислении вклада обшивки мы вводим в знаменателе множитель  $(1-\mu^2)$ , учитывая тем самым влияние соседних участков пластины, которые стесняют свободное

Размеры  $b_1, b_2$ , и  $b_3$  имеют значения

$$b_1 = B_1 + \delta = 20 + 5 = 25 \text{ мм};$$

$$b_2 = H + \frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} = 40 + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = 39,5 \text{ мм};$$

$$b_3 = B_2 + \frac{\delta}{2} = 15 + \frac{5}{2} = 17,5 \text{ мм}.$$

Погонная жёсткость на кручение

рассматриваемого сечения

$$C_x = \frac{G}{t} \frac{\Omega}{\sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{h_i}},$$

где  $\Omega = 2b_1b_2 = 2 \cdot 25 \cdot 39,5 = 1975 \text{ м}^2$ ;  $a_i$  и  $h_i$  – размеры участков, составляющих замкнутый контур:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{h_i} = \frac{b_1}{h} + \frac{b_1}{\delta} + 2 \frac{b_2}{\delta} = \frac{25}{4} + \frac{25}{5} + 2 \frac{39,5}{5} = 27,05.$$

Учитывая, что

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{7,2 \cdot 10^4}{2(1+0,3)} = 2,769 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

вычисляем

$$C_x = \frac{2,769 \cdot 10^4}{100} \cdot \frac{1975^2}{27,05} = 0,3993 \cdot 10^8 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$

Жёсткостью

$$C_y = \frac{Gh^3}{3}$$

можно пренебречь по сравнению с  $C_x$ ; тогда

$$D_k = \frac{C_x}{8} = \frac{0,3993 \cdot 10^8}{8} = 4,991 \cdot 10^6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$

Величина  $D_{xy}$  получается равной

$$D_{xy} = \mu D_y + 2D_k = 0,3 \cdot 4,22 \cdot 10^5 + 2 \cdot 4,991 \cdot 10^6 = 10,11 \cdot 10^6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$

Для коэффициента устойчивости в варианте (а) получаем значение

$$k = 2 \left( 1 + \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right) = 2 \left( 1 + \frac{10,11 \cdot 10^6}{\sqrt{1,735 \cdot 10^8 \cdot 4,22 \cdot 10^5}} \right) = 4,36.$$

В варианте (б), повторяя подобные вычисления, найдём

$$D_x = 7,03 \cdot 10^8 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$

Главное отличие заключается в вычислении  $C_x$ . Поскольку сечение имеет здесь открытый контур, величину  $C_x$  следует находить так:

$$C_x = \frac{G}{3t} \left[ th^3 + b_1 \delta^3 + 2b_3 \delta^3 + 2 \left( b_2 - \frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \delta^3 \right],$$

что даёт значение

$$C_x = 2,09 \cdot 10^6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$



### Тема 3. «Применение метода Бубнова – Галёркина к расчёту пластин на устойчивость»

3.1. Прямоугольная пластина со сторонами  $a$  и  $b$  жёстко заделана по всем сторонам и сжимается вдоль оси  $x$  усилиями  $N$  (рисунок 3.1). Найти критическое напряжение, пользуясь методом Бубнова – Галёркина.

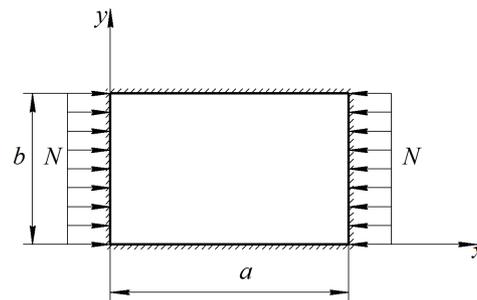


Рисунок 3.1

Дифференциальное уравнение устойчивости пластины имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

– изгибная жёсткость пластины;  $h$  – толщина;  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  – силы в срединной плоскости в начальном состоянии;  $w$  – прогиб при потере устойчивости ( $E, \mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала).

В рассматриваемом случае нагружения имеем силы начального состояния

$$N_x = -N; \quad N_y = N_{xy} = 0,$$

и уравнение устойчивости можно переписать следующим образом:

$$L(w) = 0, \tag{3.1}$$

где

$$L(w) = D\nabla^2\nabla^2w + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{3.2}$$

В соответствии с методом Бубнова – Галёркина приближённое решение уравнения (3.1) отыскивается в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x, y), \tag{3.3}$$

где  $f_k(x, y)$  – базисные функции, каждая из которых должна удовлетворять всем граничным условиям – как геометрическим, так и статическим. Коэффициенты  $a_k$  должны быть найдены таким образом, чтобы уравнение

(3.1) удовлетворялось приближённо наилучшим образом. Процедура метода Бубнова – Галёркина заключается в том, что выражение (3.3) подставляется в левую часть уравнения (3.1), то есть находится функция  $L(\tilde{w})$ , которая, вообще говоря, не равна тождественно нулю. Далее полученная функция умножается последовательно на каждую из базисных функций и интегрируется по площади  $S$  пластины, а результаты приравниваются нулю. Таким образом получается система  $n$  равенств вида

$$\iint_S L(\tilde{w})f_i(x, y) dx dy = 0. \quad (3.4)$$

Эти равенства образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $n$  коэффициентов  $a_k$ . Приравняв определитель системы нулю, получим уравнение степени  $n$  относительно  $N$ . Наименьший корень этого уравнения принимается в качестве критической нагрузки.

Применительно к рассматриваемой пластине в качестве базисных могут быть взяты, например, функции

$$f_1(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right); \quad (3.5)$$

$$f_2(x, y) = \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right),$$

и так далее. Каждая из этих функций удовлетворяет всем граничным условиям, а именно:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = a;$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

Ограничимся одночленным приближением, полагая

$$\tilde{w}(x, y) = Af_1(x, y), \quad (3.6)$$

где функция  $f_1(x, y)$  даётся равенством (3.5).

Подставим выражение (3.6) в соотношение (3.4) при  $i = 1$ :

$$A \iint_S L(f_1)f_1 dx dy = 0.$$

Поскольку  $A \neq 0$ , отсюда вытекает равенство

$$\iint_S L(f_1)f_1 dx dy = 0.$$

На основании (3.2) это равенство можно представить в виде

$$D \iint_S \nabla^2 \nabla^2 f_1 \cdot f_1 dx dy + N \iint_S \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_1 dx dy = 0,$$

из которого может быть получено приближённое значение  $N_{\text{эд}}$ :

$$N_{\text{эд}} = \frac{a_{11}}{b_1} \quad (3.7)$$

где

$$a_{11} = D \iint_S \nabla^2 \nabla^2 f_1 \cdot f_1 dx dy,$$

$$b_1 = -N \iint_S \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_1 dx dy.$$

Найдём необходимые производные от функции  $f_1$ :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right);$$

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} = - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right);$$

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial y^4} = - \left( \frac{2\pi}{b} \right)^4 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{2\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^2 \partial y^2} = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}.$$

Так как

$$\nabla^2 \nabla^2 f_1 = \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f_1}{\partial y^4},$$

выражения для  $a_{11}$  и  $b_1$  могут быть представлены в виде

$$a_{11} = D \left[ - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^4 Y_1(a) Y_2(b) + 2 \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 Y_1(a) Y_1(b) - \left( \frac{2\pi}{b} \right)^4 Y_2(a) Y_1(b) \right];$$

$$b_1 = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 Y_1(a) Y_2(b).$$

Здесь

$$Y_1(a) = \int_0^a \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx = \int_0^a \cos \frac{2\pi x}{a} dx - \int_0^a \cos^2 \frac{2\pi x}{a} dx = -\frac{a}{2};$$

$$Y_2(a) = \int_0^a \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right)^2 dx = \int_0^a \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx = \frac{3a}{2};$$

Соответственно,

$$Y_1(b) = -\frac{b}{2}; \quad Y_2(b) = \frac{3b}{2}.$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} a_{11} &= D \left[ -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}b + 2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}a\right) \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{4\pi^4 D}{ab} \left( \frac{3}{\gamma^2} + 2 + 3\gamma^2 \right); \\ b_1 &= \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}b = \frac{3\pi^2 b}{a}, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – отношение сторон пластины

$$\gamma = \frac{a}{b}.$$

По (3.7) имеем, наконец,

$$N_{\text{сд}} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 D}{b^2} \psi(\gamma),$$

где

$$\psi(\gamma) = \frac{3}{\gamma^2} + 2 + 3\gamma^2.$$

Это выражение можно записать в стандартной форме

$$N_{\text{сд}} = k \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где коэффициент устойчивости  $k$  получается равным

$$k = 4 \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{3} + \gamma^2 \right).$$

В частности при  $\gamma=1$  (квадратная пластина)  $k=10,67$ .

Точное значение коэффициента  $k$  для квадратной пластины при жёсткой заделке сторон  $k=10,07$ ; приближённое значение превышает точное примерно на 6%. Следует иметь в виду, однако, что решение, полученное на основе простейшего выражения (3.6), даёт удовлетворительные результаты лишь для пластин, близких квадратным, когда потеря устойчивости происходит с образованием одной вмятины. Для удлинённых пластин происходит чередование вмятин и выпучин, которое не

может быть описано одной базисной функцией  $f_1$ . В этом случае необходимо удерживать большее количество базисных функций в выражении (3.3).