МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Введение в функциональный анализ.
Ряды Фурье.
Интегралы, зависящие от параметра.

Электронные методические указания
к практическим занятиям

САМАРА
2011

УДК 517.518

Составитель**: Коновалова Елена Игоревна**

Рецензент: Завершинский И. П., д.ф.-м.н., профессор, заведующий каф. физики Самарского государственного университета им. С. П. Королева.

Введение в функциональный анализ. Ряды Фурье. Интегралы, зависящие от параметра [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания к прак. работам / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т. им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. Е. И. Коновалова. – Электрон. текстовые и граф. дан. (0,5 Мбайт). - Самара, 2011. – 1 эл. опт.диск (CD-ROM).

В пособии приведены методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Функциональный анализ».

Учебное пособие предназначено для студентов 6 факультета, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» 010400.62 и изучающих дисциплину «Функциональный анализ» в 5 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

Введение в функциональный анализ.

Занятие 1. Метрические пространства.

1. Метрические пространства.

Множество X называется *метрическим пространством*, если на совокупности упорядоченных пар (x,y) элементов этого пространства определена такая неотрицательная функция $\rho(x,y)$, называемая расстоянием (или метрикой), что:

1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$, $x,y\in X$;
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для всех $x,y\in X$;
3) $\rho(x,y)\le \rho(x,z)+ \rho(z,y)$ для всех $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называют *точками*.

В метрическом пространстве X *открытым шаром* $B(x_0, R)$ с центром в точке x_0 радиуса $R>0$ называют множество $B(x_0, R)=\{x\in X: \rho(x,x_0)<R\}$. Множество точек $B(x_0, R)=\{\{x\in X: \rho(x,x_0)\le R\}$.называют *замкнутым шаром* с центром в точке x_0 радиуса R.

Открытый шар $U(x,\varepsilon)$ с центром в точке x радиуса $\varepsilon>0$ называют *ε-окрестностью* точки x.

2. Открытые и замкнутые множества.

Точку $x\in X$ называют *внутренней точкой* множества $E\subset X$, если у нее существует ε-окрестность, содержащаяся в E. Если каждая точка множества $E\subset X$ внутренняя, то E называют *открытым множеством*.

Точку x называют *точкой прикосновения* множества $E\subset X$, если каждая окрестность этой точки пересекается с множеством E. Совокупность всех точек прикосновения множества $E\subset X$ называют его *замыканием* и обозначают $\overline{E}$. Очевидно, $E\subset\overline{E}$.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

3. Полные метрические пространства.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства *называют фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n>n_\varepsilon,\ m>n_\varepsilon$ выполняется неравенство: $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства .

1.1 Доказать, что множество $B(E)$ всех ограниченных на некотором множестве E функций, принимающих действительные значения, является метрическим пространством с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in E}|x(t)-y(t)|$.

1.2 Доказать, что множество $\boldsymbol{l}_2$ всевозможных последовательностей (x_1, ….x_n,…) действительных чисел, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$, является метрическим пространством с метрикой $\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ (см. приложение)

1.3 Доказать, что для любых трех точек x, y, z метрического пространства X справедливо неравенство $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(x,y)$.

1.4 Доказать, что нижеуказанные функции являются метриками на соответствующих множествах:

1) $\rho(x,y)=|x-y|$ на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, $x,y\in\boldsymbol{R}$;

2) $\rho(z,w)=|z-w|$ на множестве всех комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, $x,y\in\boldsymbol{C}$;

3) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$, на множестве точек n-мерного пространства $\boldsymbol{R^n}$, $x=(x_1,\dots x_n)$, $y=(y_1,\ \dots y_n)$, $x,y\in\boldsymbol{R^n}$;

4) $\rho(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)-y(t)|dt$ на множестве $CL_1(\boldsymbol{R})$ всех функций, непрерывных и абсолютно интегрируемых на числовой оси $\boldsymbol{R}$;

5) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)-y(t)|^2dt}$ на множестве $CL_2(\boldsymbol{R})$ всех непрерывных на $\boldsymbol{R}$ функций, у которых сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2dt$ (см. приложение).

1.5 Является ли метрическим пространством множество точек окружности, если расстоянием между точками считать длину наименьшей дуги, соединяющей данные точки?

1.6 Доказать, что множество открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто (открыто).

1.7 Доказать, что ε-окрестность точки метрического пространства является открытым множеством.

1.8 Доказать, что множество внутренних точек любого множества метрического пространства является открытым множеством.

1.9 Доказать, что если последовательность точек метрического пространства сходится то она фундаментальная.

1.10 Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то сходится и вся последовательность, причем к тому же пределу, что и указанная последовательность.

1.11 Доказать полноту пространства l_2 (определение пространства см. задачу 1.2 или приложение).

1.12 Доказать полноту пространства $C[a,b]$ с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{[a,b]}|x(t)-y(t)|,\ x,y\in C[a,b].$$

Занятие 2. Нормированные пространства. Операторы и функционалы.

1. Линейные нормированные пространства.

Линейное пространство X (действительное или комплексное) называется *нормированным*, если на множестве его точек задана действительная функция, называемая нормой, обозначаемая $\|x\|_X$, $x \in X$, и имеющая следующие свойства:

1) $\forall x \in X,\ \|x\| \geq 0,$ причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\forall x \in X$ и всех чисел λ имеет место равенство $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

3) $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Последовательность $\{x_n\}$ нормированного пространства X называют *сходящейся по норме* пространства X к элементу $x \in X$, если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Отображение $f : X \to Y$ называют *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности элементов $\{x_n\}$ сходящейся к x_0 по норме пространства X, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ по норме пространства Y.

2. Линейные операторы. Функционалы.

Отображения нормированных пространств называют *операторами*. Операторы, отображающие нормированное пространство во множество действительных (комплексных) чисел называют *функционалами* над данным пространством.

Пусть $A : X \to Y$. Положим $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y$. Оператор А называют *ограниченным*, если $\|A\| < \infty$.Для линейных ограниченных операторов $\|A\|$ называют *нормой*.

2.1 Доказать, что ниже перечисленные линейные пространства являются нормированными относительно указанных норм:

1) R, $\|x\| = |x|$;

2) C, $\|z\| = |z|$;

3) R^n , $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2}$;

4) R^n, $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$;

5) R^n, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;

6) R^n, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$, 1<p<∞;

7) C[a,b], $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

2.2 Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке *[a,b]* функций принять за норму элемента *x(t)*:

1) $\max_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

2) $\max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

3) $|x(a) - x(b)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

4) $|x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

2.3 Линейный оператор $A: X \to Y$ тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле пространства X.

2.4 Если $A: X \to Y$ линейный оператор, то $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$

2.5 Линейный оператор $A: X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная c>0, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|A(x)\|_Y \le c\|x\|_X$

2.6 Если $A: X \to Y$ линейный оператор, то для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|A(x)\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

2.7 Являются ли линейными следующие функционалы над пространством C[0,1]:

1) $A(x) = \int_0^1 x(t)\sin t dt$

2) $A(x) = x(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$

3) $A(x) = \int_0^1 x(t^2) dt$

4) $A(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$

5) $A(x) = \max_{[0,1]} x(t)$

2.8 Какие из функционалов в задаче 2.7 линейны и непрерывны на пространстве C[0,1]? Вычислить их нормы.

Занятие 3. Гильбертовы пространства. Ряды Фурье.

1. Пространства со скалярным произведением.

Пусть X действительное (комплексное) линейное пространство. Функцию $(x,y): X \times X \to R(C)$ называют *скалярным произведением*, если $\forall x,y,z \in X$ и $\forall \lambda,\mu \in R(C)$ выполняются следующие свойства:

1) коммутативность: $(x,y)=(y,x)$ ($(x,y)=\overline{(y,x)}$)
2) линейность: $(\lambda x+\mu y,z)=\lambda(x,z)+\mu(y,z)$
3) неотрицательность: $(x,x)\geq 0$;
4) невырожденность: $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Если (x,x) скалярное произведение, то функционал $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ является нормой на пространстве X.

Линейное пространство со скалярным произведением называют *гильбертовым*, если оно полно в смысле метрики, порожденной нормой $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

2. Ортонормированные базисы.

Элементы $x,y \in X$ называют *ортогональными*, если $(x,y)=0$.

Систему элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in U$ (U – некоторое множество индексов) называют *ортогональной*, если каждые два ее различных элемента ортогональны. Если, кроме того, $\|x_\alpha\|=1, \forall \alpha \in U$, то её называют *ортонормированной*.

3. Ряды Фурье.

Если $\{e_\alpha\}, \alpha \in U$, - ортогональная системы в линейном пространстве X со скалярным произведением, $e_\alpha \neq 0$, $\forall \alpha \in U$ и $x \in X$, то числа $a_\alpha=\dfrac{(x,e_\alpha)}{(e_\alpha,e_\alpha)}$ называют *коэффициентами Фурье* элемента x по данной ортогональной системе.

Если эта система не более чем счетна: $\{e_n\}, n \in N$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ называют *рядом Фурье* элемента x по данной системе.

Доказать следующие утверждения:

3.1 В действительном n-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{R^n}$ функционал $(x,y)=x_1y_1+....+x_ny_n$, x=($x_1,\ldots x_n$), y=($y_1,\ldots y_n$)$\in$ $\boldsymbol{R^n}$ является скалярным произведением, а соответствующая ему норма совпадает с длиной вектора.

3.2 В комплексном n-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{C^n}$ функция $(x,y)=x_1\bar{y}_1+....+x_n\bar{y}_n$, $x=(x_1,\ldots x_n)$, $y=(y_1,\ldots y_n)\in$ $\boldsymbol{C^n}$ является скалярным произведением.

3.3 В линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $x:[a,b] \to R$ функционал $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$, x,y $\in C[a,b]$, является скалярным произведением. Полученное пространство обозначают $CL_2[a,b]$.

3.4 В пространстве $CL_2(a,b)$ действительных непрерывных на конечном или бесконечном интервале (a,b), $-\infty\le a<b\le+\infty$ функций, квадрат которых интегрируем на этом интервале, функционал $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$ является скалярным произведением.

3.5 В линейном пространстве l_2 действительных числовых последовательностей функционал $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$,

$x=(x_1,x_2,...)\in l_2$, $y=(y_1,y_2,...)\in l_2$ является скалярным произведением.

3.6 В линейном пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y имеет место равенство: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (равенство параллелограмма).

3.7 Найти углы треугольника с вершинами в точках $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 1$, $x_3(t)\equiv t$ в пространстве $CL_2[-1,1]$.

3.8 Тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, ..., \cos nt, \sin nt, ...$ ортогональная в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, и соответствующая ортонормированная система имеет вид: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, ...$

3.9 Система функций $\{e^{int}\}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образуют полную ортогональную систему в пространстве комплекснозначных непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций со скалярным произведением $(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$.

3.10 Функции $\sin t, \sin 3t, \sin 5t, \sin 7t, \sin 9t$ линейно независимы.

3.11 Для коэффициентов Фурье a_n элемента x линейного пространства со скалярным произведением X по ортогональной системе $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, n=1,2…, выполняется неравенство Бесселя: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$

3.12 Ряд Фурье элемента x линейного пространства со скалярным произведением X по ортогональной системе $e_n \in X, e_n \neq 0, n = 1,2\ldots$ сходится к этому элементу тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2$.

3.13 Каждая функция $x \in RL_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в ряд Фурье по тригонометрической системе функций сходящийся в смысле среднего квадратичного: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, причем имеет место равенство Парсеваля $\frac{1}{\pi}\|x\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

Занятие 4. Ряды Фурье по тригонометрической системе.

Если функция *f(x)* кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ в интервале *(-l,l),* причем её точки разрыва ξ регулярны (т. е. $f(\xi)=\frac{1}{2}(f(\xi-0)+f(\xi+0))$), то функция *f(x)* в этом интервале может быть представлена рядом Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),\text{ где}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\quad (\text{n=0, 1,2,...})\quad \text{и}\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\quad (\text{n=1,2,...}).$$

В частности:

а) если функция *f(x)* четная, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},\text{ где }a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\ (\text{n=0,1,2,...})$$

б) если функция *f(x)* нечетная, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l},\text{ где }b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ (\text{n=1,2,...})$$

4.1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\quad(-\pi<x<\pi)$. Нарисовать графики функции и графики нескольких частных сумм ряда Фурье этой функции. Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases}A,\ \text{если}\ 0<x<l;\\ 0,\ \text{если}\ l<x<2l,\end{cases}$ где A - постоянная, разложить в интервале (0, 2l).

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

4.2 $f(x)=x$ в интервале (-π,π).

4.3 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале (0, 2π)

4.4 $f(x)=|x|$ в интервале (-π,π).

4.5 $f(x)=\begin{cases} ax, \text{ если } -\pi<x<0 \\ bx, \text{ если } 0<x<\pi \end{cases}$, где a и b - постоянные, в интервале (-π,π).

4.6 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=8^{x/2}$ заданную в интервале (0, π) продолжив (доопределив) её а) четным б)нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

4.7 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=sh2x$ заданную в интервале (0, π) продолжив (доопределив) её а) четным б)нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

4.8 Функцию $f(x)=x^2$ разложить в ряд Фурье а) в интервале (-π, π) по косинусам кратных дуг; б) в интервале (0, π) по синусам кратных дуг; в) в интервале (0, 2π). Пользуясь этими разложениями найти суммы рядов:

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

4.9 Воспользовавшись разложением функции $f(x)=|\sin x|$ в ряд Фурье в интервале (-π,π) найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$.

4.10 Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$f(x)=\begin{cases} x, \ 0\le x\le 1 \\ 2-x, \ 1<x\le 2 \end{cases}$ на отрезке [0, 2] и найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

4.11 Исходя из разложения $x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$ (-π<x<π) почленным интегрированием получить разложения в ряд Фурье на интервале (-π,π) функций x^2, x^3 и x^4.

4.12 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x \le 1; \\ 1, \text{ если } 1 < x < 2; \\ 3 - x, \text{ если } 2 \le x \le 3. \end{cases}$

4.13 Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически

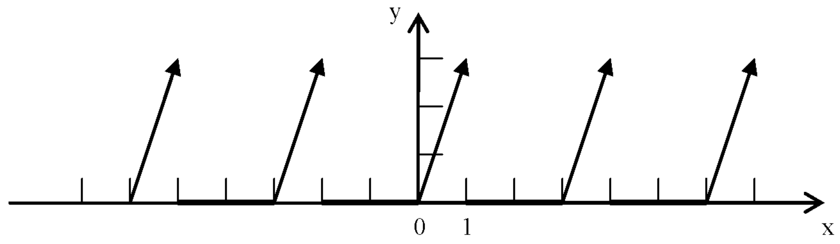

Рисунок 1

Занятие 5. Контрольная работа №1.

(Примерный вариант)

5.1 Теоретический вопрос. Например, дать определение линейного нормированного пространства.

5.2 Теоретический вопрос. Например, написать разложение элемента x в ряд Фурье по ортогональной системе $\{e_n\}$, $n \in N$.

5.3 Доказать, что последовательность функций $\sin\frac{(2n-1)t}{2}$, n=1,2…, образуют ортогональную систему в пространстве $CL_2[-\pi,\pi]$.

5.4 Воспользовавшись разложением функции *f(x)* в ряд Фурье в указанном интервале, найдите сумму данного числового ряда.: $f(x)=x^2$, $(-\pi,\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

5.5 Разложить в ряд Фурье функцию $y=e^{3x}$, заданную на интервале *(0,π)*, доопределив её четным образом.

Решение:

5.3 Проверим, что скалярное произведение $\left(\sin\frac{(2n-1)t}{2},\sin\frac{(2m-1)t}{2}\right)=0,\ n\neq m$.

Вычислим: $\left(\sin\frac{(2n-1)t}{2},\sin\frac{(2m-1)t}{2}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{(2n-1)t}{2}\sin\frac{(2m-1)t}{2}dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)tdt-$

$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m-1)tdt=0$ (при $n\neq m$).

5.4 Заметим, что функция $f(x)=x^2$ - четная. Найдем её разложение в ряд Фурье на интервале $(-\pi,\pi)$, воспользовавшись формулами для четных функций:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}\cos\pi n=\frac{4}{n^2}(-1)^n,\ n=1,2,\ldots$$

Разложение функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье графически можно представить следующим образом:

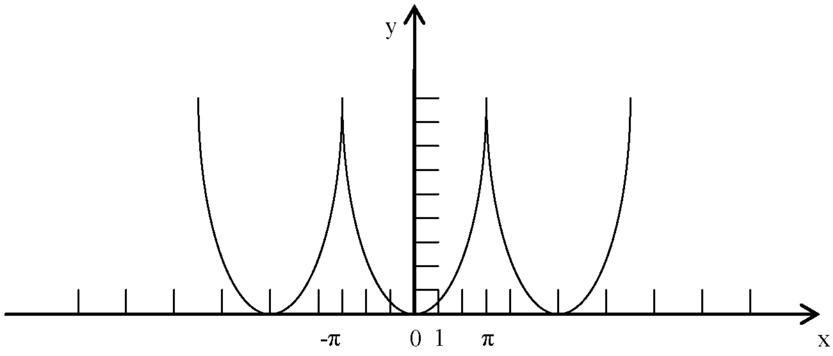

Рисунок 2

Функция $f(x) = x^2$ непрерывная, поэтому $\forall x \in [-\pi, \pi]$ выполняется равенство:

$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, в частности, при $x = \pi$ имеем:

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, воспользовавшись разложением в ряд Фурье, мы нашли сумму числового ряда.

5.5 Воспользуемся формулами для четной функции:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{3x}dx = \frac{2}{3\pi}\left(e^{3\pi} - 1\right);$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{3x}\cos nx dx = \frac{3\left(e^{3\pi}\cos \pi n - 1\right)}{\pi(9 + n^2)} = \frac{3\left(e^{3\pi}(-1)^n - 1\right)}{\pi(9 + n^2)}.$$

Таким образом, $\forall x \in (0, \pi)$ имеет место разложение:

$$e^{3x} = \frac{e^{3\pi} - 1}{3\pi} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{3\pi} - 1}{9 + n^2}$$

Интегралы, зависящие от параметра.

Занятие 6. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Если при каждом значении $\alpha \in E \subset R$ функция $f(x,\alpha)$ интегрируема по Риману как функция от x на отрезке [a,b], то интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx \qquad (1)$$

называют *собственным интегралом*, зависящим от параметра α.

1. Непрерывность интеграла по параметру.

Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha) : a \le x \le b,\ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\} \qquad (2)$$

то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра α на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$.

В частности, если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике К и $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx \qquad (3).$$

2. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра.

Если $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике (2), то интеграл (1) есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, и справедливо равенство:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)d\alpha \right) dx \qquad (4)$$

3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра.

Если функции $f(x,\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (2), то интеграл (1) - непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ функция, производную которой можно вычислить по правилу Лейбница: $I'(\alpha) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx \qquad (5).$

Если функции $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (2), функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha_1,\,\alpha_2]$, а их значения принадлежат отрезку $[a,b]$, то интеграл $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ - функция, дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1,\,\alpha_2]$, причем

$$\Phi'(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha)-f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) \qquad (6)$$

6.1 Показать, что интеграл $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$ от разрывной функции *f(x,y)=sgn(x-y)* является функцией непрерывной. Построить график функции $u=F(y)$.

6.2 Вычислить:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+\cos\alpha x)e^{x\sin\alpha}dx$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1\sqrt{1+\alpha^2x^4}\,dx$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx$;

4) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_2^4\frac{xdx}{1+x^2+\alpha^6}$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 x^2e^{\alpha x^3}dx$;

6) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{\pi}x\cos(1+\alpha)xdx$

6.3 Выяснить, справедливо ли равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 f(x,\alpha)dx=\int\limits_0^1\lim\limits_{\alpha\to 0}f(\alpha,x)dx$, если: 1) $f(x,\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$; 2) $f(x,\alpha)=\frac{2x\alpha^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$

6.4 Пусть функция f(x) непрерывна и принимает положительные значения на отрезке [0,1]. Доказать, что функция $I(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}f(x)dx$ разрывная при $\alpha=0$.

6.5 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx$, $0<a\le b$.

6.6 Пользуясь формулой $\frac{arctgx}{x}=\int\limits_0^1 \frac{d\alpha}{1+x^2\alpha^2}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

6.7 Пользуясь формулой $\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int\limits_0^1 \frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2 x}$, где a>0, b>0,

вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\frac{dx}{\sin x}$.

6.8 Пусть a>0, b>0. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$

6.9 Найти I'(α), если:

1) $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \sin(\alpha x)dx$;

2) $I(\alpha)=\int\limits_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x}dx$;

3) $I(\alpha)=\int\limits_1^2 e^{\alpha x^2}\frac{dx}{x}$

4) $\int\limits_2^3 ch(\alpha^4x^2)\frac{dx}{x}$

6.10 Найти Φ'(α), если

1) $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$;

2) $\Phi(\alpha)=\int\limits_\alpha^{2\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}dx$;

3) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2}dx$;

5) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4x^2}dx$;

6) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha} \ln(1+\alpha^2x^2)\frac{dx}{x}$;

7) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^\alpha} \ln(1+\alpha^2x^2)dx$;

8) $\Phi(\alpha)=\int\limits_{ch\alpha}^{sh\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)dx$

6.11 С помощью дифференцирования интеграла $\int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где α>0, вычислить интеграл $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

6.12 Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл I(α), если:

1) $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)d\varphi$, α>1;

2) $I(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx, \quad |\alpha|<1$;

3) $I(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha|<1$;

4) $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(\alpha\, tgx)}{tgx}dx$.

6.13 Доказать, что функция u(x) удовлетворяет уравнению Бесселя $x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0$, если

1) $u(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi, \quad n\in N$;

2) $u(x)=x^n\int_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi, \quad n\in N$.

6.14 Найти дважды дифференцируемую на R функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

1) $\varphi(x)=x+\int_0^x (y-x)\varphi(y)dy$;

2) $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^x (x-y)\varphi(y)dy, \quad \lambda>0$;

3) $\varphi(x)=\lambda\int_0^x (x-y)\varphi(y)dy+x^2, \quad \lambda>0.$

Занятие 7. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

В этом параграфе определение, признаки сходимости и критерии равномерной сходимости формулируются для несобственных интегралов вида

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx \qquad (1)$$

Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

1. Определение равномерной сходимости интеграла.

Определение. Интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha \in E$, называют *равномерно сходящимся на множестве E*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число δ_ε, что для всех $\alpha \in E$ и для всех $\xi \geq \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\int_\xi^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$.

2. Критерии равномерной сходимости.

Теорема 1. (Критерий Коши равномерной сходимости). Интеграл (1) сходится равномерно на множестве Е тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a,+\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon,+\infty)$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon,+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство $\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$.

Теорема 2. (Второй критерий). Интеграл (1) сходится равномерно на множестве Е тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\lim\limits_{\xi\to+\infty} \sup\limits_{\alpha\in E} \int_\xi^{+\infty} f(x,\alpha)dx = 0$.

3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла. Если на промежутке $[a,+\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x,\alpha)| \leq \varphi(x)$ для всех $x \in [a,+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$, и если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве Е.

4. Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ сходится равномерно по α на множестве E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на множестве $[a,+\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(x,\alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2) функция $g'_x(x,\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении x на промежутке $[a,+\infty)$;

3) функция f для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т.е. существует число $M > 0$ такое, что $\left|\int\limits_a^x f(t,\alpha)dt\right| \le M$ для всех $x \in [a,+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E (задачи 7.1-7.4):

7.1

1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0, \alpha_0),\ \alpha_0 < 1$:

3) $I(\alpha) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$, $E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$, $E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4} dx,\ \ E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 0$.

7.2

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos 2x dx,\ \ E = [\alpha_0, +\infty],\ \alpha_0 > 0$;

2) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln^2 x\cdot\sin 3x}{(x-1)^{\alpha}}dx$, $E=[\alpha_0,+\infty)$, $\alpha_0>1$;

3) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln^3 xdx}{x^2+\alpha^4}$, E=R;

4) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{1+(x-\alpha)^4}$, $E=(-\infty,\alpha_0)$, $\alpha_0>0$.

7.3

1) $I(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{4+x^2}dx$, E=R;

2) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}}dx$, $E=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$;

3) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}\,arctg\,\alpha x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $E=[0;\,2]$;

4) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$, $E=[\alpha_0,+\infty)$, $\alpha_0>0$;

5) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cdot\ln x}{\sqrt{x}}dx$, $E=[\alpha_0,+\infty)$, $\alpha_0>0$.

7.4

1) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$; $E=[0,+\infty)$;

2) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}e^{-\alpha x}dx$, $E=[0,+\infty)$.

7.5 Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно E_2.

1) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^{\alpha}}$, $E_1=[-1;\frac{2}{3}]$, $E_2=[-1;\,1)$;

2) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$, $E_1=[3,+\infty)$, $E_2=(1,+\infty)$;

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx,\ E_1=[0,2],\ E_2=[0,+\infty);$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-\alpha x^4}dx,\ E_1=[\alpha_0,+\infty),\alpha_0>0,\ E_2=(0,+\infty);$

7.6 Доказать равенство.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}=1$

3) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx=1$

2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}=0$

7.7 Доказать, что функция F(α) непрерывна на множестве E.

1) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx,\ E=R;$

2) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ E=R;$

3) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\sin(\alpha x^2)dx,\ E=[1,+\infty)$

Занятие 8. Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов.

1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Если функции $f(x,\alpha)$

и $f'_\alpha(x,\alpha)$ непрерывны на множестве $G=\{(x;\alpha): a \le x < +\infty,\ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}$, интеграл

$I(\alpha)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$, а интеграл $I(\alpha)=\int\limits_a^{+\_\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$

сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$, то $I'(\alpha)=\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ при

$\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

2. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $G=\{(x;\alpha): a \le x < +\infty,\ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}$ и интеграл

$I(\alpha)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$, то справедлива

формула: $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)d\alpha$.

8.1 Вычислить интеграл Дирихле. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx$.

8.2 Используя интеграл Дирихле, вычислить интеграл.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x^2}dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}dx$.

8.3 С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \quad \beta > 0$ 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \quad \beta > 0$.

8.4 Вычислить интегралы Лапласа.

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2} dx$ 2) $K(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2} dx$

8.5 Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона. $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

8.6 Используя интеграл Эйлера-Пуассона доказать, что

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2+2\beta x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/\alpha}, \alpha > 0$

8.7 Вычислить интеграл Лапласа: $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$.

8.8 Вычислить интегралы Френеля $I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$, $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

Занятие 9. Эйлеровы интегралы.

Интеграл $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ сходящийся при $p>0$, называют *гамма-функцией* (*эйлеровым интегралом второго рода*), а интеграл $B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, сходящийся при $a>0$, $b>0$ называют *бета-функцией* (*эйлеровым интегралом первого рода*).

Основные свойства гамма-функции:

а) *формула понижения*: $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\quad p>0$;

б) *формула дополнения*: $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin \pi p},\ 0<p<1$.

Так как $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$, то из формулы понижения следует, что $\Gamma(n+1)=n!,\ n\in N$.

Связь между бета-функцией и гамма-функцией выражается формулой:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ \ a>0, b>0.$$

9.1 Доказать следующие свойства:

1) $B(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt,\ a>0,\ b>0$;

2) $B(a,b)=B(b,a),\ a>0,\ b>0$;

3) $B(m,n)=\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},\ m\in N,\ n\in N$;

4) $\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)...(a+1)a\Gamma(a),\quad n\in N$;

5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

6) $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$;

7) $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ n\in N$.

9.2 Доказать, что Г(р) – бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$\Gamma^{(m)}(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^m e^{-x}dx.$$

9.3 Доказать, что функция Г(р) является строго выпуклой вверх на интервале $(0,+\infty)$.

С помощью Эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы.

9.4 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$

9.5 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (a>0)

9.6 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$

9.7 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

9.8 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$

9.9 $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^4 xdx$

9.10 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ (n>1)

9.11 $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$ (n – целое положительное)

Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующие интегралы:

9.12 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ (n>0)

9.13 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$ (a>0, b>0, n>0)

9.14 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, (m>0)

9.15 $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n xdx$

9.16 $\int_0^{\pi/2} tg^n xdx$

9.17 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$ (n>0)

9.18 $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$

9.19 $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$

9.20 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 xdx}{1+x}$

Занятие 10. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

1. Интеграл Фурье. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на любом отрезке действительной прямой, абсолютно интегрируема на R и имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные. Тогда в точках непрерывности функция f

представляется в виде *интеграла Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt, \qquad (1)$$

а в точках разрыва функции f левую часть равенства (1) следует заменить на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на R функция f имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy, \quad где \quad a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt dt, \qquad (2)$$

а в случае, когда f – нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \sin xy dy, \quad где \quad a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt dt. \qquad (3)$$

Формулу (1) можно записать в комплексной форме:

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt$, где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

2. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.

Функцию $\hat{f}$, определяемую формулой $\hat{f}(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt, \qquad (4)$

называют *преобразованием Фурье* функции f и обозначают также $F[f]$, а функцию

$\tilde{f}$, определяемую формулой $\tilde{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt,$ (5)

называют *обратным преобразованием Фурье* функции f и обозначают также

$F^{-1}[f]$.

Если функция f абсолютно интегрируема на R, то интегралы (4) и (5) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

Представить интегралом Фурье следующие функции (10.1-10.4):

10.1 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$

10.2 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| < 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$

10.3 $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)$ (b>a)

10.4 Функцию $f(x) = e^{-x}$ (0<x<+∞) представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом; б) нечетным образом.

Найти преобразование Фурье функции *f(x)* (10.5-10.8).

10.5 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \le 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$

10.6 $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } |x| \le \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi \end{cases}$

10.7 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \le \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi \end{cases}$

10.8 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \le \pi \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$

10.9 Пусть $\hat{f}(y) = F[f(x)]$. Доказать, что:

1) $F[e^{i\alpha x} f(x)] = \hat{f}(y-\alpha), \quad \alpha \in R$;

2) $F[f(x-\alpha)] = e^{-i\alpha y}\hat{f}(y),\ \ \alpha \in R$;

3) $F[\cos\alpha x \cdot f(x)] = \dfrac{\hat{f}(y-\alpha)+\hat{f}(y+\alpha)}{2},\ \ \alpha \in R$;

4) $F[\sin\alpha x \cdot f(x)] = \dfrac{\hat{f}(y-\alpha)-\hat{f}(y+\alpha)}{2i},\ \ \alpha \in R$.

10.10 Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(y)\cos xy dy = \dfrac{1}{1+x^2}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \psi(y)\sin xy dy = e^{-x}$ (x>0).

Занятие 11. Контрольная работа №2.

(примерный вариант)

11.1 Теоретический вопрос. Например, перечислить свойства бета-функции.

11.2 Вычислить Ф'(α), если $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4 x^2}dx$.

11.3 Исследуйте на равномерную сходимость на множестве E

$I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$, $E=[3,+\infty)$.

11.4 Используя эйлеровы интегралы, вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$

11.5 Представьте интегралом Фурье функцию, продолжив её четным образом на интервал (-∞, 0) $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ \text{если}\ \ 0\le x\le\pi\\ 0,\ \text{если}\ \ x>\pi\end{cases}$.

Решение.

11.2 Здесь выполняются все условия, необходимые для того, чтобы можно было воспользоваться формулой (6) из занятия 6:

$$\Phi'(\alpha)=4\alpha^3\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha}x^2e^{\alpha^4x^2}dx+\cos\alpha\, e^{\alpha^4\sin^2\alpha}+\sin\alpha\, e^{\alpha^4\cos^2\alpha}$$

11.3 Воспользуемся вторым критерием равномерной сходимости, приведенным в занятии 7. Для этого покажем, что $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\sup\limits_{\alpha\in E}\int\limits_{\xi}^{+\infty}f(x,\alpha)dx=0$. Вычислим $\int\limits_{\xi}^{+\infty}f(x,\alpha)dx=\int\limits_{\xi}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}=\frac{1}{(\alpha-1)(\xi+1)^{\alpha-1}}$. Найдем

$$\sup\limits_{\alpha\in E}\int\limits_{\xi}^{+\infty}f(x,\alpha)dx=\sup\limits_{\alpha\in[3,+\infty)}\frac{1}{(\alpha-1)(\xi+1)^{\alpha-1}}=\frac{1}{2(\xi+1)^2}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{1}{2(\xi+1)^2}=0$, следовательно, исходный интеграл сходится равномерно на множестве E.

11.4 Представим искомый интеграл в виде B-функции. Для этого сделаем замену переменных таким образом, чтобы пределы интегрирования изменились на подходящие (от 0 до 1).

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}=\begin{bmatrix} t=\dfrac{x+1}{3} \\ x=3t-1\end{bmatrix}=3\int_0^1\frac{dt}{\sqrt[4]{(3-3t)(3t)^3}}=\int_0^1(1-t)^{-1/4}t^{-3/4}dt=B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\pi$$

11.5 Нарисуем график продолжения:

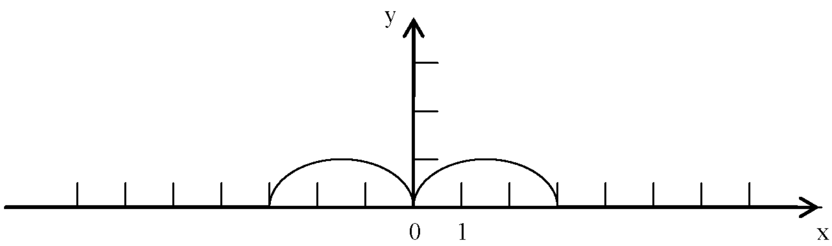

Рисунок 3

Воспользуемся формулами для четной функции:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(y)\cos xydy,\quad где\quad a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ytdt$$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ytdt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos ytdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(1+y)t+\sin(1-y)t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi(1+y)}\left(1-\cos(1+y)\pi\right)+\frac{1}{\pi(1-y)}\left(1-\cos(1-y)\pi\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-y^2}+\cos\pi y\right)$$

Тогда

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(y)\cos xydy=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-y^2}+\cos\pi y\right)\cos xydy$$

Приложение. Некоторые пространства, встречающиеся в анализе.

Название	Элементы пространства	Скалярное произведение	Норма
R^n	n-мерные вектора $x=(x_1,x_2,\dots x_n),\ x_k\in R$	$(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$	$\lVert x\rVert_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$
C^n	n-мерные вектора $x=(x_1,x_2,\dots x_n),\ x_k\in C$	$(x,y)=x_1\bar{y}_1+\ldots+x_n\bar{y}_n$	$\lVert x\rVert_2=\sqrt{\lvert x_1\rvert^2+\ldots+\lvert x_n\rvert^2}$
l_1	пространство сходящихся последовательностей $x=(x_1,\dots x_n,\dots),\ x_k\in R\ \sum\lvert x_k\rvert<\infty$	—	$\lVert x\rVert_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert$
l_2	пространство последовательностей, для которых сходится ряд квадратов их членов $x=(x_1,\dots x_n,\dots),\ x_k\in R\ \sum\lvert x_k\rvert^2<\infty$	$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_ky_k$	$\lVert x\rVert_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^2}$
l_∞	постранство ограниченных последовательностей $x=(x_1,\dots x_n,\dots),\ x_k\in R$ $\sup\lvert x_k\rvert<\infty$	—	$\lVert x\rVert_\infty=\sup\limits_{k=1,\infty}\lvert x_k\rvert$
$CL_2[a,b]$	пространство функций, непрерывных на отрезке [a,b], для которых $\int\limits_a^b\lvert x(t)\rvert^2dt<\infty$	$(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$	$\lVert x(t)\rVert_2=\sqrt{\int\limits_a^b\lvert x(t)\rvert^2dt}$

Из приведенных пространств только $\boldsymbol{R^n}$, $\boldsymbol{C^n}$ и l_2 являются гильбертовыми.

Список литературы.

1. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – 13-е изд., испр. – М.:АСТ, 2009. – 558 с.

2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст]: учеб. для ун-тов и втузов. В 2т. / Л. Д. Кудрявцев. – М.:Высшая школа, 2004. Т.2. – 720 с.:ил.

3. Кудрявцев, Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. Функции нескольких переменных / под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит, 2003. – 472 с.

4. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст]: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3. / А. П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк.,