

Государственный комитет Российской Федерации  
по высшему образованию

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С. П. Королева

Вычислительные методы решения задач  
математической физики

Методические указания к лабораторным работам №1 и №2  
по курсу "Вычислительная физика"

Самара, 1998 г.

$$C=0.5;$$

$$\alpha=0.3 \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right];$$

$$\gamma(t) = 0.1 \sin^2 \frac{\pi}{T} \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$C=0.8;$$

$$\alpha=0.24 \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right];$$

$$\gamma(t) = 0.2 e^{-\beta} \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$\beta=0.01 \left[ \frac{1}{\text{с}} \right];$$

**Вариант 2.**

а)  $K=0.065 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right];$

б)  $K=0.011 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right];$

$$C=1.84 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$C=1.6 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$\alpha=0.01 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$\alpha=0.005 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$l=0.5[\text{см}];$$

$$R=5[\text{см}];$$

$$l=0.5[\text{см}];$$

$$R=4[\text{см}];$$

$$\beta=0.004 \left[ \frac{1}{\text{см}} \right];$$

$$\beta=0.008 \left[ \frac{1}{\text{см}} \right];$$

$$T=100[\text{с}];$$

$$T=180[\text{с}];$$

$$(0 < t \leq T);$$

$$I(r) = \frac{P}{\pi a^2} e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]$$

$$I(r) = \begin{cases} \frac{P}{\pi a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$P=100[\text{Вт}];$$

$$a=R/5 [\text{см}];$$

$$P=40[\text{Вт}];$$

$$a=R/5 [\text{см}];$$

**Вариант 3.**

а)  $l=20[\text{см}];$

б)

$$l=30[\text{см}];$$

$$D=0.6 \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right];$$

$$U_c=0 \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$H=4 \left[ \frac{1}{\text{см}} \right];$$

$$T=100[\text{с}];$$

$$\varphi = 0.4 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$\beta=0.015 \left[ \frac{1}{\text{с}} \right];$$

$$D=0.6 \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right];$$

$$U_c=0 \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$H=2 \left[ \frac{1}{\text{см}} \right];$$

$$T=300[\text{с}];$$

$$\varphi = 0.1 \cos \frac{\pi x}{l} \left[ \frac{z}{\text{см}^3} \right];$$

$$\beta=0.004 \cdot e^{(x/l)} \left[ \frac{1}{\text{с}} \right];$$

**Вариант 4.**

а)  $K=1430 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right];$

б)  $K=1430 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right];$

$$C=2.3 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$C=2.3 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$l=0.5[\text{м}];$$

$$D=2[\text{мм}];$$

$$I=20[\text{А}];$$

$$R=10[\text{Ом/м}];$$

$$U_b=20[^\circ\text{C}];$$

$$l=1[\text{м}];$$

$$D=2[\text{мм}];$$

$$I=20[\text{А}];$$

$$R=10[\text{Ом/м}];$$

$$U_b=16[^\circ\text{C}];$$

$$C_x=46 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right];$$

$$C_x=11 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right];$$

$$C_x=80 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right];$$

$$C_x=11 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right];$$

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева

Кафедра технической кибернетики

Лабораторные работы №1 и №2  
по курсу "Вычислительная физика"

Выполнил студент ...  
Проверил ...

группа ...

Самара, 1998г.

$$\alpha = 10 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$\varphi(x) = U_b [^\circ\text{C}];$$

Вариант 5.

а)  $K = 0.59 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right];$

$$C = 1.65 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}} \right]$$

$$\alpha = 0.006 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$R = 6 [\text{см}];$$

$$l = 0.3 [\text{см}];$$

$$T = 15 [\text{с}];$$

$$U_x = 22 [^\circ\text{C}];$$

$$U_n = 20 [^\circ\text{C}];$$

$$U_{\text{оп}}(t) = 20 + 0.2t [^\circ\text{C}];$$

Вариант 6.

а)  $K = 2200 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right];$

$$C = 2.1 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$l = 1.2 [\text{м}];$$

$$R = 0.2 [\text{м}];$$

$$\alpha = 20 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$U_c = 20 [^\circ\text{C}];$$

$$T = 150 [\text{с}];$$

$$U_{\text{оп}} = 20 [^\circ\text{C}];$$

$$\alpha = 5 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$\varphi(x) = U_b + 12 \sin(\pi x/l) [^\circ\text{C}];$$

б)  $K = 0.59 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right];$

$$C = 1.65 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$\alpha = 0.002 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$R = 6 [\text{см}];$$

$$l = 0.5 [\text{см}];$$

$$T = 50 [\text{с}];$$

$$U_x = 22 [^\circ\text{C}];$$

$$U_n = 18 [^\circ\text{C}];$$

$$U_{\text{оп}}(t) = \exp(-0.04t) + 20 [^\circ\text{C}];$$

б)  $K = 1800 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right];$

$$C = 2.6 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} \right];$$

$$l = 1.2 [\text{м}];$$

$$R = 0.2 [\text{м}];$$

$$\alpha = 10 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right];$$

$$U_c = 18 [^\circ\text{C}];$$

$$T = 200 [\text{с}];$$

$$U_{\text{оп}} = 18 [^\circ\text{C}];$$

Составитель А. А. Дегтярев

УДК 519.6(076)

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010400 - "Физика".

Содержат задания к лабораторным работам №1 и №2 по курсу "Вычислительная физика", индивидуальные варианты задач, краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий, требования к оформлению отчета.

Подготовлены на кафедре технической кибернетики.

Рецензент профессор А. И. Жданов.

## 1. Задания к лабораторным работам и рекомендации по их выполнению

### *1.1. Лабораторная работа №1*

**Тема:** Решение краевых задач математической физики методом конечных разностей.

#### **Задание**

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей краевую задачу.
3. Провести аналитическое исследование схемы: определить порядок аппроксимации; исследовать устойчивость и сходимость.
4. Разработать программу численного решения краевой задачи.
5. Провести исследование зависимости численного решения от величин параметров дискретизации.

### *1.2. Рекомендации по выполнению лабораторной работы №1*

При формировании математической модели физического процесса следует обратиться к лекционному материалу и учебникам по курсу "Уравнения математической физики" (см., например, [1]).

Итоговая математическая модель должна включать дифференциальное уравнение в частных производных и краевые условия, соответствующие физической постановке задачи.

Некоторые вопросы, связанные с построением математической модели в полярной системе координат, рассмотрены в подразделе 3.2 настоящих методических указаний.

Для построения аппроксимирующей разностной схемы можно использовать метод замены производных разностными отношениями (см. подраздел 3.1. настоящих методических указаний), если решение задачи обладает достаточной гладкостью. Если же решение задачи имеет сильные или слабые разрывы, то следует использовать интегро-интерполяционный метод, приводящий к консервативным схемам (см. [1], [2]).

Завершив построение схемы, необходимо провести исследование ее сходимости. Проблемы исследования аппроксимации, устойчивости и сходимости рассмотрены в [3. с.320-377], [4. с.238-245]. Для решения этих проблем целесообразно использовать материалы лекционных и практических занятий по изучаемому курсу.

После разработки алгоритма численного решения краевой задачи и реализации его на ЭВМ необходимо провести экспериментальное исследование зависимости численного решения от величин шагов дискретизации. Конкретно: необходимо проверить, наблюдается ли эффект сходимости при измельчении

сетки; каковы величины шагов дискретизации, при которых становится существенной погрешность вычислений.

### 1.3. Лабораторная работа №2

**Тема:** Экспериментальное исследование точности разностных схем. Повышение точности схемы методом Рунге.

#### Задание

1. Для предложенного тестового примера получить аналитическое решение задачи в виде ряда Фурье. Разработать программу вычисления решения с требуемой точностью.
2. Используя тестовый пример, провести экспериментальное исследование фактической зависимости погрешности сеточного решения от шагов дискретизации для разностной схемы, построенной при выполнении лабораторной работы №1

Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения с теоретической.

3. Применить метод Рунге для повышения точности сеточного решения. Оценить эффективность метода Рунге.

### 1.4. Рекомендации по выполнению лабораторной работы №2

После завершения аналитического исследования сходимости разностной схемы и разработки программы численного решения краевой задачи важно получить экспериментальное подтверждение теоретических результатов. Экспериментальное исследование проводится на тестовых задачах, точное решение которых известно или может быть получено с помощью альтернативных методов, например, метода разделения переменных, позволяющего представить решение в виде ряда Фурье.

В последнем случае необходимо подобрать тестовый пример так, чтобы обеспечить быструю сходимость ряда и простоту вычисления его коэффициентов. Подбор тестовых задач рекомендуется проводить совместно с преподавателем.

При экспериментальном исследовании точности сеточного решения необходимо сравнить фактически наблюдаемую скорость убывания погрешности с теоретической.

Погрешность сеточного решения следует оценивать по норме, использованной при аналитическом исследовании сходимости.

Для повышения точности сеточного решения краевой задачи предлагается воспользоваться методом Рунге. Изложение этого метода дано в подразделе 3.4.

## 2. Варианты лабораторных работ №1 и №2

**Вариант 1.** Трубка длиной  $l$ , заполненная пористым поглощающим материалом и плотно закрытая с одного из концов, была погружена в дистиллированную воду. После того, как пористый материал оказался полностью пропитан водой, трубка была перенесена в водный раствор некоторого вещества

концентрацией  $\gamma(t)$ . В процессе диффузии вещества внутрь трубки происходит его частичное поглощение пористым материалом, имеющим коэффициент пористости  $S$ .

Скорость поглощения пропорциональна концентрации растворенного вещества (коэффициент пропорциональности -  $D$ ).

Коэффициент диффузии  $\alpha$  известен.

Разработать программу расчета динамического поля концентрации исследуемого вещества на временном промежутке  $0 < t \leq T$ .

Для решения задачи использовать:

- явную схему 2-го порядка точности относительно параметров дискретизации;
- простейшую неявную схему;
- схему Кранка-Николсона.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $l, D, S, \alpha, T$  и выражение функции  $\gamma(t)$ , указанные преподавателем.

Указание. Концентрацию раствора по сечению трубки считать одинаковой в любой момент времени.

**Вариант 2.** Плоско-параллельный термически тонкий прозрачный оптический элемент, имеющий форму диска толщиной  $l$  и радиусом  $R$  ( $l \ll R$ ) облучается лазерным пучком света с распределением интенсивности излучения  $I(r)$ . В результате поглощения части энергии излучения оптический элемент нагревается. Пластина является однородной и выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами поглощения  $\beta$ , теплопроводности  $K$ , объемной теплоемкости  $C$ .

Пучок света обладает круговой симметрией и падает нормально на поверхность пластины, причем оси пучка и оптического элемента совпадают (см. Рис.1).

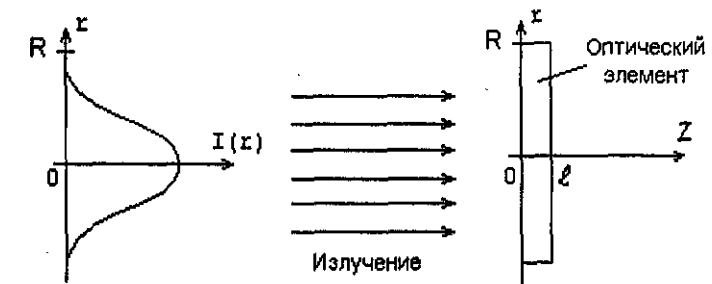


Рис.1. Схема воздействия лазерного пучка на прозрачный оптический элемент.

Боковая поверхность  $r=R$  элемента теплоизолирована, а между гранями ( $z=0$  и  $z=l$ ) и окружающей средой имеет место теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом  $\alpha$ .

В момент включения лазера  $t=0$  температура элемента во всех точках одинакова и равна температуре окружающей среды.

Разработать программу численного моделирования динамического теплового поля оптического элемента, используя для решения задач теплопроводности:

- простейшую явную разностную схему;
- простейшую неявную разностную схему;
- разностную схему Кранка-Николсона;
- консервативную разностную схему.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $K, C, \alpha, l, T$  ( $0 < t \leq T$ ),  $R, \beta$  и выражение функции  $I(r)$ , указанные преподавателем.

Указание. Энергию лазерного излучения, поглощаемую в процессе его прохождения через материал оптического элемента, считать распределенным температурным источником.

**Вариант 3.** В цилиндре конечной длины  $l$  находится диффундирующее вещество, концентрация частиц которого в момент времени  $t=0$  описывается функцией  $U|_{t=0} = \varphi$ . Коэффициент диффузии вещества является постоянным и равен  $D$ . Концы цилиндра закрыты полупроницаемыми мембранами, через которые происходит диффузия вещества в соответствии с законом

$$\frac{\partial U}{\partial x} = H(U - U_c),$$

где  $U_c$  - концентрация вещества во внешней по отношению к цилиндру среде,  $H$  - мембранный коэффициент диффузии.

Боковая поверхность цилиндра является непроницаемой.

Процесс диффузии вещества сопровождается явлением размножения его частиц, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна их концентрации в этой точке. Коэффициент пропорциональности  $\beta$  является пространственно-зависимым параметром.

Разработать программу расчета динамики поля концентрации вещества в цилиндре на временном промежутке  $0 < t \leq T$ . Использовать для решения краевой задачи:

- явную схему второго порядка точности относительно параметров дискретизации;
- безусловно устойчивую разностную схему второго порядка точности относительно параметров дискретизации;
- консервативную разностную схему.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $l, D, U_c, H, T$  и выражение функций  $\varphi$  и  $\beta$ , указанные преподавателем.

Указание. Параметр  $\beta$  и концентрацию вещества  $U$  считать одинаковыми во всех точках поперечного сечения цилиндра в любой момент времени.

**Вариант 4.** Через тонкий провод кругового сечения диаметром  $D$  и длиной  $l$  пропускается постоянный электрический ток силы  $I$  (см. Рис.2). Сопротивление провода, приходящееся на единицу длины, равно  $R$ , а коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности равны соответственно  $C$  и  $K$ .

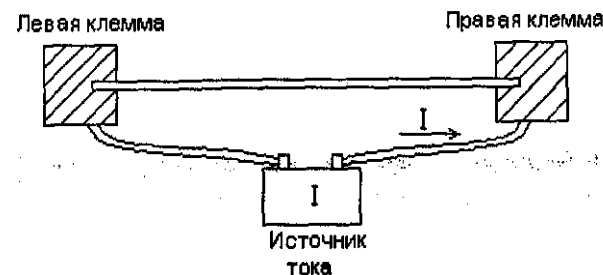


Рис.2. Схема опыта.

На поверхности провода происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим температуру  $U_c$ . Коэффициент теплообмена равен  $\alpha$ . Концы провода зажаты в массивные клеммы, имеющие очень большую теплопроводность и известные объемные теплоемкости  $C_s$  и  $C_c$ .

В начальный момент времени  $t=0$  температура стержня была равна  $\Phi(x)$ , а температура клемм -  $\Phi(0)$  и  $\Phi(l)$  соответственно.

Разработать программу расчета теплового процесса в проводе при  $0 < t \leq T$ , используя для решения задачи:

- явную разностную схему;
- простейшую неявную разностную схему;
- схему Кранка-Николсона.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $K, C, l, D, I, R, U_c, C_s, C_c, \alpha$  и выражение функции  $\Phi(x)$ , указанные преподавателем.

Указание. При выводе уравнения теплопроводности учесть, что количество тепла  $q$ , выделяемое током  $I$  в единицу времени в элементе  $(x, x+\Delta x)$  провода, определяется формулой  $q=0.24 \cdot I^2 \cdot R \Delta x$ .

**Вариант 5.** В процессе пристрелки электронной пушки происходит

нагревание мишени, принимающей на себя поток электронов (см. Рис. 3). В момент  $t=0$  прекращения стрельбы температура мишени описывается функцией  $\Phi(r)$ , где  $r$  - радиальная координата цилиндрической системы. Мишень представляет собой тонкую однородную пластину, имеющую форму диска толщиной  $l$  и радиусом  $R$ .

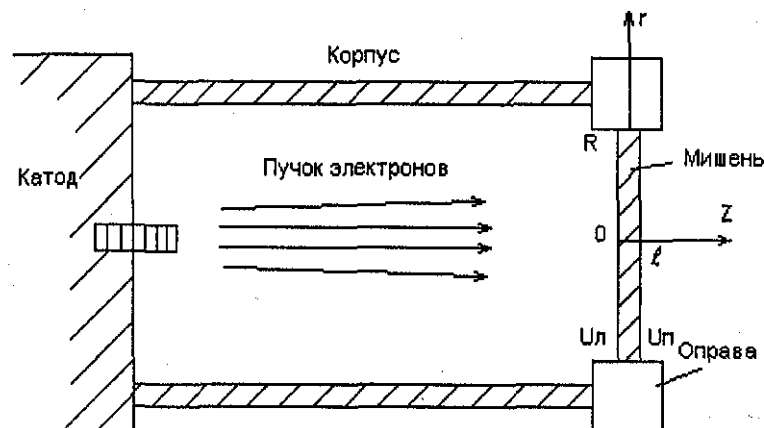


Рис.3. Схема электронной пушки.

В течение промежутка времени  $0 < t \leq T$  происходит остывание мишени вследствие оттока тепла в оправу, температура которой  $U_{on}$  известна (измеряется), а также вследствие теплообмена между гранями мишени и окружающей средой, причем температура среды со стороны граней  $z=0$  и  $z=l$  равна  $U_n$  и  $U_n$  соответственно. Теплообмен происходит по закону Ньютона с коэффициентом  $\alpha$ .

Разработать программу расчета процесса остывания мишени, используя для решения краевой задачи:

- явную разностную схему;
- неявную разностную схему;
- консервативную разностную схему.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $K, C, \alpha, l, R, T, U_n, U_n$  и выражения функций  $\Phi$  и  $U_{on}$ , указанные преподавателем.

**Вариант 6.** Температура корпуса электронной пушки (см. Рис.3) в момент прекращения стрельбы ( $t=0$ ) описывается функцией  $\Psi(z, \theta)$ , где  $z$  и  $\theta$  - координаты цилиндрической системы  $(r, \theta, z)$ . Корпус, представляющий собой однородную

тонкостенную трубу длиной  $l$  и радиусом  $R$ , выполнен из материала с коэффициентом теплопроводности  $K$  и коэффициентом объемной теплоемкости  $C$ .

В течение промежутка времени  $0 < t \leq T$  происходит остывание корпуса вследствие теплообмена между поверхностями цилиндра и внешней средой, температура которой характеризуется значением  $U_c$ . Теплообмен происходит по закону Ньютона с коэффициентом  $\alpha$ . Температура одного из концов трубы известна и равна  $U_{on}$ . Другой конец трубы теплоизолирован.

Разработать программу расчета процесса остывания корпуса электронной пушки, используя для решения краевой задачи:

- простейшую неявную разностную схему;
- обобщенную неявную схему повышенного порядка точности;
- схему расщепления.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $K, C, \alpha, l, R, U_c, T$  и выражения функций  $\Phi$  и  $U_{on}$ , указанные преподавателем.

### 3. Краткие теоретические сведения

#### 3.1. Построение аппроксимирующих разностных схем.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l; \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3.3)$$

Существует множество методов построения аппроксимирующих разностных схем (см., например, [2], [5], [6]). Самым простым из этих методов является метод замены производных разностными отношениями, который и рассмотрим.

Определим равномерную сетку как множество узлов  $(x_i, t_k)$ , где

$$x_i = ih; \quad i = \overline{0, I}; \quad h = l/I;$$

$$t_k = k\tau; \quad k = \overline{0, K}; \quad \tau = T/K.$$

Запишем приближенные выражения для производных, входящих в задачу (3.1) - (3.3).

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h^2}; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})}{\tau}; \quad (3.6)$$

Проводя дискретизацию задачи (3.1) - (3.2), заменим все функции их сеточными аналогами, а производные, входящие в уравнение (3.1), разностными отношениями (3.4) и (3.5). В результате получим так называемую явную схему

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}; \\ & k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I} \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k; & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $U_i^k, \varphi_i^k, \psi_i, \alpha^k, \beta^k$  - сеточные аналоги функций  $U(x,t), \varphi(x,t), \psi(x,t), \alpha(t), \beta(t)$ .

Очевидно, что схема (3.7) представляет возможность рекуррентного вычисления сеточного решения  $U_i^k$  для  $k=1, 2, \dots, K$  по явной формуле

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + \tau \varphi_i^k. \quad (3.8)$$

Отметим, что схеме (3.7) соответствует шаблон, приведенный на рис.4.

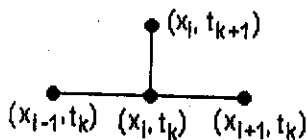


Рис.4. Шаблон простейшей явной схемы

Если при построении разностной схемы для задачи (3.1) - (3.3) вместо формулы (3.5) использовать формулу (3.6), то будет получена простейшая неявная схема

$$\begin{cases} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}; \\ & k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I} \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k; & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (3.9)$$

Нетрудно заметить, что схема (3.9) представляет собой систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, для решения которой следует использовать метод прогонки. Шаблон простейшей неявной схемы представлен на рис.5.

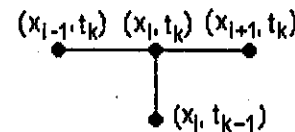


Рис.5. Шаблон простейшей неявной схемы

Получим еще одну, часто используемую на практике схему, называемую схемой Кранка-Николсона. Шаблон этой схемы представлен на рис.6.

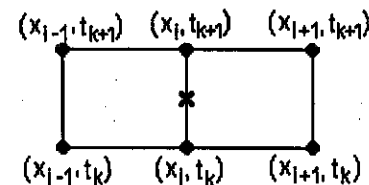


Рис.6. Шаблон схемы Кранка-Николсона

- - основные узлы;
- × - вспомогательный узел.

Рассмотрим наряду с основными узлами шаблона вспомогательный узел  $(x_i, t_k + \tau/2)$ . Используя этот узел, запишем уравнения простейших явной и неявной схем для задачи (3.1) - (3.3).





аналитическую форму представления решения в виде ряда Фурье [1]. На практике, прежде чем приступить к разработке вычислительной процедуры суммирования ряда Фурье, необходимо исследовать его сходимость. Необходимо также оценить остаток ряда Фурье, чтобы иметь возможность производить обоснованное усечение бесконечной суммы, гарантируя при этом достижение требуемой точности результата.

Рассмотрим пример исследования сходимости и оценки остатка ряда. Пусть дана следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu, & -\pi < x < \pi; 0 < t \leq T; \\ u|_{t=0} = f(x), & -\pi < x < \pi; \\ u|_{x=-\pi} = u|_{x=\pi}, & 0 < t \leq T; \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pi}, & 0 < t \leq T; \end{cases} \quad (3.15)$$

где  $\alpha, p, T$  - положительные константы,  $f(x)$  - ограниченная функция, представимая своим рядом Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Если применить метод разделения переменных к задаче (3.15), то в результате будет получено выражение аналитического решения задачи в виде ряда Фурье.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cdot e^{-(p+n^2 a)t}, \quad (3.16)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (3.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Исследуем сходимость ряда (3.16). В силу ограниченности функции  $f(x)$  можно записать  $|f(x)| \leq M$  для любых значений  $x \in [-\pi, \pi]$ . Тогда из равенства (3.17) вытекают оценки

$$|a_n| \leq 2M, \quad |b_n| \leq 2M,$$

используя которые легко получить неравенство

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cdot e^{-(p+n^2 a)t} \right| \leq 4Me^{-pt} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 at}. \quad (3.18)$$

Ряд в правой части неравенства (3.18) является сходящимся, что легко установить, используя, например, интегральный признак. Следовательно, исходный ряд (3.16) сходится равномерно по  $x$  согласно признаку Вейерштрасса.

Теперь получим оценку остатка ряда

$$\begin{aligned} |R_N| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cdot e^{-(p+n^2 a)t} \right| \leq 4Me^{-pt} \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-n^2 at} \leq \\ &\leq 4Me^{-pt} \int_N^{\infty} e^{-\xi^2 at} d\xi = 2Me^{-pt} \int_N^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 at}}{\xi} d\xi < \frac{2Me^{-pt}}{at} \cdot \frac{e^{-N^2 at}}{N}. \end{aligned}$$

Итак, искомая оценка имеет вид

$$|R_N| < \frac{2Me^{-pt}}{at} \cdot \frac{e^{-N^2 at}}{N}. \quad (3.19)$$

Если требуется найти сумму ряда с точностью  $\epsilon$ , то необходимое для этого количество элементов ряда  $N$  должно удовлетворять неравенству

$$\frac{2Me^{-pt}}{at} \cdot \frac{e^{-N^2 at}}{N} < \epsilon.$$

Отметим, что полученная оценка не является единственно возможной. Успех поиска более точных оценок остатка ряда зависит от опыта и творческой активности исследователя, его умения найти и привлечь дополнительную информацию о функциях, фигурирующих в математической модели.

#### 3.4. Метод Рунге повышения точности разностных схем.

Пусть дана дифференциальная задача

$$Lu=f \quad (3.20)$$

и сходящаяся к ней разностная схема

$$L_h u_h = f_h. \quad (3.21)$$

В силу сходимости можно утверждать, что существует такое  $m \geq 1$ , при котором справедливо равенство

$$\|u_h - [u]_h\|_{U_h} = O(h^m). \quad (3.22)$$

Здесь  $[u]_h$  - точное решение задачи (3.20), взятое на сетке, имеющей шаг  $h$ .

Как повысить точность приближенного решения?

Очевидными являются следующие пути. Во-первых, повышения точности можно достичь посредством уменьшения шага сетки  $h$ . Во-вторых, можно попытаться построить схему более высокого порядка точности. Первый путь влечет существенное повышение объема вычислительных затрат и требуемой оперативной памяти ЭВМ. Реализация второго подхода для многих задач сопряжена с большими математическими трудностями, особенно в случае уравнений с переменными коэффициентами и нелинейностями.

Рассмотрим еще один путь повышения точности сеточного решения, который известен как метод Рунге. Этот метод не требует построения новой схемы. Достаточно получить несколько решений разностной задачи (3.21) для различных шагов дискретизации  $h$  и взять эти решения в линейной комбинации. Последняя при определенном выборе коэффициентов даст решение повышенной точности.

Рассмотрим пример конструирования решения повышенной точности методом Рунге. Будем предполагать, что решение  $u$  дифференциальной задачи (3.20) обладает такой степенью гладкости, которая необходима для обеспечения справедливости используемых ниже разложений.

Допустим, что справедливо асимптотическое разложение (основой для такого допущения служит равенство (3.22))

$$u_h = [u]_h + \alpha_h h^m + O(h^n), \quad (3.23)$$

где  $m < n$ ;  $\alpha_h$  - некоторая сеточная функция.

Требуется найти такую сеточную функцию  $\tilde{u}_h$ , для которой справедливо равенство

$$\tilde{u}_h = [u]_h + O(h^n). \quad (3.24)$$

Наряду с выбранной сеткой, имеющей шаг  $h$ , рассмотрим более мелкую сетку с шагом  $h_1$  ( $h_1 < h$ ), сохраняющую узлы прежней сетки.

Запишем линейную комбинацию

$$\tilde{u}_h = au_{h_1} + bu_h, \quad (3.25)$$

где  $a$  и  $b$  - неизвестные константы.

Подставим в равенство (3.25) разложение (3.23) и аналогичное разложение для  $u_{h_1}$ . Рассматривая результат на сетке с шагом  $h$ , можем записать

$$\tilde{u}_h = (a+b)[u]_h + \alpha_h (ah^m + bh_1^m) + O(h^n).$$

Для обеспечения справедливости равенства (3.24) потребуем, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{aligned} a + b &= 1; \\ ah^m + bh_1^m &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Решение системы (3.26) имеет вид

$$\begin{aligned} a &= -h_1^m / (h^m - h_1^m); \\ b &= h^m / (h^m - h_1^m). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Формулы (3.25) и (3.27) обеспечивают повышение точности сеточного решения до величин  $O(h^n)$ .

Аналогично можно строить сеточные решения более высокого порядка точности.

#### 4. Требования к оформлению отчета по лабораторным работам.

Отчет по лабораторным работам должен иметь стандартный титульный лист (см. приложение 2).

В начале записки должен быть указан номер варианта и приведен полный текст задачи, соответствующей этому варианту. Здесь же следует привести конкретные значения параметров и выражения функций, которые были использованы при проведении вычислительных экспериментов.

Далее, по каждой лабораторной работе необходимо:

- указать тему и задание;
- дать описание проделанной работы по каждому этапу задания;
- сделать вводы по итогам работы.

#### Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. М.: Наука, 1980.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
5. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

#### Приложение 1

##### Исходные данные для вариантов лабораторной работы №1.

###### Вариант 1.

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| а) $l=30$ [см];<br>$T=300$ [с];       | б) $l=10$ [см];<br>$T=150$ [с];       |
| $D=0.001 \left[ \frac{1}{c} \right];$ | $D=0.002 \left[ \frac{1}{c} \right];$ |