ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
(задачи и упражнения)

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний*

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2008

УДК 517 (075)

Составитель **О.М.Карпилова**

Рецензент канд. техн. наук, доц. Г. Н. Г у т м а н

Введение в анализ (задачи и упражнения): метод. указания / сост. *О.М. Карпилова.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 52 с.

Сборник содержит образцы решения типовых задач по разделам: функции и их графики в различных системах координат, пределы, непрерывность, комплексные числа. По каждой теме предлагается большое количество задач для самостоятельного решения, а также вопросы для самоконтроля по теоретическому материалу. В приложениях даны варианты расчетно-графических работ.

Все задания составлены в соответствии с программой по курсу математики для студентов технических вузов.

Пособие подготовлено на кафедре общей инженерной подготовки и предназначено для студентов института энергетики и транспорта Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 517 (075)

СОДЕРЖАНИЕ

1. МНОЖЕСТВА, ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Вопросы для самопроверки

1. Как можно задавать множества?
2. Что называется числовой функцией? Приведите пример какой-либо числовой функции.
3. Что такое область определения функции?
4. Приведите пример функции, областью определения которой является: а) вся числовая ось; б) все положительные числа; в) отрезок [2; 5].
5. Что такое график функции?
6. Что такое обратная функция?
7. Как расположены относительно друг друга графики прямой и обратной функций?
8. Что такое сложная функция?

Решение примеров

1.1. Перечислить элементы множества $A = \{x \in Z \mid (x-3)(x^2-1)=0 \text{ и } x \geq 0\}$.

Решение. Уравнение $(x-3)(x^2-1)=0$ имеет три корня $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$, из которых условию $x \geq 0$ удовлетворяют только $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$.

Ответ: $A = \{1; 3\}$

1.2. Построить множество $X = \{x \in R \mid \; x^2 \leq 4\}$.

Решение. Элементами множества X являются те действительные числа, которые удовлетворяют неравенству $x^2 \leq 4$. Решая неравенство, получаем $|x| \leq 2$, т.е. $-2 \leq x \leq 2$.

Таким образом, множество X можно изобразить на числовой прямой отрезком [-2;2] (рис.1).

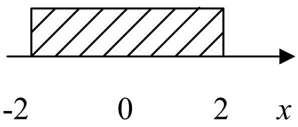


Рис. 1

1.3. Дана цепочка функций $y = \ln u; u = v^2; v = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, определяющая некоторую сложную функцию. Записать эту функцию в виде одного равенства.

Ответ: $y = \ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

1.4. Найти область определения функции $y = \sqrt{2 + x - x^2} + \arccos\frac{x-2}{2}$.

Решение. Областью определения данной функции являются все действительные числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 2 + x - x^2 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{x-2}{2} \le 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$\begin{cases} -(x+1)(x-2) \ge 0, \\ -2 \le x - 2 \le 2; \end{cases}$ следовательно, $\begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ 0 \le x \le 4, \end{cases}$ откуда $0 \le x \le 2$.

Ответ: $x \in [0;2]$.

Задания для самостоятельного решения

1.5. Построить множества:

1) $X = \{ x \in Z \mid |x-2| \le 3 \}$; 2) $X = \{ x \in Z \mid -9 \le 1 - 2x < 5 \}$;

3) $X = \{ x \in R \mid |x-3| \ge 1 \}$.

1.6. Вычислить частные значения функции $f(x) = \dfrac{x+5}{2x+1}$ при

$x = 0$; $x = -1$; $x = 4$; $x = a$; $x = a^2$; $x = \dfrac{1}{a}$.

1.7. Данные функции записать в виде цепочки равенств, каждое звено которой содержит основную элементарную функцию:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \cos(x^5)$; 3) $y = \ln tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1.8. Сложную функцию, заданную в виде цепочки равенств, записать одной формулой: 1) $y = u^2$; $u = ctg(x)$; 2) $y = arctg(u)$; $u = \sqrt{v}$; $v = \ln x$.

1.9. Найти область определения функции и изобразить полученное числовое множество геометрически:

1) $y = \sqrt{x+1}$; 2) $y = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 4x + 3}$;

4) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{(x+1)^2}$; 5) $y = \dfrac{\log_2(x^2 - 1)}{x^2 + x + 1}$; 6) $y = arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7) $y = \arccos\dfrac{2x-3}{5}$; 8) $y = \ln(2x+3) + \sqrt{16 - x^2}$.

1.10. Построить путем сдвигов и деформаций графики следующих функций:

1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = (x-1)^2$; 4) $3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 5) $y = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$.

ОТВЕТЫ. **1.5**. **1**) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; **2**) $(-2; 5]$; **3**) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

1.7. **1**) $y = u^3$; $u = \sin x$; **2**) $y = \cos u$; $u = x^5$;

3) $y = \ln u$; $u = v^2$; $v = tg(w)$; $w = \dfrac{x}{2}$.

1.8. **1**) $y = ctg^2(x)$; **2**) $y = arctg\sqrt{\ln x}$.

1.9. **1**) $[-1; +\infty)$; **2**) $(-2; 2)$; **3**) $[0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$;

4) [–3; –1)∪(–1; 3]; **5**) (–∞; –1]∪[1; +∞); **6**) (–∞; 0)∪(0; +∞);
7) [–1; 4]; **8**) (–1,5; 4].

2. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое полярная система координат?
2. Что такое обобщенная полярная система координат?
3. Что представляет собой график функции $\rho = const$ в полярной системе координат?
4. Что представляет собой график функции $\varphi = const$ в полярной системе координат?
5. Дано уравнение кривой в декартовой системе координат. Как записать уравнение этой же кривой в полярной системе координат?
6. Как записать уравнение линии $x^2 + 2y^2 = 0$ в полярной системе координат?
7. Дано уравнение кривой в полярной системе координат $\rho = tg\varphi$. Записать его в декартовой системе координат.
8. Сколькими способами можно задать положение точки на плоскости в полярной системе координат?

Решение примеров

2.1. Построить график функции $\rho = 3\cos\varphi$ в полярной системе координат.

Решение. Для построения графика заполним таблицу значений функции (табл.1).

Таблица 1

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	–	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3

Так как при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ функция $\rho = 3\cos\varphi$ принимает отрицательные значения, то промежуток $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ не входит в область определения данной функции. Отметив на чертеже полученные точки и соединив их плавной кривой, получим график функции $\rho = 3\cos\varphi$ (рис. 2).

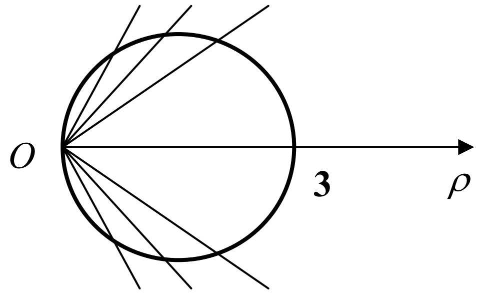


Рис. 2

2.2. Построить график функции $\rho = 2\cos 2\varphi$ в обобщенной полярной системе координат.

Решение. Заполняем таблицу значений функции (табл. 2).

Таблица 2

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ρ	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
φ	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2

Так как в обобщенной полярной системе координат $\rho \in (-\infty;\infty)$, то функция $\rho = 2\cos 2\varphi$ определена при любых значениях φ. По данным таблицы строим точки и, соединив их плавной кривой, получаем график заданной функции (рис.3).

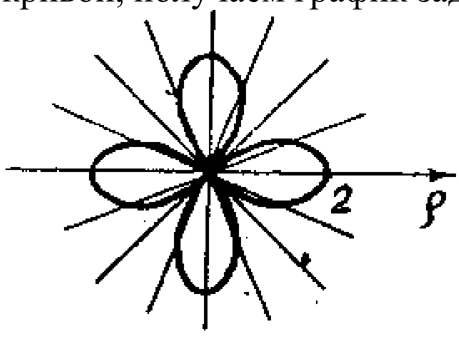


Рис. 3

Задания для самостоятельного решения

2.3. Построить точки $M(\varphi;\ \rho)$ в полярной системе координат:
$M_1\left(\frac{3}{4}\pi;\ 2\right)$; $M_2\left(\frac{7}{5}\pi;\ 3{,}5\right)$.

2.4. Построить точки $P(\varphi;\ \rho)$ в обобщенной полярной системе координат:
$P_1\left(-\frac{3}{4}\pi;\ 2\right)$; $P_2\left(\frac{7}{5}\pi;\ -3{,}5\right)$.

2.5. Построить графики функций:

а) $\rho = 5$, б) $\rho = 2\varphi$ в) $\rho = 2\sin\varphi$, г) $\rho = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, д) $\rho = 2\sin 2\varphi$,

е) $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$; ж) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, з) $\rho = \dfrac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какая числовая последовательность называется возрастающей?
3. Какая числовая последовательность называется монотонной?
4. Какая числовая последовательность называется ограниченной?

Решение примеров

3.1. Развернуть последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена $\dfrac{n}{n+2}$ вместо n последовательно числа 1; 2; 3; 4;… , получим $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{4}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{6}; ...; \dfrac{n}{n+2}; ...$.

Задания для самостоятельного решения

3.2. Привести примеры:

а) возрастающей ограниченной последовательности;
б) возрастающей неограниченной последовательности;
в) убывающей ограниченной последовательности;
г) убывающей неограниченной последовательности.

3.3. Среди приведенных последовательностей укажите возрастающую неограниченную; убывающую ограниченную; убывающую неограниченную:

а) 1, 2, 3, 4, 5, … ; б) –3, –9, –27, –81, –243, … ;

в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ г) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$.

4. ПРЕДЕЛЫ

4.1. Предел последовательности

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение предела числовой последовательности.
2. Какая числовая последовательность называется сходящейся?
3. Сколько пределов может иметь числовая последовательность?
4. Что можно сказать о пределе такой числовой последовательности
$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & при \ \ n = 2k \\ 1, & при \ \ n = 2k-1 \end{cases} \quad ?$$
5. Сформулировать необходимое условие существования предела числовой последовательности.
6. Сколько пределов имеет неограниченная последовательность?
7. Последовательность ограничена. Можно ли утверждать, что она имеет предел?
8. В каком случае можно с уверенностью утверждать, что последовательность имеет предел? (Достаточное условие существования предела последовательности).
9. Можно ли складывать сходящиеся числовые последовательности? Умножать? Делить?

Решение примеров

4.1.1. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ имеет предел, равный $\dfrac{1}{2}$.

Решение. Так как, по определению, число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, то, чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, надо по произвольному $\varepsilon > 0$ суметь найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ (*).

Для отыскания $N = N(\varepsilon)$ преобразуем это неравенство.

$\left|\dfrac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon,$ то есть $\left|\dfrac{-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon$.

Так как n – натуральное число, то $\left|\dfrac{-1}{2(2n+1)}\right| = \dfrac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, получили неравенство $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, откуда

$2n+1 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$; $2n > \dfrac{1}{2\varepsilon} - 1$, значит $n > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

Если положить $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right]$, то при всех $n > N$ неравенство (*) будет выполняться. Таким образом, по произвольно заданному числу $\varepsilon > 0$ мы можем найти такой номер $N = N(\varepsilon)$ (а именно, $N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right]$), что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, а это по определению предела последовательности и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

4.1.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2-3}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела так, чтобы можно было применять теоремы о действиях над сходящимися последовательностями. (Почему нельзя было сразу применять эти теоремы?)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}} = \dfrac{1}{1} = 1$, получим окончательно $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+3} = 0 \cdot 1 = 0.$

Ответ: 0.

4.1.3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$.

Решение. Здесь в числителе и в знаменателе количество слагаемых с изменением n меняется, поэтому прежде, чем вычислять предел, необходимо преобразовать эти выражения.

Легко заметить, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$ – это сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии $S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$ имеем

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Аналогично, $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=2,$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0.$

Ответ: 2.

Задания для самостоятельного решения

4.1.4. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет предел, равный 0.

4.1.5. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n}{4n+5}\right\}$ имеет предел, равный $\frac{3}{4}$.

4.1.6. Доказать: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}=\frac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n-1}{e^n}=1$.

4.1.7. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+3n-7}{4n^2+n+8}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{n+1}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$.

ОТВЕТЫ: **4.1.7**. **1**) 3; **2**) 0; **3**) 0; **4**) 0,5; **5**) ∞; **6**) 0,5; **7**) 1,5; **8**) $\sqrt{3}$; **9**) –49.

4.2. Предел функции

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение того, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$.
2. Как может выглядеть график функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = 2$, если известно, что при $x \neq 2$ $f(x) > 5;\ f(2) = 1;\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$?
3. Дайте определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$.
4. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Чему равны пределы а) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + 10]$; б) $\lim\limits_{x \to a} 7f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to a}[-f(x)]$?
5. Пусть $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$. Чему равен $\lim\limits_{x \to 2}|f(x)|$?
6. Пусть $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$. Чему равен $\lim\limits_{x \to -2} f(|x|)$?
7. Дайте определение бесконечно большой функции при $x \to a$.
8. Какая функция называется бесконечно малой?
9. Можно ли утверждать, что $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$, если известно, что $\dfrac{1}{g(x)}$ является бесконечно большой функцией при $x \to \infty$?
10. Пусть $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ и $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \infty$. Чему равен $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

Решение примеров

4.2.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 8) = -5$. Дать геометрическую иллюстрацию. Указать множество значений независимой переменной *x*, при которых значения функции будут отличаться от предела (–5) менее, чем на 0,03.

Решение. Область определения функции $y = 3x - 8$ – вся числовая ось: $D = (-\infty; \infty)$.

В соответствии с определением конечного предела A функции $f(x)$ при $x \to a$, возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Если мы найдем такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, где $a = 1$, будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, где $f(x) = 3x - 8$ и $A = -5$, то утверждение $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 8) = -5$ будет доказано.

Итак, считая неравенство

$$|(3x - 8) - (-5)| < \varepsilon \qquad (1)$$

верным, преобразуем его. Имеем $|3x - 8 + 5| = |3x - 3|$, поэтому

$$3|x - 1| < \varepsilon\,. \qquad (2)$$

Отсюда $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ и потребовать выполнения неравенства

$$0 < |x-1| < \delta, \tag{3}$$

то неравенство (2), а вместе с ним и неравенство (1) будут справедливы. Итак, все условия определения предела выполнены, следовательно, число (–5) является пределом данной функции.

Если в частном случае положить $\varepsilon = 0{,}03$, то получим $\delta = \dfrac{0{,}03}{3} = 0{,}01$. Таким образом, при всех $1 - 0{,}01 < x < 1 + 0{,}01$, т.е. $x \in (0{,}99;\ 1{,}01)$ значения функции $y = 3x - 8$ будут отличаться от предела (–5) меньше, чем на 0,03.

Геометрически неравенству $0 < |x-1| < \delta$ соответствует окрестность точки $a = 1$ радиуса $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ на оси *Ox*, а неравенству $|(3x-8)-(-5)| < \varepsilon$ окрестность радиуса ε точки А = –5 на оси *Oy*.

По определению предела функции, если x принадлежит δ - окрестности точки $a = 1$, то соответствующая точка графика функции $y = 3x - 8$ будет находиться в полосе между прямыми $y = -5 - \varepsilon$ и $y = -5 + \varepsilon$ (рис.4).

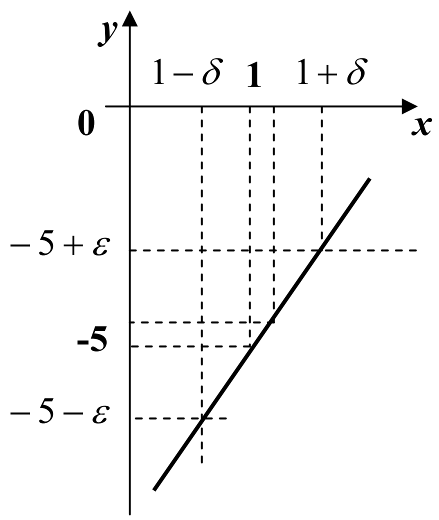


Рис. 4

4.2.2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$. Дать геометрическую иллюстрацию.

<u>Решение.</u> В соответствии с определением бесконечно большой функции (бесконечного предела) при $x \to a$ возьмем произвольное число $M > 0$. Чтобы доказать утверждение $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$, надо найти такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, где $a = 1$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$, где $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Итак, считая неравенство

$$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right| > M \qquad (4)$$

верным, преобразуем его. Имеем $\frac{1}{(x-1)^2} > M$; $(x-1)^2 < \frac{1}{M}$, откуда

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}. \qquad (5)$$

Если положить $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ и потребовать выполнения неравенства

$$0 < |x-1| < \delta, \qquad (6)$$

то неравенство (5), а следовательно, и неравенство (4) будут справедливы. Таким образом, все условия определения выполнены, и утверждение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ доказано.

Геометрически это означает, что для всех $x \in (1-\delta; 1+\delta)$ и $x \neq 1$ соответствующие точки графика функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ будут находиться выше прямой $y = M$, т.е. будут находиться в бесконечной полуполосе, ограниченной прямыми $x = 1-\delta$, $x = 1+\delta$ и $y = M$, причем $y > M$ (рис. 5).

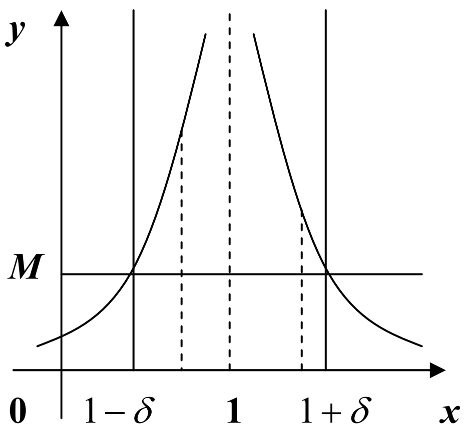


Рис. 5

4.2.3. Доказать, что при $x \to 0$ функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ предела не имеет.

Решение. При $x \to 0$ аргумент синуса $\frac{1}{x} \to \infty$. Положим $\frac{1}{x} = t \to \infty$. Функция $\sin t$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, следовательно, при неограниченном возрастании аргумента t данная функция периодически пробегает все свои значения

$\sin t \in [-1;1]$. Но это означает, что при возрастании t, т.е. при $x \to 0$, значения функции не могут отличаться от любого постоянного числа все менее и менее. Эти рассуждения дают возможность предположить, что при $x \to 0$ функция $\sin\frac{1}{x}$ предела не имеет.

Теперь проведем строгое доказательство. Из определения конечного предела A функции $f(x)$ при $x \to a$ вытекает, что если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то этот предел единственный. Следовательно, если взять последовательность точек x_n, сходящуюся (бесконечно приближающуюся) к точке a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ должна иметь предел, равный A.

Возьмем две последовательности точек x_n, сходящихся к 0, и найдем пределы соответствующих значений функции $\sin\frac{1}{x_n}$. Имеем:

1) $x_1 = \frac{2}{\pi};\ x_2 = \frac{2}{5\pi};\ x_3 = \frac{2}{9\pi};\ldots;x_n = \frac{2}{(4n-3)\pi}\ldots \to 0.$

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1;\ldots;\ \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\frac{(4n-3)\pi}{2} = 1;\ldots\ .$$

Последовательность 1, 1, 1, …, 1,… имеет предел, равный 1.

2) $x_1 = \frac{1}{2\pi};\ x_2 = \frac{1}{4\pi};\ x_3 = \frac{1}{6\pi};\ldots;\ x_n = \frac{1}{2n\pi}\ldots \to 0$.

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin 2\pi = 0;\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin 4\pi = 0;\ldots;\ \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin 2n\pi = 0;\ldots\ .$$

Последовательность 0, 0, 0, …, 0, … имеет предел, равный 0.

Выделенные последовательности значений функции $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ имеют различные пределы, следовательно, данная функция при $x \to 0$ предела не имеет.

4.2.4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4}{5x-2}$.

Решение. Применяя теоремы о пределах, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{5x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(5x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3) - \lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}(5x) - \lim\limits_{x\to 2}2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x - 4}{5\lim\limits_{x\to 2}x - 2} =$$

$$= \frac{2\cdot 2\cdot 2-4}{5\cdot 2-2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

4.2.5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}$.

Решение. При $x \to 3$ числитель $(x^2+5x-24) \to 0$ и знаменатель $(x^2-4x+3) \to 0$, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного.

Для вычисления предела преобразуем данную функцию в окрестности точки $a=3\ (x\neq 3)$:

$$\frac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+8)}{(x-3)(x-1)}=\frac{x+8}{x-1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+8}{x-1}=\dfrac{11}{2}=5{,}5$.

4.2.6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}$.

Решение. Так как при $x\to+\infty$ $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}\right)\to\infty$ и $\left(2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}\right)\to\infty$, то применять теорему о пределе частного нельзя. Преобразуем дробь, вынося в числителе и знаменателе за скобки высшую степень переменной (здесь $\sqrt{x}$) и производя сокращение:

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\dfrac{2\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}.$$

Учитывая, что при $x\to\infty$ $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно малые величины, и применяя теоремы о пределах, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

4.2.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби бесконечно малы. Чтобы вычислить предел, необходимо тождественно преобразовать дробь в окрестности точки $a=0$, полагая при этом $x\neq 0$. Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{4+x}+2$ и преобразуем дробь:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}.$$

К полученной дроби уже можно применять теоремы о пределах.

Окончательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

4.2.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (см. пример 4.2.3), то теорему о пределе произведения двух функций применять нельзя. Однако $\sin\frac{1}{x}$ является ограниченной функцией $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$, а так как $x\to 0$, то, применив теорему о том, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией, получаем $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

Задания для самостоятельного решения

4.2.9. Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left[5(x+1)-\frac{x}{x+7}\right]$; 3) $\lim\limits_{x\to +2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-14}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+7x+10}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+3x^3+4x^4}{3x^2+x^4+x^6}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{1-x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+5x-3}{5x^2-7x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{2x^2+7}$; 11) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x+5}{5x^2-8}$; 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{3x+1}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{4x+1}}$.

ОТВЕТЫ

Вопросы для самопроверки

4) а) $b+10$; б) $7b$; в) $-b$; 5) 1; 6) –3; 10) 0.

Задания

4.2.9. 1) 4; 2) $9\frac{7}{8}$; 3) $-\frac{1}{9}$; 4) $\frac{10}{3}$; 5) $\frac{3}{5}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) 2; 8) ∞; 9) $\frac{2}{5}$; 10) ∞; 11) 0; 12) 0; 13) 0; 14) 0; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 17) $-\frac{1}{56}$; 18) $-\frac{4}{3}$; 19) $-\frac{3}{4}$.

4.3. Замечательные пределы

I. Первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

Решение примеров

4.3.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{3}x\right)}{x}$.

Решение. Применяя первый замечательный предел при $\alpha=\sqrt{3}x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{3}x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}.$$

4.3.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}.$$

4.3.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)}{x}$.

Решение. Так как $tg(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

4.3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{x}$.

Решение. Положим $arctg(2x)=t$, тогда $2x=tg(t)$; $x=\dfrac{tg(t)}{2}$ и при $x\to 0$ $t\to 0$. Подставляя в предел, имеем

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{2}tg(t)}=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{tg(t)}{t}}=A$. Так как $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{tg(t)}{t}=1$ (см. пример 4.3.3), то $A=2\cdot\dfrac{1}{1}=2$. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{x}=2$.

Задания для самостоятельного решения

4.3.5. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 8x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{5x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\arcsin x}$; 7) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; 8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)-\sin(x)}{x^3}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{2}{x}\right)$.

ОТВЕТЫ. **4.3.5**. 1) 2; 2) $\dfrac{2}{7}$; 3) $\dfrac{7}{8}$; 4) 6,4; 5) 1,5; 6) 2; 7) –1; 8) $\cos a$; 9) $-\sin a$; 10) 0,5; 11) 2.

II. Второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=2{,}71828...$

Решение примеров

4.3.6. Вычислить $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{t}\right)^t$.

Решение. При $t\to\infty$ основание степени стремится к единице $1+\dfrac{a}{t}\to 1$, а показатель $t\to\infty$. Положим $\dfrac{a}{t}=x$, тогда $t=\dfrac{a}{x}$; при $t\to\infty$ переменная $x\to 0$. Применяя второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^t=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^a=e^a.$$

4.3.7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$.

Решение. Положим $-\dfrac{2}{n}=t$, тогда $n=-\dfrac{2}{t}$; при $n\to\infty$ переменная $t\to 0$. Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

4.3.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{3x+2}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)=\infty$, то есть мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для раскрытия этой неопределенности применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{3x+2}=\begin{bmatrix} x-3=t;\ x=t+3 \\ t\to\infty\ при\ x\to\infty \end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+4}{t}\right)^{3t+11}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{3t}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{11}\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{t}{4}}\right]^{12}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{11}=e^{12}\cdot 1=e^{12}.$$

Задания для самостоятельного решения

4.3.9. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{5n+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{6x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+4}\right)^{x-3}$; 7) $\lim\limits_{z\to 0}(1+2z)^{\frac{3}{z}}$; 8) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\dfrac{2}{3}t\right)^{\frac{5}{t}-6}$;

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+3ctg(x)\right)^{tg(x)}$.

ОТВЕТЫ. **4.3.9**. 1) e^2; 2) e^{-20}; 3) e^7; 4) e^2; 5) e^{-2}; 6) $e^{-\frac{7}{2}}$; 7) e^6; 8) $e^{-\frac{10}{3}}$; 9) e^3.

5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Вопросы для самопроверки

1. В каком случае говорят, что одна бесконечно малая величина имеет более высокий порядок малости, чем другая?
2. Какие величины называются эквивалентными бесконечно малыми?
3. Пусть $\alpha(x)\to 0;\ \beta(x)\to 0$ при $x\to 2;\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{1}{2}$. Что можно сказать о порядке малости $\alpha(x)$ и $\beta(x)$? Будут ли величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными?
4. Пусть при $x\to 1$ $\gamma(x)\to 1;\ \delta(x)\to 1$. Будут ли $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ эквивалентными бесконечно малыми?
5. Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x);\ \beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to x_0$. Чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$?
6. Пусть при $x\to a$ $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Чему равен $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}$?

Решение примеров

5.1. Доказать, что при $x\to 1$ бесконечно малые величины $\alpha(x)=1-x$ и $\beta(x)=1-\sqrt{x}$ будут одного порядка малости.

Решение. По определению, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного порядка при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, где $A = const$.

При $x \to 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x}\right) = 2 \neq 0.$

Следовательно, $\alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = 1-\sqrt{x}$ при $x \to 1$ имеют одинаковый порядок малости, что и требовалось доказать.

5.2. Сравнить при $x \to 0$ бесконечно малые величины $\alpha(x) = e^x - \cos x$ и $\beta(x) = x$, пользуясь известными эквивалентными бесконечно малыми.

Решение. При $x \to 0$ имеем $e^x - 1 \sim x;\quad \sin x \sim x;$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)+\left(1-\cos x\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$$

Следовательно, данные бесконечно малые величины являются эквивалентными.

5.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x + \ln(1+3x) - x^4}{4x + \sin^3 x + e^{tg(x^2)} - 1}$.

Решение. Воспользуемся теоремами:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин эквивалентна сумме части слагаемых, имеющих низший порядок малости.

2. Предел частного двух бесконечно малых величин равен пределу частного двух соответствующих эквивалентных бесконечно малых величин.

Имеем $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2;\ \ln(1+3x) \sim 3x;\ \sin^3 x \sim x^3;\ e^{tg(x^2)} - 1 \sim tg(x^2) \sim x^2.$

Отсюда, числитель $1-\cos x + \ln(1+3x) - x^4 \sim 3x$;

знаменатель $4x + \sin^3 x + e^{tg(x^2)} - 1 \sim 4x$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x + \ln(1+3x) - x^4}{4x + \sin^3 x + e^{tg(x^2)} - 1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4}.$

Задания для самостоятельного решения

5.4. Сравнить при $n \to \infty$ бесконечно малые величины:

а) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^3}$ и $v_n = \dfrac{n^2+1}{n^3}$; б) $u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ и $v_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$.

5.5. Сравнить при $x \to 0$ бесконечно малые величины:

а) $\alpha(x) = \sin x + tg(2x)$ и $\beta(x) = 3x$;

б) $\alpha(x)=\frac{1}{2}tg(2x)+3x^2$ и $\beta(x)=\frac{1}{8}x+x^2$;

в) $\alpha(x)=\sin^2 x$ и $\beta(x)=\sqrt{1+2x}-1$;

г) $\alpha(x)=\ln(1+x^2)$ и $\beta(x)=\arcsin(\sqrt{1+x^3}-1)$.

5.6. Вычислить пределы, пользуясь эквивалентными бесконечно малыми величинами:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(5x^2)}{2x\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{arctg(x)}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt[3]{1+6x^2}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2+\ln(1-2x)+3x^3+1-\cos x}{e^{3x^2}-2+\sqrt[5]{1-10x^3}+4x^5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-tg(2x)}{x^3}$.

ОТВЕТЫ. **5.4**. а) эквивалентны; б) одного порядка. **5.5**. а) эквивалентны; б) одного порядка; в) $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\beta(x)$; г) $\alpha(x)$ имеет более низкий порядок малости по сравнению с $\beta(x)$.
5.6. а) $\frac{5}{6}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) ∞; д) –4.

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение непрерывности функции в точке.
2. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, если $f(x)$ определена при $x = 2$ и $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$?
3. Что такое приращение функции?
4. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция. Возможно ли равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]=1$?
5. Можно ли утверждать, что $f(x)$ – непрерывна при $x = 0$, если $f(0)$ существует и $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-f(0)\right]=0$?
6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = 2$. Можно ли утверждать, что $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ будет непрерывна при $x = 2$?
7. Какая функция называется непрерывной на отрезке $[a; b]$?
8. Где непрерывны все элементарные функции?
9. Какая точка называется точкой разрыва?
10. Какие бывают точки разрыва?
11. Чем отличаются точки разрыва I и II рода?
12. Будет ли $x = 0$ точкой разрыва для функции $f(x)=\begin{cases}x-a, & \text{при } x\le 0,\\ x^2-a, & \text{при } x>0\end{cases}$?
13. Что такое устранимый разрыв? В каком случае точка разрыва называется точкой устранимого разрыва?

14. Пусть $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$; $f(2)=3$. Будет ли $x=2$ точкой устранимого разрыва функции?

15. Будет ли точка a точкой устранимого разрыва функции, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$?

16. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=2$. Что можно сказать о $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, если известно, что а) x_0 – точка разрыва I рода; б) x_0 – точка разрыва II рода; в) x_0 – точка устранимого разрыва?

17. Классифицировать точки разрыва, приведенные на рис.6.

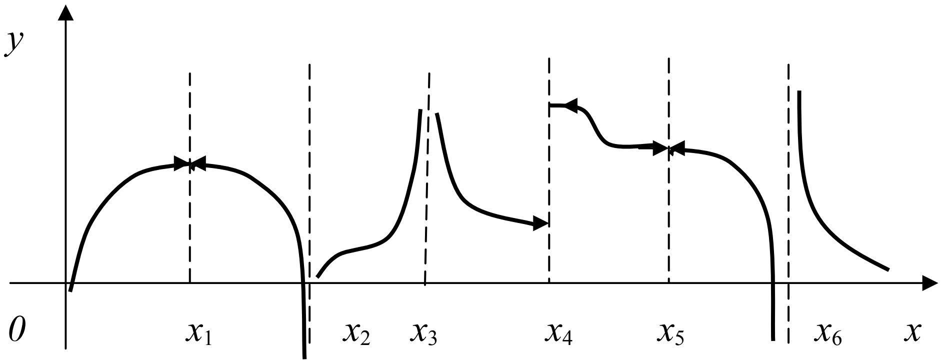


Рис. 6

Решение примеров

6.1. Доказать, что функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна в точке $x_0=2$.

Решение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

У нас область определения функции $f(x)=3x^2-4$ – все действительные числа ($D(f)=(-\infty;\infty)$), следовательно, функция определена в точке и в окрестности точки $x_0=2$. Вычислим значение функции в этой точке $f(2)=3\cdot 2^2-4=8$. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4)=8$, то условие $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ выполнено, следовательно, данная функция непрерывна в точке $x_0=2$.

6.2. Доказать, что функция $f(x)=2x^2+3x-4$ непрерывна в интервале $(-\infty;+\infty)$.

Решение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в любой точке этого множества. Таким образом, для доказательства непрерывности функции на $(-\infty;+\infty)$ надо доказать непрерывность ее в произвольной точке $x\in(-\infty;+\infty)$. Воспользуемся вторым определением непрерывности функции в точке. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$, где $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Область определения функции $f(x)=2x^2+3x-4$ – вся числовая ось. Возьмем произвольное значение аргумента *x*, придадим ему приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=(2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-4)-(2x^2+3x-4)=$$

$$=4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+3\Delta x=\Delta x(4x+2\Delta x+3).$$

При $\Delta x\to 0$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x(4x+2\Delta x+3)\right]=0.$

Следовательно, функция $f(x)=2x^2+3x-4$ непрерывна в выбранной точке *x*. Так как *x* – произвольная точка из (–∞; +∞), то рассматриваемая функция непрерывна в любой точке интервала (–∞; +∞), а следовательно, непрерывна на всем этом интервале.

6.3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ x, & \text{при } 0\le x<1;\\ 4x-x^2, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$

Построить график этой функции.

Решение. Для исследования используем теорему о том, что всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Как известно, функция называется элементарной, если она составлена из основных элементарных функций и чисел с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции. Следовательно, элементарная функция задается только одной формулой. Данная в задаче функция задается различными формулами на разных участках области определения, следовательно, не является элементарной. Однако если расчленить область определения $D(f)=(-\infty;+\infty)$ на отдельные интервалы $D_1(f)=(-\infty;0)$; $D_2(f)=(0;1)$; $D_3(f)=(1;+\infty)$, то на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ окажется элементарной и, следовательно, непрерывной. Таким образом, неисследованными остались только граничные точки полученных интервалов $x_1=0$; $x_2=1$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то должно выполняться условие $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Итак, рассмотрим точки $x_1=0$ и $x_2=1$:

а) $x_1=0: f(x_1)=f(0)=0;$ $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=0;$ $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=0$.

Таким образом, в точке $x_1=0$ функция $f(x)$ непрерывна.

б) $x_2=1$: $f(x_2)=f(1)=-1^2+4\cdot 1=3$;

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x=1;\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(-x^2+4x)=3.$$

Таким образом, точка $x_2=1$ является точкой разрыва функции $f(x)$. Поскольку односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то эта точка является точкой разрыва I рода.

Число $h=f(1+0)-f(1-0)=3-1=2$ называется скачком данной функции в точке разрыва $x_2=1$.

График данной функции имеет вид (рис.7).

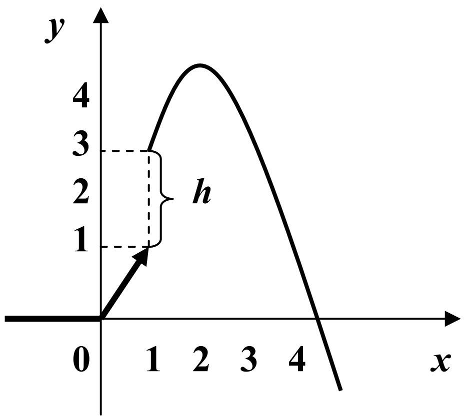


Рис.7

6.4. Какого рода разрывы имеют функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ и $y=\dfrac{\cos x}{x}$ в точке $x_0=0$?

Решение. Обе функции элементарные, следовательно, непрерывны в области их определения $D(y)=\{x\in R \mid x\neq 0\}$. Точка $x_0=0$ является изолированной точкой, в которой данные функции не определены, следовательно, она является точкой разрыва функций.

Для функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$ следовательно, эта функция имеет в точке $x_0=0$ устранимый разрыв.

Для функции $y=\dfrac{\cos x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\cos x}{x}=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cos x}{x}=+\infty;$ следовательно, эта функция имеет в точке $x_0=0$ разрыв II рода.

Задания для самостоятельного решения

6.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+2}$ в точке $x_0=1$.

6.6. Доказать непрерывность функции $f(x)=x+\ln x$ в области $D=(0;+\infty)$.

6.7. Исследовать характер точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$.

6.8. Исследовать на непрерывность функции, найти точки разрыва и классифицировать их:

1) $y=\dfrac{1}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$; 3) $y=arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 4) $y=2^{\frac{1}{x}}$;

5) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ при } x<0\\ x, \text{ при } 0\le x<2\\ 3, \text{ при } x\ge 2;\end{cases}$ 6) $y=3^{\frac{x}{4-x^2}}$; 7) $y=\cos\dfrac{1}{x}$; 8) $y=1-x\sin\dfrac{1}{x}$.

6.9. Убедиться в том, что уравнение $x^5-3x-1=0$ имеет, по крайней мере, один корень, заключенный между 1 и 2.

6.10. Функция $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ на концах отрезка [1;3] принимает значения разных знаков, но на этом отрезке в ноль не обращается. Какие условия теоремы о существовании корня функции на отрезке не выполняются?

ОТВЕТЫ.

Вопросы для самопроверки: 12) нет; 14) да; 15) нет;

17) в точках $x_1,\ x_5$ – устранимый разрыв первого рода;
в точке x_4 – неустранимый разрыв первого рода;
в точках $x_2,\ x_3, x_6$ – разрыв второго рода.

Задания: **6.5**. Непрерывна; **6.7**. $x = 0$ точка разрыва I рода; **6.8**. 1) $x = 2$ точка разрыва II рода; 2) $x = 2$ точка разрыва II рода; 3) $x = 0$ точка разрыва I рода; 4) $x = 0$ точка разрыва II рода; 5) $x = 0$ точка разрыва II рода; $x = 2$ точка разрыва I рода; 6) $x=\pm 2$ точки разрыва II рода; 7) $x = 0$ точка разрыва II рода; 8) $x = 0$ точка устранимого разрыва.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы для самопроверки

1. Что такое комплексное число?
2. Как геометрически изображают множество комплексных чисел?
3. Где на комплексной плоскости расположены чисто мнимые числа?
4. Какие числа называются сопряженными? Как они расположены на комплексной плоскости?
5. В какой форме можно записать комплексное число?
6. Как найти модуль комплексного числа, зная его действительную и мнимую части?
7. Что такое аргумент комплексного числа?
8. Пусть $z_1 = z_2$. что можно сказать о:

   а) $\operatorname{Re} z_1$ и $\operatorname{Re} z_2$; б) $|z_1|$ и $|z_2|$; в) $\arg z_1$ и $\arg z_2$?
9. Известно, что $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$; $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$. Можно ли утверждать, что $z_1 < z_2$?
10. Можно ли утверждать, что $z_1 > z_2$, если $|z_1| > |z_2|$; $\arg z_1 = \arg z_2 \ne 0$?
11. Какие действия можно производить над комплексными числами?
12. Пусть $z_1^3 = z_2$. Верно ли, что:

    а) $|z_1|^3 = |z_2|$; б) $\arg z_1 \ne \arg z_2$? Как связаны между собой $\arg z_1$ и $\arg z_2$?

13. Что можно сказать о числах x и y, если точка, изображающая число $x+iy$, лежит а) на оси Ox; б) на оси Oy; в) на биссектрисе первого квадранта?
14. Где расположены точки комплексной плоскости, удовлетворяющие условию: а) $|z| = const$; б) $\arg z = const$; в) $\operatorname{Re} z = const$; г) $\operatorname{Im} z = const$?

Решение примеров

7.1. Записать число $i-\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа; $\varphi = \arg z$ – главное значение аргумента комплексного числа, такое, что $tg\varphi = \frac{y}{x}$ и $-\pi < \varphi \le \pi$.

У нас $z = i - \sqrt{3}$, т.е. $x = \operatorname{Re} z = -\sqrt{3}$; $y = \operatorname{Im} z = 1$.

Найдем $|z|$: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

Чтобы найти $\arg z$, определим $\operatorname{tg}\varphi$: $tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как точка, соответствующая числу z, находится во II четверти (рис.8), то $\arg z = \varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Таким образом, тригонометрическая форма числа $i-\sqrt{3}$ имеет вид $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Показательная форма записи комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид $z = re^{i\varphi}$, поэтому в нашем случае показательная форма числа $z = -\sqrt{3} + i$ записывается $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

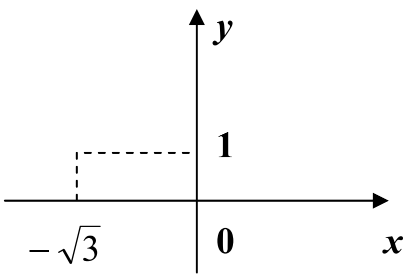


Рис. 8

7.2. Пусть $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 1 + i$. Вычислить $\frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{2}\left(z_1 - \bar{z}_2\right)$.

Решение.
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{1+i}=\frac{(3+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3+4i-3i-4i^2}{1-i^2}=\frac{3+4+i}{1-(-1)}=\frac{7+i}{2}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i;$$
$\bar{z}_2=1-i$; $\quad z_1-\bar{z}_2=3+4i-(1-i)=2+5i$.

Окончательно, $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{1}{2}\left(z_1-\bar{z}_2\right)=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{2}\left(2+5i\right)=\dfrac{9}{2}+3i$.

7.3. Пусть $z_1=6\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\quad z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Вычислить: а) $z_1\cdot z_2$; б) $z_1:z_2$; в) $\left(z_2\right)^3$.

Решение. При выполнении действий умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, используют следующие правила:
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right);$$
$$z_1:z_2=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),$$
а также формулу Муавра (для натуральных n): $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Таким образом,
$$z_1\cdot z_2=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=12i;$$
$$z_1:z_2=\frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i;$$
$$\left(z_2\right)^3=2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8i.$$

7.4. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Воспользуемся формулой
$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$ где $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Для этого представим число 1 в тригонометрической форме: $1=\cos 0+i\sin 0$. Тогда $\sqrt[3]{1}=\cos\dfrac{0+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{0+2\pi k}{3}$, где $k=0, 1, 2$.

Итак, находим три значения корня:
$$z_1=\cos 0+i\sin 0=1;$$
$$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

7.4. Записать в тригонометрической и показательной формах и построить числа:

а) $z = 2 + 2i$; б) $z = \sqrt{3} - i$; в) $z = -1 - i\sqrt{3}$; г) $z = -3$; д) $z = 2i$.

7.5. Записать и построить числа, сопряженные к данным:

а) $2 + i$; б) $1 - 3i$; в) $-4i$; г) 3.

7.6. Вычислить:

а) $(2 - i) + (8 + 2i) - (4 + 3i)$; б) $(1 - i)(3 + 2i)$; в) $\dfrac{2}{1 + i\sqrt{3}}$; г) $(1 - i\sqrt{3})^3$.

В пунктах в) и г) выполнить также действия в тригонометрической форме.

7.7. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1 + i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[5]{32}$.

7.8. Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z| = 3$; б) $|z| > 3$; в) $|z - 2| \le 1$; г) $|z + i| > 2$; д) $\operatorname{Re} z \le 4$; е) $\operatorname{Im} z > -1$.

ОТВЕТЫ.

Вопросы для самопроверки: 8) а), б), в) равны; 9)–10) нельзя;
13) а) $y = 0$; б) $x = 0$; в) $x = y > 0$; 14) а) окружность; б) луч;
в) прямая параллельная оси *0y*; г) прямая параллельная оси *0x*.

Задания: **7.4**. а) $2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; б) $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$;
в) $2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$; г) $3(\cos\pi + i\sin\pi)$; д) $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

7.5. а) $2 - i$; б) $1 + 3i$; в) $4i$; г) 3;

7.6. а) $6 - 2i$; б) $5 - i$; в) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) –8.

7.7. б) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_3 = -i$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
(Справочный материал)

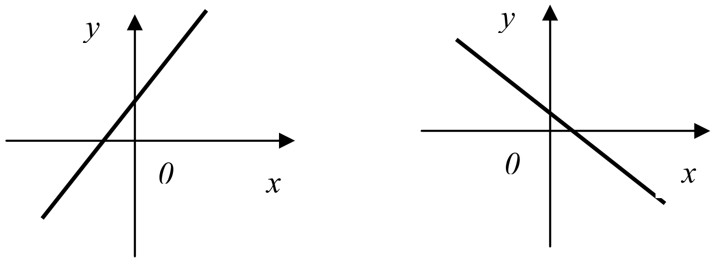
1. Степенная функция

1. *Постоянная функция* $\boldsymbol{y = const}$.

   Область определения D[y]=(– ∞;+ ∞). Графиком является прямая, параллельная оси Ox.

2. *Линейная функция* $\boldsymbol{y = ax+b}$.

   Область определения D[y]=(– ∞;+ ∞). Графиком является прямая (рис. П1).



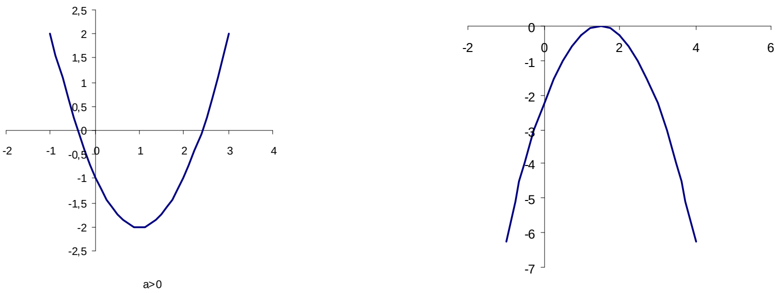
$a > 0$ $a < 0$

Рис. П1. График линейной функции

3. *Квадратичная функция* $\boldsymbol{y = ax^2+bx+c}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$).

   Область определения D[y]=(– ∞;+ ∞). Графиком является парабола (рис. П2).

Точки пересечения с осью Ox: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$. При $D = 0$ парабола касается оси Ox, при $D < 0$ точек пересечения с осью Ox нет.



$a > 0$; $D > 0$ $a < 0$; $D = 0$

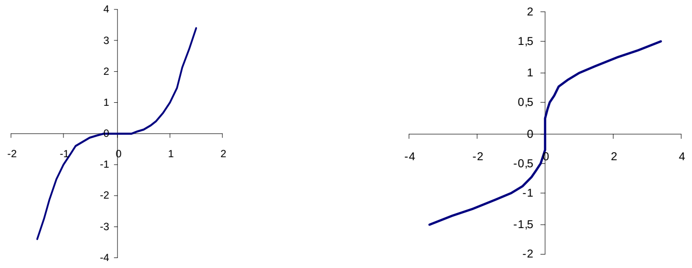
Рис. П2. График квадратичной функции

4. *Кубическая функция.*

   4.1. Простейший вид $\boldsymbol{y = x^3}$. Область определения D[y]=(– ∞;+ ∞). Графиком является кубическая парабола (рис. П3-а).

4.2. $y = \sqrt[3]{x}$.

Область определения D[y]=($-\infty$;$+\infty$). Графиком является кубическая парабола (рис. П3-б).

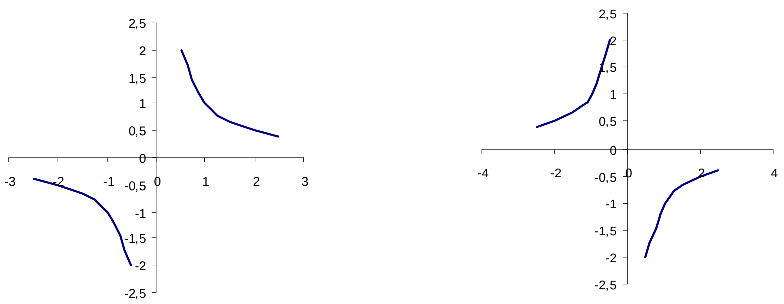


а) $y = x^3$ б) $y = \sqrt[3]{x}$

Рис. П3. Кубические параболы

5. *Обратная пропорциональность* $y = \dfrac{a}{x}$.

Область определения D[y]=($-\infty$;0)$\cup$(0;$+\infty$). Графиком является гипербола (рис. П4).

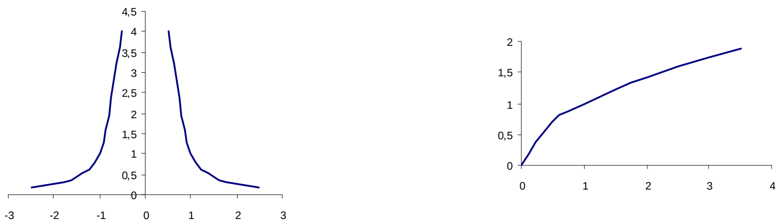


$a > 0$ $a < 0$

Рис. П4. График обратной пропорциональности

6. $y = \dfrac{1}{x^2}$. Область определения D[y]=($-\infty$;0)$\cup$(0;$+\infty$). График на рис. П5-а.

7. $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$. Область определения D[$y$]=[0;$+\infty$). Графиком является верхняя часть параболы (рис. П5-б).



а) $y = 1/x^2$ б) $y = \sqrt{x}$

Рис. П5. Графики степенных функций

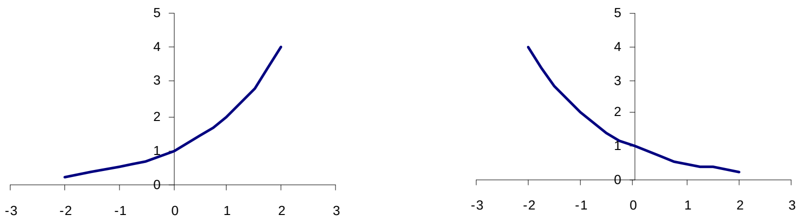
2. Показательная функция

$$y = a^x \qquad (a>0;\ a \neq 1)$$

Область определения D[y]=(– ∞;+ ∞); множество значений E[y]=(0;+ ∞). График на рис. П6.

Свойства:

$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$; $\qquad a^u / a^v = a^{u-v}$; $\qquad (a^u)^v = a^{uv}$; $\qquad a^0 = 1$.



$a>1$ $\qquad\qquad$ $0<a<1$

Рис. П6. График показательной функции $\boldsymbol{y = a^x}$

3. Логарифмическая функция

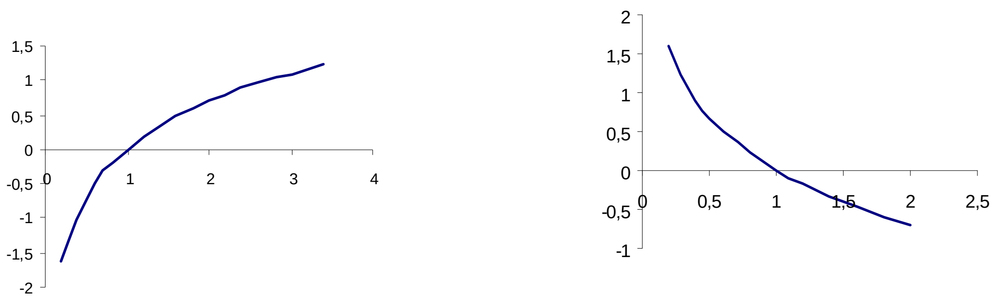
$$y = \log_a x \qquad (a>0;\ a \neq 1)$$

Область определения D[y]=(0;+ ∞); множество значений E[y]=(– ∞;+ ∞). График на рис. П7.

Свойства:

$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$; $\qquad \log_a(u^v) = v \cdot \log_a u$;

$\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$; $\qquad \log_a 1 = 0$.



$a>1$ $\qquad\qquad$ $0<a<1$

Рис. П7. График логарифмической функции $y = \log_a x$

4. Тригонометрические функции

1) *Синус* $y = \sin x$

Область определения $D[y]=(-\infty;+\infty)$; множество значений $E[y]=[-1;+1]$.

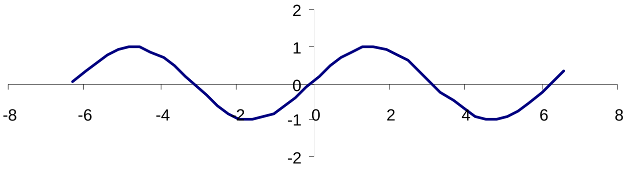


Рис. П8. График функции $y = \sin x$

2) *Косинус* $y = \cos x$

Область определения $D[y]=(-\infty;+\infty)$; множество значений $E[y]=[-1;+1]$.

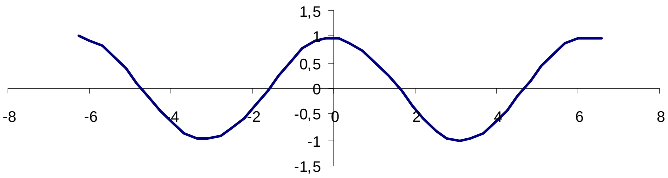


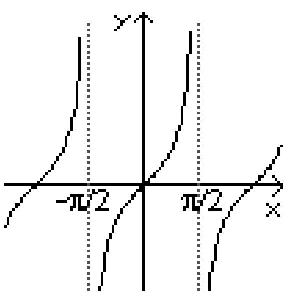
Рис. П9. График функции $y = \cos x$

3) *Тангенс* $y = \mathrm{tg}x$

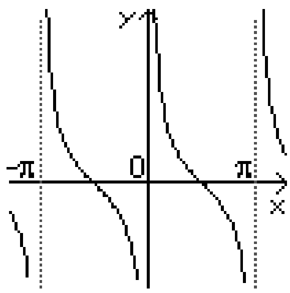
Область определения $D[y]=(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$, $n\in Z$; множество значений $E[y]=(-\infty;+\infty)$. График на рис. П10-а.

4) *Котангенс* $y = \mathrm{ctg}x$

Область определения $D[y]=(\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$; множество значений $E[y]=(-\infty;+\infty)$. График на рис. П10-б.



а) $y = \mathrm{tg}x$



б) $y = \mathrm{ctg}x$

Рис. П10. Графики функций а) $y = \mathrm{tg}x$ б) $y = \mathrm{ctg}x$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Вариант 1

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}-2}+\lg(x^2-2x-3)$; б) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=2^{x-1}+3$; б) $y=\log_{0,1}(x+1)$; в) $y=|2\sin 3x|$.

3. Построить кривую $\rho=2\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h=\dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$, $t\in[0;\,2\pi]$, $h=\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}-2}+\log_{0,5}(x^2-5x+6)$; б) $y=\arccos\dfrac{(x+2)^3}{x^3+8}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=(0{,}5)^{x+1}-2$; б) $y=\log_2(x-2)$; в) $y=|2\cos 2x|$.

3. Построить кривую $\rho=2(1+\cos\varphi)$ в полярной системе координат с шагом $h=\dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t^3}{1+t^2} \end{cases}$, $t\in[-3;\,3]$, $h=0{,}25$.

Вариант 3

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}+3}+\log_3(2x^2-5x-3)$; б) $y=\arcsin\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = 3^{x-2} + 1$; б) $y = \log_{1/3}(x+1)$; в) $y = -3\sin 2x$.

3. Построить кривую $\rho = 3\sin\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0; 4\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 4

1. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{2x+4}{x+5} - 2} + \log_{1/4}(x^2 + 3x - 4)$; б) $y = \arccos\dfrac{(x+4)^3}{x^3 + 64}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} - 2$; б) $y = \log_4(x-3)$; в) $y = 2\cos 4x$.

3. Построить кривую $\rho = \dfrac{4}{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{2x-5}{x+1} - 1} + \log_5(5x^2 - 13x - 6)$; б) $y = \arcsin\dfrac{x^2 - 25}{x^3 - 125}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = 5^{x-2} + \dfrac{1}{2}$; б) $y = \log_{0,5}(x+4)$; в) $y = |5\sin 2x|$.

3. Построить кривую $\rho = 5\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $t\in[-0{,}8;\ 3]$, $h = 0{,}2$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt[6]{\dfrac{3x+2}{2x-3}} + 1 + \log_6(2x^2 - 3x + 20)$; б) $y = \arccos\dfrac{(x+6)^3}{x^3+216}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{x+1} - 3$; б) $y = \log_6(x-5)$; в) $y = -2\cos 6x$.

3. Построить кривую $\rho = 4^{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $t \in [0;\ 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+7}} + 2 + \log_{1/7}(6 + 7x - 3x^2)$; б) $y = \arcsin\dfrac{4x^2-9}{8x^3-27}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 7^{x-2} + 1$; б) $y = \log_{1/7}(x+5)$; в) $y = |3\sin 2x|$.

3. Построить кривую $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{7t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{7t^3}{1+t^2} \end{cases}$ $t\in[-3;\ 3]$, $h = 0{,}25$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{3x+4}-1}+\log_8(5x+3-2x^2)$; б) $y=\arccos\dfrac{1-4x^2}{1-8x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+2}-3$; б) $y=\log_8(x+2)$; в) $y=-3\cos 4x$.

3. Построить кривую $\rho=8\sin\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h=\dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=8t-8\sin t \\ y=8-8\cos t \end{cases}$, $t\in[0;\,4\pi]$, $h=\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-5}-2}+\log_{0,9}(2x^2+3x-2)$; б) $y=\arcsin\dfrac{(x+9)^3}{x^3+729}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=9^{x-3}+1$; б) $y=\log_{2/9}(x-2)$; в) $y=|2\cos 3x|$.

3. Построить кривую $\rho=2(1-\cos\varphi)$ в полярной системе координат с шагом $h=\dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=9\cos^3 t \\ y=9\sin^3 t \end{cases}$ $t\in[0;\,2\pi]$, $h=\dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{4x+3}-1}+\lg(x^2-4x+3)$; б) $y=\arccos\dfrac{9x^2-4}{27x^3-8}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=2+10^{x-3}$; б) $y=\log_{0,1}(x+1)$; в) $y=5\sin 2x$.

3. Построить кривую $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $t \in [-0,8;\ 3]$, $h = 0,2$.

Вариант 11

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2} + 1} + \log_{0,1}(4 - 2x - x^2)$; б) $y = \arcsin\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{x+2} - 5$; б) $y = \log_9(x-3)$; в) $y = -|\cos 2x|$.

3. Построить кривую $\rho = 3 + 3\cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 2\cos t + 2t\sin t \\ y = 2\sin t - 2t\cos t \end{cases}$ $t \in [0;\ 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 12

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{1}{2}} - \log_2(5x - 6 - x^2)$; б) $y = \arccos\dfrac{4 - 9x^2}{27x^3 - 8}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 2 + 2^{x-3}$; б) $y = \log_{0,5}(x+3)$; в) $y = 2\sin 3x$.

3. Построить кривую $\rho = 2\cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3t^3}{1+t^2} \end{cases}$ $t \in [-3; 3]$,

$h = 0{,}25$.

Вариант 13

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{4 - \dfrac{x+3}{3x-1}} \cdot \log_{1/3}(3+5x-2x^2)$; б) $y = \arcsin\dfrac{(x-3)^3}{x^3-27}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$; б) $y = \log_3(x-1)$; в) $y = \dfrac{1}{3}\cos 3x$.

3. Построить кривую $\rho = \dfrac{3}{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$, $t \in [0; 4\pi]$,

$h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 14

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \log_4(4 - x^2 - 3x) - \sqrt[6]{1 - \dfrac{4x+1}{x+5}}$; б) $y = \arccos\dfrac{x^2-16}{x^3-64}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 1 + 4^{x-2}$; б) $y = \log_{0,25}(x+1)$; в) $y = -\sin\dfrac{x}{4}$.

3. Построить кривую $\rho = 3^{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$,

$h = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 15

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{2 - \dfrac{x+5}{2x-1}} + \log_{1/5}(6 - 5x^2 + 13x)$; б) $y = \arcsin\dfrac{(x+5)^3}{x^3+125}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 2$; б) $y = \log_5(x-3)$; в) $y = |\cos\frac{x}{2}|$.

3. Построить кривую $\rho = 3(1-\cos\varphi)$ в полярной системе координат с шагом $h = \frac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{15t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{15t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $t \in [-0,8;\ 3]$, $h = 0,2$.

Вариант 16

1. Найти область определения функции:

а) $y = \log_{1/6}(3x - 20 - 2x^2) - \sqrt[4]{2 - \frac{3x+1}{x-2}}$; б) $y = \arccos\frac{36-x^2}{x^3-216}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = 1 + 6^{x-3}$; б) $y = \log_{1/6}(x+2)$; в) $y = \frac{1}{2}\sin 3x$.

3. Построить кривую $\rho = 6\cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \frac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t(t^2-1)}{1+t^2} \end{cases}$ $t \in [-3;\ 3]$, $h = 0,25$.

Вариант 17

1. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\frac{x+7}{7x-1} - 1} + \log_7(2 - 3x - 2x^2)$; б) $y = \arcsin\frac{(x+0,5)^3}{x^3+0,125}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

а) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} - 2$; б) $y = \log_7(x-4)$; в) $y = \frac{1}{7}\sin 2x$.

3. Построить кривую $\rho = 7\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0;\, 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{12}$.

Вариант 18

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{2 - \dfrac{x-1}{8x+1}} - \log_{0,8}(3 - 5x + 2x^2)$; б) $y = \arcsin\dfrac{4 - 9x^2}{8 - 27x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 2 + 8^{x-1}$; б) $y = \log_{1/8}(x+2)$; в) $y = |\,0{,}8\cos 4x\,|$.

3. Построить кривую $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 8\cos t + 8t\sin t \\ y = 8\sin t - 8t\cos t \end{cases}$ $t \in [0;\, 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 19

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 5} - \log_9\left(\dfrac{x + 0{,}9}{2x - 1} + 2\right)$; б) $y = \arccos\dfrac{(3 + x)^3}{27 + x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 2 + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-3}$; б) $y = \log_3(x + 2)$; в) $y = |\sin 0{,}9x\,|$.

3. Построить кривую $\rho = 2\sin 3\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{18}$ (10°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0;\, 4\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 20

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{x+5}-1}\cdot\ln(6-5x-x^2)$; б) $y=\arcsin\dfrac{(x-2)^3}{8-x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=2^{x+1}-5$; б) $y=\log_{0,5}(x-2)$; в) $y=-3\cos 2x$.

3. Построить кривую $\rho=2^{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=\dfrac{2(t^2-1)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t(t^2-1)}{1+t^2} \end{cases}$ $t\in[-3;\,3]$,

   $h = 0{,}25$.

Вариант 21

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{3x-1-x^2}+\log_2\left(1-\dfrac{x+2}{x-1}\right)$; б) $y=\arcsin\dfrac{(2x+1)^3}{1+8x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+3$; б) $y=\log_2(x+3)$; в) $y=2\cos\dfrac{x}{3}$.

3. Построить кривую $\rho=\dfrac{3}{\varphi}$ в полярной системе координат с шагом $h = 1$ рад.

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $t\in[0;\,2\pi]$,

   $h=\dfrac{\pi}{12}$.

Вариант 22

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{x^2+2x+\dfrac{1}{3}}+\sqrt{\log_3\dfrac{x-3}{x+3}}$; б) $y=\arccos\dfrac{(4+x)^2}{64+x^3}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3}$; б) $y=\log_{2,2}(x-4)$; в) $y=|2\sin 3x|$.

3. Построить кривую $\rho = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0;\, 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 23

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}} + \sqrt{\log_2 \dfrac{x-2}{x+2}}$; б) $y = \arcsin \dfrac{(7-x)^3}{49 - 14x + x^2}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+4}$; б) $y = \lg(x+3)$; в) $y = \cos(\dfrac{3\pi}{2} + 2x)$.

3. Построить кривую $\rho = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 3\cos t + 3t\sin t \\ y = 3\sin t - 3t\cos t \end{cases}$ $t \in [0;\, 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 24

1. Найти область определения функции:

   а) $y = \sqrt{\log_2 \dfrac{x+2}{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$; б) $y = \arccos \dfrac{x^2+1}{x^4-1}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y = 4 - 3^{x+1}$; б) $y = |\log_{0,25}(x+1)|$; в) $y = \sin(\pi - x)$.

3. Построить кривую $\rho = 1 + \cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h = \dfrac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;\, 2\pi]$, $h = \dfrac{\pi}{12}$.

Вариант 25

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{x^2-2x+\frac{1}{2}}+\log_3\left(3+\frac{2x-1}{x}\right)$; б) $y=\arcsin\frac{x^3-1}{1+x+x^2}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=4^{x+1}-3$; б) $y=|\lg(x+3)|$; в) $y=2\cos(3x-\frac{\pi}{2})$.

3. Построить кривую $\rho=1-\cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h=\frac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases}x=5\cos t\\ y=5\sin t\end{cases}$, $t\in[0;\,2\pi]$; $h=\frac{\pi}{12}$.

Вариант 26

1. Найти область определения функции:

   а) $y=\sqrt{x^2-2x+2}-\log_{0,6}\left(\frac{x-1}{3x}+2\right)$; б) $y=\arcsin\frac{1-x^4}{1-x^2}$.

2. Построить графики функций методом сдвигов и деформаций:

   а) $y=2+(0{,}6)^{x-6}$; б) $y=\log_8(x+8)$; в) $y=|2\cos 2x|$.

3. Построить кривую $\rho=6\cos\varphi$ в полярной системе координат с шагом $h=\frac{\pi}{12}$ (15°).

4. Построить кривую, заданную параметрически: $\begin{cases}x=6(t-\sin t)\\ y=6(1-\cos t)\end{cases}$, $t\in[0;\,4\pi]$, $h=\frac{\pi}{4}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Задания к вариантам:

1. Вычислить пределы (неопределенности вида $\frac{0}{0}$).
2. Вычислить пределы (неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$).
3. Применяя эквивалентные бесконечно малые величины, вычислить предел.
4. Исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва; указать, какого они рода; подсчитать скачок функции в точках разрыва I рода; построить схематично график функции вблизи точки разрыва.

Вариант 1

1. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 4. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right), & \text{при } -\infty < x \le 1,\\ 6-5x, & \text{при } 1<x<3,\\ x-3, & \text{при } 3\le x<\infty.\end{cases}$

Вариант 2

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)-\sin x}{x^3}$. 4. $f(x)=\begin{cases}-2x^2, & \text{при } x\le 3;\\ 3x, & \text{при } x>3.\end{cases}$

Вариант 3

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$. 4. $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

Вариант 4

1. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$. 4. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

Вариант 5

1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\log_6\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$. 4. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$.

Вариант 6

1. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6\sin x)}{\sin x}$. 4. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Вариант 7

1. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{2x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$. 4. $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если } x<2;\\ x^2-1, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

Вариант 8

1. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$. 4. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)$.

Вариант 9

1. а) $\lim\limits_{x\to-9}\dfrac{81-x^2}{729+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}-2^{-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$. 4. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант 10

1. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$. 4. $f(x)=\operatorname{tg}(x)$.

Вариант 11

1. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2(x)}{3x}$. 4. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

Вариант 12

1. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg}(x) + 2\sin^2 x + 5x^4}$. 4. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x\neq 0; \\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$

Вариант 13

1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\right)^2\cdot\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)}$. 4. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$.

Вариант 14

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-9^x}{3^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\operatorname{tg}^3(x)-6\sin^2 x+x-5x^3}$. 4. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Вариант 15

1. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2(x)\right)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$. 4. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\leq 1; \\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x>1. \end{cases}$

Вариант 16

1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x-\left(1-tg(x)\right)}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sin 2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2x^2-1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-6x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$. 4. $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$.

Вариант 17

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1+tg 2x)}$. 4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Вариант 18

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{x+\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)}{\arcsin 2x}$. 4. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Вариант 19

1. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3+\sqrt{2x+1}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$. 4. $f(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

Вариант 20

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x)}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x+4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+tg(2x))}$. 4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{если } x\neq 2;\\ 0, & \text{если } x=2.\end{cases}$

Вариант 21

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2x-3x^2+4x^3\right)}{\ln\left(1-x+2x^2-7x^3\right)}$. 4. $f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2, & \text{если } |x|<2;\\ 2{,}5, & \text{если } |x|=2;\\ 3, & \text{если } |x|>2.\end{cases}$

Вариант 22

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$. 4. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{x-2}\right)$.

Вариант 23

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{1-\sqrt{1+x+x^2}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$. 4. $f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x=0 \text{ и } x=\pm 2;\\ 4-x^2, & \text{если } 0<|x|<2;\\ 4, & \text{если } |x|>2.\end{cases}$

Вариант 24

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$. 4. $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$.

Вариант 25

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{3x^2}{15x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.   4. $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 26

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7x^2+5x^4-4}{x+x^2+1+x^4}$;   б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.   4. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2}$.

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
(задачи и упражнения)

Методические указания

Составитель ***Карпилова Ольга Михайловна***

Редактор Ю. Н. Л и т в и н о в а
Доверстка Ю. Н. Л и т в и н о в а

Подписано в печать 10.10.2008. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,5
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-107/2008

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34