ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ЗАДАЧИ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 517.2(075)

Составитель **О. М. Карпилова**

Рецензент канд. техн. наук, доц. Г. Н. Г у т м а н

Задачи по дифференциальному исчислению: метод. указания / сост. *О.М. Карпилова.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 40 с.

Методические указания содержат примеры и задачи по разделу «Дифференциальное исчисление» в соответствии с программой курса высшей математики для технических специальностей. Подробно разбираются решения типовых задач, а также предлагаются задачи и примеры для самостоятельного решения. Сформулированные по каждой теме вопросы для самопроверки предназначены для лучшего усвоения теоретического материала. В приложении даны варианты типовой расчетно-графической работы.

Методические указания предназначены для студентов ИЭТ СГАУ.

УДК 517.2(075)

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое приращение функции?
2. Найти Δy, если $y = x^3 + x$.
3. Что такое производная функции в точке?
4. Что такое касательная к кривой в точке?
5. Каков геометрический смысл производной?
6. Как записать уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$?
7. Какой угол образует с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции $y = y(x)$ в точке $x = 1$, если известно, что в этой точке $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$?
8. Каков механический смысл производной?
9. Тело движется по заданному закону $s = s(t)$. Как найти его скорость в момент времени t?

Решение примеров

1.1. Пользуясь определением, найти производные следующих функций:

а) $y = x^2 + 2x + 3$; б) $y = \sin 3x$.

Решение. а) По определению производной функции $y = y(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Поэтому, чтобы найти производную, дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция y получит приращение $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Так как

$y = x^2 + 2x + 3$, то $\Delta y = \left((x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 3\right) - \left(x^2 + 2x + 3\right) =$

$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 3 - x^2 - 2x - 3 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x$.

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + 2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + 2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + 2 + \Delta x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 2 + \Delta x) = 2x + 2.$$

Таким образом $(x^2 + 2 + 3)' = 2x + 2$.

б) Чтобы найти производную функции, дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = \sin 3x$ получит приращение $\Delta y = \sin 3(x + \Delta x) - \sin 3x$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и преобразуем его:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin 3(x+\Delta x)-\sin 3x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{3(x+\Delta x)-3x}{2}\cos\frac{3(x+\Delta x)+3x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)=3\cos 3x.$$

Здесь

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}\cdot 3\right)=3.$$

Таким образом, $(\sin 3x)'=3\cos 3x.$

1.2. Тело движется по закону $s=t^2+2t+3$. Найти его скорость в момент времени $t=2$ с.

Решение. Мгновенная скорость тела – это производная от пройденного пути, т.е. $v=s'$. Так как $s'=2t+2$ (см. пример 1.1-а), то $v\big|_{t=2}=(2t+2)\big|_{t=2}=6$.

1.3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sin 3x$ в точке, где $x=\frac{\pi}{9}$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$ в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

В нашем случае $x_0=\frac{\pi}{9}$; $y_0=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$y'=3\cos 3x$ (см. пример 1.1-б); $y'(x_0)=3\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right)=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Подставляя вычисленные значения, получаем уравнение касательной:

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{9}\right)$, или (после преобразований) $y=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

Общий вид уравнения нормали к графику функции $y=y(x)$ в точке $M(x_0;y_0)$: $y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

Таким образом, в данной задаче уравнение нормали принимает вид

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{9}\right)$, или (после преобразований) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{27}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.4. Пользуясь определением, найти производные следующих функций:
а) $y = x^3 - 2x + 1$; б) $y = \cos 4x$; в) $y = \sqrt{x+1}$.

ОТВЕТЫ.

Вопросы: 2) $\Delta y = (3x^2 + 1)\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$; 7) 45°.

Задачи: **1.4**. а) $3x^2 - 2$; б) $-4\sin 4x$; в) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

2. ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется сложной? Привести пример.
2. Теорема о производной сложной функции.
3. Как найти производную суммы двух дифференцируемых функций? Производную их произведения? Частного?
4. Что можно сказать о производных двух функций, отличающихся друг от друга на константу?
5. График функции $f(x)$ получается из графика функции $\varphi(x)$ сдвигом на p единиц вниз. Можно ли утверждать, что $f'(x) = \varphi'(x)$?
6. График функции $f(x)$ получается из графика функции $\varphi(x)$ растяжением вдоль оси Oy в k раз. Какое соотношение связывает производные этих функций?
7. Всякая ли дифференцируемая функция будет непрерывной?
8. Функция $y = y(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Можно ли утверждать, что $y(x)$ дифференцируема в этой точке?

Решение примеров

2.1. Найти y', если $y = 3x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Пользуясь формулами дифференцирования, имеем:

$$y' = \left(3x^5 - 4x^{-3} + x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3\cdot 5x^4 - 4(-3)x^{-4} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= 15x^4 + \frac{12}{x^4} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

2.2. Найти y', если $y = \left(x^3 + 4\right)\cos x$.

Решение. Воспользуемся формулой $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = \left(x^3+4\right)' \cos x + \left(x^3+4\right)\left(\cos x\right)' = 3x^2 \cos x + \left(x^3+4\right)\left(-\sin x\right) =$$
$$= 3x^2 \cos x - \left(x^3+4\right)\sin x.$$

2.3. Найти $y'(0)$, если $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-1}$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(\ln(x+1)\right)'\left(x^2-1\right) - \left(\ln(x+1)\right)\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{\dfrac{x^2-1}{x+1} - 2x\cdot\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)^2} =$$
$$= \frac{x-1-2x\cdot\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Подставляя значение $x = 0$, получим

$$y'(0) = \frac{0-1-2\cdot 0\cdot\ln(0+1)}{\left(0^2-1\right)^2} = -1.$$

2.4. Найти y', если а) $y = \left(4x^3+2\right)^5$; б) $y = \sin^3 2x$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся теоремой о производной сложной функции: если функция $u = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = \varphi(u)$ имеет производную в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $y = \varphi(f(x))$ имеет в точке x_0 производную, равную $y'(x_0) = \varphi'(u_0)\cdot u'(x_0)$.

а) Здесь $y = u^5$, $u = 4x^3+2$, поэтому

$$y' = 5u^4\cdot u' = 5\left(4x^3+2\right)^4\left(4x^3+2\right)' = 5\left(4x^3+2\right)^4\cdot 4\cdot 3x^2 = 60x^2\left(4x^3+2\right)^4.$$

б) Здесь $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 2x$, откуда

$$y' = 3\sin^2 2x\cdot(\sin 2x)' = 3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)' = 3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot 2 =$$
$$= 6\sin^2 2x\cdot\cos 2x.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.5. Найти производные следующих функций:

а) $y = 4x^6 + \dfrac{3}{x} + \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y = \dfrac{\cos x + 3}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \operatorname{tg} x\cdot\ln x$; г) $y = \sqrt{2-4x^3}$; д) $y = (\operatorname{ctg} 2x)\left(\sqrt{3x-1}\right)$;

е) $y = \dfrac{\sin^2(3x+1)}{2^x-4}$; ж) $y = \arcsin\left(x^2+5x\right)$; з) $y = \operatorname{arctg} e^x$;

и) $y = \arccos\dfrac{1}{x}$; к) $y = \sqrt{\log_3\left(\sin\left(x^3\right)\right)}$.

2.6. Тело движется по закону $s(t)=8t^3-t+12$. Найти скорость тела в момент $t=1$ с.

2.7. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y=3x^2+x^5-4x$ в точке, где $x=1$.

2.8. Под каким углом график функции $y=\operatorname{arctg} x$ наклонен к оси Ox в начале координат?

ОТВЕТЫ.

Вопросы: 5) производные равны; 6) да; 7) $f'(x)=k\varphi'(x)$; 8) да; 9) нет.

Задачи: **2.6**. 23; **2.7**. $y=7x-7$; $y=\frac{1}{7}-\frac{x}{7}$; **2.8**. 45°.

3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое вторая производная? Третья производная?
2. Каков физический смысл второй производной?
3. Функция $y=y(x)$ в точке x_0 дважды дифференцируема. Будет ли y' непрерывна в точке x_0? Почему?

Решение примеров

3.1. Найти $y'''(1)$, если $y=5x^4+3x^2-x+4$.

Решение. Вычисляем последовательно

$y'=20x^3+6x-1$; $y''=60x^2+6$; $y'''=120x$. Тогда $y'''(1)=120$.

Задачи для самостоятельного решения

3.2. Тело движется по закону $s=3\sin 2t$. Найти ускорение в момент $t=\frac{\pi}{4}$.

3.3. $y=\cos^2 5x;\ y''=?$ **3.4**. $y=\ln x;\ y^{\mathrm{IV}}=?$ **3.5**. $y=\arcsin 2x;\ y''=?$

3.6. $y=2^{\sin 3x};\ y''=?$

ОТВЕТЫ: *Вопросы*: 3) да.

Задачи: **3.2**. -12; **3.3**. $-50\cos 10x$; **3.4**. $-\frac{6}{x^4}$; **3.5**. $\frac{8x}{\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

3.6. $9\ln 2\cdot 2^{\sin 3x}\left[\ln 2\cdot\cos^2 3x-\sin 3x\right]$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Вопросы для самопроверки

1. Что означает термин «неявная функция»?

2. Всегда ли уравнение $F(x, y) = 0$ неявно задает функцию?
3. Как отыскивается производная неявной функции?

Решение примеров

4.1. Найти y'_x, если $e^{xy} = \sin(x + y)$.

Решение. Полагаем, что данное уравнение задает неявно функцию $y = y(x)$, т.е. функция $y(x)$ при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. Поскольку производные тождественных функций равны, то при дифференцировании обеих частей уравнения по x равенство не нарушается.

Имеем: $\left(e^{xy}\right)' = e^{xy}(xy)' = e^{xy}(y + xy')$;

$(\sin(x + y))' = \cos(x + y)(x + y)' = (1 + y')\cos(x + y)$.

Следовательно, $e^{xy}(y + xy') = (1 + y')\cos(x + y)$.

Разрешив полученное уравнение относительно y', окончательно получим:

$$y' = \frac{\cos(x + y) - ye^{xy}}{xe^{xy} - \cos(x + y)}.$$

4.2. Найти y''_{xx}, если $x - y = \ln(x + y)$.

Решение.

Дифференцируя обе части уравнения по x, получим: $1 - y' = \dfrac{1 + y'}{x + y}$.

Преобразуем выражение $\dfrac{y'}{x + y} + y' = 1 - \dfrac{1}{x + y}$ и найдем y':

$$y' = \frac{1 - \frac{1}{x + y}}{1 + \frac{1}{x + y}} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}. \qquad (*)$$

Дифференцируя полученное равенство по x снова, получим y'':

$$y'' = \frac{(1 + y')(x + y + 1) - (1 + y')(x + y - 1)}{(x + y + 1)^2} = \frac{2(1 + y')}{(x + y + 1)^2}.$$

Подставив вместо y' полученное выше значение (*), имеем окончательно:

$$y'' = \frac{2\left(1 + \frac{x + y - 1}{x + y + 1}\right)}{(x + y + 1)^2} = \frac{4(x + y)}{(x + y + 1)^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.3. Найти y'_x для следующих функций:

а) $x^2 y + xy^3 + x - y = 0$; б) $\sqrt{x + y} = \sin(xy)$;

в) $x\cos y = e^{\frac{x}{y}}$; г) $x + \operatorname{arctg} y + \ln(x+y) = 0$.

4.4. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $x^2 + y + xy^2 - 5 = 0$ в точке $M(0;5)$.

4.5. Найти $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, если $y^3 - x^2 + x + y = 0$.

ОТВЕТЫ:

Задачи: **4.3**. а) $\dfrac{2xy + y^3 + 1}{1 - 3xy^2 - x^2}$; б) $\dfrac{2y\sqrt{x+y}\cos(xy) - 1}{1 - 2x\sqrt{x+y}\cos(xy)}$; в) $\dfrac{y^2\cos y - ye^{\frac{x}{y}}}{xy^2\sin y - xe^{\frac{x}{y}}}$;

г) $-\dfrac{(1+y^2)(x+y+1)}{1+y+y^2+x}$. **4.4**. Касательная $y = 5 - 25x$; нормаль $y = 5 + \dfrac{x}{25}$.

4.5. $\dfrac{2(3y^2+1)^2 - 6y(2x-1)^2}{(3y^2+1)^3}$.

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается метод логарифмического дифференцирования?
2. В каких случаях применяют логарифмическое дифференцирование?

Решение примеров

5.1. Найти y', если $y = (x^2 + 3x + 1)^{\sin x}$.

Решение. Так как необходимо продифференцировать показательно-степенную функцию, то следует применить логарифмическое дифференцирование. Для этого прологарифмируем данную функцию $\ln y = \ln(x^2 + 3x + 1)^{\sin x}$.
По свойствам логарифмов $\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 3x + 1)$.

Теперь можно найти y' как производную неявно заданной функции:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^2 + 3x + 1) + \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\sin x;$$

$$y' = y\left[\cos x \cdot \ln(x^2 + 3x + 1) + \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\sin x\right].$$

Подставляя выражение для y, получаем окончательно:

$$y' = (x^2 + 3x + 1)^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln(x^2 + 3x + 1) + \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\sin x\right].$$

5.2. Найти y', если $y = \dfrac{(5x^3+2)\cdot\sqrt[3]{x^4-1}\cdot(x^7+4x)}{\sqrt{x+2}\cdot(x+4)^3}$.

Решение. Так как рассматриваемая функция представляет собой произведение и частное нескольких других функций, удобно применить логарифмическое дифференцирование.

Логарифмируем обе части равенства и преобразовываем правую часть, используя свойства логарифмов:

$$\ln y = \ln \frac{\left(5x^3+2\right)\cdot \sqrt[3]{x^4-1}\left(x^7+4x\right)}{\sqrt{x+2}\cdot (x+4)^3};$$

$$\ln y = \ln\left(5x^3+2\right)+\frac{1}{3}\ln\left(x^4-1\right)+\ln\left(x^7+4x\right)-\frac{1}{2}\ln(x+2)-3\ln(x+4).$$

Находим y'_x как производную неявной функции:

$$\frac{y'}{y}=\frac{15x^2}{5x^3+2}+\frac{4x^3}{3\left(x^4-1\right)}+\frac{7x^6+4}{x^7+4x}-\frac{1}{2(x+2)}-\frac{3}{x+4};$$

$$y'=y\left[\frac{15x^2}{5x^3+2}+\frac{4x^3}{3\left(x^4-1\right)}+\frac{7x^6+4}{x^7+4x}-\frac{1}{2(x+2)}-\frac{3}{x+4}\right].$$

Задачи для самостоятельного решения

5.3. Найти производные следующих функций:

а) $y'=(\sin x)^{\cos 2x}$; б) $y=\left(x^2+4\right)^{\ln x}$;

в) $y=\dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2}}{\left(x^3+4x+5\right)^2(x-3)}$; г) $y=\dfrac{e^{3x}\cos^2 x}{\sqrt{x+3}}$.

ОТВЕТЫ: **5.3**. а) $(\sin x)^{\cos 2x}\left[\cos 2x \operatorname{ctg} x-2\sin 2x \ln\sin x\right]$;

б) $\left(x^2+4\right)^{\ln x}\left[\dfrac{\ln\left(x^2+4\right)}{x}+\dfrac{2x\ln x}{x^2+4}\right]$;

в) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2}}{\left(x^3+4x+5\right)^2(x-3)}\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+2}-\dfrac{2\left(3x^2+4\right)}{x^3+4x+5}-\dfrac{1}{x-3}\right]$;

г) $\dfrac{e^{3x}\cos^2 x}{\sqrt{x+3}}\left[3-2\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{2(x+3)}\right]$.

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое параметрически заданная функция?
2. Если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t-$ параметр, то чему равна производная t'?
3. Вспомните формулу дифференцирования параметрически заданной функции.

4. Назовите и нарисуйте кривую, заданную уравнениями
$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi$.

5. Назовите и нарисуйте кривую, заданную уравнениями $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

6. Нарисуйте астроиду, т.е. кривую, задаваемую уравнениями $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение примеров

6.1. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Решение. Так как производная функции, заданной параметрически, находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, то найдем сначала y'_t и x'_t.

$y'_t = b\cos t$; $x'_t = -a\sin t$.

Подставляя в формулу, получим:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Производную от функции, заданной параметрически, часто также записывают в виде $\begin{cases} y'_x = \varphi(t), \\ x = x(t). \end{cases}$

В нашем случае $\begin{cases} y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t; \\ x = a\cos t. \end{cases}$

6.2. Найти y''_{xx} при $t = 2$, если $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = (t+1)^4. \end{cases}$

Решение. Найдем сначала y'_x. Так как $y'_t = 4(t+1)^3$; $x'_t = 3t^2$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4(t+1)^3}{3t^2}.$$

Так как $y''_{xx} = (y'_x)'_x$, то для отыскания y''_{xx} надо продифференцировать параметрически заданную функцию: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{4(t+1)^3}{3t^2}, \\ x = t^3 + 1. \end{cases}$

$$(y'_x)'_t = \frac{4}{3}\cdot\frac{3(t+1)^2\cdot t^2 - (t+1)^3\cdot 2t}{t^4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(t+1)^2\cdot t(3t - 2t - 2)}{t^4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}.$$

По общей формуле

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{4(t+1)^2(t-2)}{3t^3}}{3t^2}=\frac{4(t+1)^2(t-2)}{9t^5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.3. Найти y'_x для следующих функций:

а) $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg}t, \\ y=t+\operatorname{ctg}t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

ОТВЕТЫ.

Вопросы: 4) эллипс; 5) циклоида.

Задачи: **6.3**. а) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{\sin^2 t-1}{\operatorname{tg}t}, \\ x=\ln\operatorname{tg}t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'_x=-1, \\ x=\dfrac{t+1}{t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y'_t=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}, \\ x=a(t-\sin t). \end{cases}$

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое дифференциал функции?
2. Как связаны между собой дифференциал и приращение функции?
3. Как связаны между собой производная функции и ее дифференциал?
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке $x=x_0$?
5. Чему равен дифференциал независимой переменной?
6. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
7. Приращение ординаты касательной к кривой $y=y(x)$ в точке $x=x_0$ равно 1. Найти величину $\mathrm{d}y$ и y' в этой точке, если $\Delta x=0{,}1$.
8. Как вычислить дифференциал сложной функции?
9. Что такое второй дифференциал?
10. Что такое дифференциал n - го порядка?
11. Как используется дифференциал функции в приближенных вычислениях?

Решение примеров

7.1. Найти $\mathrm{d}y$, если $y=\sqrt{\sin 3x}$.

Решение. Так как $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$, то для нахождения дифференциала функции достаточно производную этой функции умножить на дифференциал независимого переменного.

$y' = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$, следовательно, $\mathrm{d}y = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}\mathrm{d}x$.

7.2. Найти приращение ординаты касательной к графику функции, заданной неявно $y = \mathrm{tg}(xy) + x$ в точке $M(0;0)$, если $\Delta x = 0{,}01$.

Решение. Приращение ординаты касательной численно равно значению дифференциала $\mathrm{d}y$. Так как функция задана неявно, найдем дифференциал от левой и правой частей равенства:

$\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}(xy)}{\cos^2(xy)} + \mathrm{d}x$; откуда $\mathrm{d}y = \dfrac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{\cos^2(xy)} + \mathrm{d}x.$

Преобразуем полученное равенство и найдем $\mathrm{d}y$:

$$\cos^2(xy)\mathrm{d}y = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x + \cos^2(xy)\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}y = \frac{y + \cos^2(xy)}{\cos^2(xy) - x}\mathrm{d}x.$$

В точке $M(0; 0)$ дифференциал равен $\mathrm{d}y\big|_{M(0;0)} = \dfrac{0+1}{1-0}\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$.

Если $\Delta x = 0{,}01$, то, так как $\Delta x = \mathrm{d}x$, приращение ординаты касательной, т.е. $\mathrm{d}y\big|_{\substack{M(0;0)\\ \Delta x = 0{,}01}} = 0{,}01$.

7.3. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{9}$.

Решение. Так как $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, то формула для приближенных вычислений с помощью дифференциала имеет вид:

$y(x + \Delta x) \approx y(x) + \mathrm{d}y$, или $y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x$.

Заметим, что $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8 \cdot \dfrac{9}{8}} = 2\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{8}}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Полагая $x = 1, \Delta x = \dfrac{1}{8}$, получим по приближенной формуле $\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{8}} \approx \sqrt[3]{1} + y'(1) \cdot \dfrac{1}{8}$.

Учитывая, что $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, и, следовательно, $y'(1) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \dfrac{1}{3}$, получаем

$$\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}.$$

Таким образом, окончательно имеем $\sqrt[3]{9} = 2 \cdot \dfrac{25}{24} = \dfrac{25}{12} \approx 2\dfrac{1}{12} \approx 2{,}08$.

7.4. Найти $\mathrm{d}^3 y$, если $y = \ln x$.

Решение. Зная, что $\mathrm{d}^3 y = y'''(x)\mathrm{d}x^3$, вычислим сначала $y'''(x)$:

$y' = \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2}$; $y''' = \frac{2}{x^3}$. Таким образом, имеем $\mathrm{d}^3 y = \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x^3$.

Задачи для самостоятельного решения

7.5. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = \mathrm{tg}2x$; б) $y = \mathrm{arctg}4x$; **в**) $y = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\ln x}$; г) $\sin(x+y) = xy$.

7.6. $y = \arcsin x$; $\mathrm{d}^2 y = ?$

7.7. $y = \log_7 x$; $\mathrm{d}^3 y = ?$

7.8. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{10}$; б) $\ln(1{,}08)$; в) $\mathrm{arctg}(0{,}97)$.

ОТВЕТЫ: *Вопросы*: 7) $dy = 1$; $y' = 10$.

Задачи: **7.5**. г) $\frac{\cos(x+y) - y}{x - \cos(x+y)}\mathrm{d}x$. **7.6**. $\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x^2$. **7.7**. $\frac{2}{x^3 \ln 7}\mathrm{d}x^3$.

7.8. **а**) $3{,}17$; **б**) $0{,}08$; **в**) $0{,}77$.

8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляется предел отношения двух функций?
2. Когда предел отношения двух функций нельзя найти, используя теорему о пределе частного?
3. Как формулируется правило Лопиталя?
4. Какого типа неопределенности Вы знаете?

Решение примеров

8.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{\ln(x-1)}$.

Решение. При $x \to 2$ числитель $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \to 0$ и знаменатель $\ln(x-1) \to 0$. Таким образом, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, теорема о пределе частного неприменима. Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если эти пределы существуют.

Имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+3x-2}{\ln(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-3x^2+3x-2\right)'}{\left(\ln(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x+3}{\dfrac{1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}3\left(x^2-2x+1\right)(x-1)=3.$$

8.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

<u>Решение</u>. Здесь при $x\to+0$ $\ln\sin 2x\to-\infty$ и $\ln\sin x\to-\infty$.

Таким образом, имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\cos 2x\cdot\sin x}{\sin 2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\cos 2x\cdot\sin x}{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x}=1.$$

8.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

<u>Решение</u>. Теорема о пределе суммы неприменима, так как при $x\to 1$ $\dfrac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\dfrac{1}{x-1}\to\infty$. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$.

Чтобы иметь возможность применить правило Лопиталя, преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так, чтобы получить неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}.$$

Так как опять получили неопределенность $\dfrac{0}{0}$, применим правило Лопиталя второй раз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

8.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$.

Решение. При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем ее к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

8.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{8}{1+4\ln x}}$.

Решение. При $x \to 0$ имеем неопределенность вида 0^0.

Пусть $y = x^{\frac{8}{1+4\ln x}}$.

Прологарифмируем это равенство: $\ln y = \ln x^{\frac{8}{1+4\ln x}} = \dfrac{8}{1+4\ln x}\ln x$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{8\ln x}{1+4\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{8}{x}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x} = 2.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = 2$, то $y \to e^2$, так как в силу непрерывности логарифмической функции $\lim \ln y = \ln \lim y$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{8}{1+4\ln x}} = e^2$.

8.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0} y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решение. Здесь при $x \to +0$ мы имеем неопределенность вида ∞^0. Для ее раскрытия применим тот же прием, что и в примере 8.5.

Пусть $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$. Логарифмируя, получим $\ln y = \sin x \cdot \ln\dfrac{1}{x}$.

При $x \to +0$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Поэтому при вычислении $\lim\limits_{x\to +0}\ln y$ проведем дополнительные преобразования с целью получить неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применим два раза правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{(\sin x)^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$, то, следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}y=e^0=1$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие пределы:

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-6x}}{\ln(1+x)}$; **8.8**. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$;

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{-x}}{x^3}$; **8.10**. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x-1}}\right)$;

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$; **8.12**. $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$;

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)\operatorname{ctg}x$; **8.14**. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

ОТВЕТЫ: **8.7**. 9; **8.8**. $\frac{4}{7}$; **8.9**. ∞; **8.10**. 0,5; **8.11**. 0; **8.12**. ∞; **8.13**. 1; **8.14**. e; **8.15**. 1.

9. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИИ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМ

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется возрастающей? Убывающей?
2. Известно, что $f(x)$ - убывающая функция и $x_1>x_2$. Что больше $f(x_1)$ или $f(x_2)$?
3. Что такое интервалы монотонности функции?
4. Сформулируйте необходимое условие возрастания функции; убывания функции.
5. Сформулируйте достаточное условие возрастания функции; убывания функции.
6. Известно, что $f'(x)>0$ на $[a; b]$. Что больше $f(a)$ или $f(b)$?
7. Что такое точка максимума функции? Точка минимума?

8. Что такое экстремум функции?
9. Сформулируйте необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.
10. Известно, что $f'(x)=0$. Можно ли утверждать, что x_0 – точка экстремума функции? Привести пример.
11. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции.
12. Известно, что x_0 – точка экстремума функции. Как располагается касательная к графику функции в этой точке? Привести геометрические иллюстрации.
13. Сколько минимумов может иметь функция на заданном отрезке?
14. Сколько наименьших значений может иметь функция на заданном отрезке?
15. Чем отличаются понятия максимума и наибольшего значения?
16. В каких точках отрезка непрерывная функция может достигать своего наименьшего значения?

Решение примеров

9.1. Выяснить, убывает или возрастает функция $y = x^3 - 6x^2$ на интервалах: а) (5; 6); б) (2; 3).

Решение. Воспользуемся достаточным условием монотонности дифференцируемой функции. Если во всех точках интервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то на этом интервале функция $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$, то на этом интервале функция $f(x)$ убывает.

Найдем производную заданной функции: $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.

а) На интервале (5; 6) производная $y' > 0$, следовательно, функция $y = x^3 - 6x^2$ возрастает на этом интервале.

б) Так как во всех точках из интервала (2; 3) $y' < 0$, то функция $y = x^3 - 6x^2$ убывает на этом интервале.

9.2. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. Данная функция определена при всех действительных значениях x. Найдем производную: $y' = 2xe^{-x} + x^2\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} \cdot x(2-x)$.

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых производная обращается в ноль. Очевидно, $y' = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Эти точки являются подозрительными на экстремум, так как в них выполняется необходимое условие экстремума $(y' = 0)$.

Для уточнения поведения функции и проверки достаточного условия экстремума разобьем всю область определения на промежутки $(-\infty;0)$; $(0;2)$; $(2;+\infty)$ и изучим знаки первой производной.

Для наглядности составим таблицу (табл.1).

Таблица 1

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ max	$\searrow$

Из таблицы видно:

1. на интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$ $y'<0$, следовательно, функция убывает; на интервале $(0;2)$ $y'>0$, следовательно, функция возрастает;
2. при переходе через точку $x = 0$ слева направо производная y' меняет знак с – на +, следовательно, $x = 0$ – точка минимума функции $y_{\min}(0)=0$;
3. при переходе через точку $x = 2$ слева направо производная y' меняет знак с + на –, следовательно, $x = 2$ – точка максимума функции $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$.

9.3. Пользуясь второй производной, выяснить характер экстремума функции $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

Решение.

Данная функция определена при всех действительных значениях x. Чтобы найти критические точки, найдем y':

$$y'=\frac{4\left(x^2+4\right)-4x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{4\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Знаменатель этой дроби в ноль не обращается, следовательно, критические точки определяются уравнением $4-x^2=0$, откуда $x_1=-2$; $x_2=2$.

Найдем y'':

$$y''=4\cdot\frac{-2x\left(x^2+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4}=$$

$$=4\cdot\frac{2x\left(x^2+4\right)\left[-\left(x^2+4\right)-2\left(4-x^2\right)\right]}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{8x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}.$$

Для изучения наличия экстремума в стационарной точке надо определить знак второй производной в этой точке. По достаточному признаку экстремума, если x_0 – стационарная точка функции $f(x)$ и $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума, если же $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Проверим знаки второй производной y'' в стационарных точках $x_1=-2$; $x_2=2$:

$y''(-2)=\dfrac{8\cdot(-2)(4-12)}{(4+4)^3}>0$, следовательно, $x_1=-2$ – точка минимума функции и $y_{\min}=\dfrac{4\cdot(-2)}{4+4}=-1$;

$y''(2)=\dfrac{8\cdot 2(4-12)}{(4+4)^3}<0$, следовательно, $x_2=2$ – точка максимума функции и $y_{\max}=\dfrac{4\cdot 2}{4+4}=1$.

ОТВЕТ: $y_{\min}=y(-2)=-1;\ y_{\max}=y(2)=1.$

9.4. Для функции $y=2x^3-15x^2-84x+8$ найти наибольшее и наименьшее значение на отрезке [–3; 3].

Решение. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке [a; b] необходимо сравнить значения функции на концах отрезка и в критических точках функции, попадающих в интервал (a; b).

Таким образом, прежде всего, найдем первую производную и ее критические точки: $y'=6x^2-30x-84$.

Приравняв к нулю, имеем: $6x^2-30x-84=0$, то есть $x^2-5x-14=0$, откуда x_1 = -2; x_2 = 7.

$x_2=7\notin(-3;3)$, поэтому эту точку в дальнейшем не рассматриваем. Найдем значения функции на концах отрезка, т.е. в точках $a=-3; b=3$ и в критической точке $x=-2$.

$y(-3)=2\cdot(-27)-15\cdot 9-84\cdot(-3)+8=71;$

$y(3)=2\cdot 27-15\cdot 9-84\cdot 3+8=-325;$

$y(-2)=2\cdot(-8)-15\cdot 4-84\cdot(-2)+8=100.$

Сравнивая полученные значения, видим, что

$y_{\text{наиб}}=y(-2)=100;\ y_{\text{наим}}=y(3)=-325.$

Задачи для самостоятельного решения

9.5. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум следующие функции: а) $y=x\left(2+3\sqrt{x}\right)$; б) $y=2x^2-\ln x$; в) $y=(3-x)e^x$.

9.6. Исследовать на экстремум с помощью второй производной:

а) $y=x^3+3x^2-9x+4$; б) $y=2x^5-10x-7$.

9.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных промежутках: а) $y=2x^3-3x^2-12x+1$ на [–2; 0], б) $y=x^2\ln x$ на [1; e].

ОТВЕТЫ: **9.5**. **а**) всюду возрастает; **б**) функция убывает при $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, возрастает при $x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{1}{2}$; **в**) функция возрастает при $x \in (-\infty; 2)$, убывает при $x \in (2; +\infty)$, $y_{\max} = y(2) = e^2$.

9.6. **а**) $y_{\max}(-3) = 31$; $y_{\min}(1) = -1$; **б**) $y_{\max}(-1) = 1$; $y_{\min}(1) = -15$.

9.7. **а**) $y_{\text{наиб}}(-1) = 8$; $y_{\text{наим}}(-2) = -3$; **б**) $y_{\text{наим}}(1) = 0$; $y_{\text{наиб}}(e) = e^2$.

10. ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Вопросы для самопроверки

1. Какая кривая на данном интервале называется выпуклой? Вогнутой?
2. Как формулируется признак выпуклости графика функции $y = f(x)$?
3. Известно, что $f''(x) > 0$ во всех точках интервала $(a; b)$. Что можно сказать о выпуклости или вогнутости кривой $y = f(x)$ на этом интервале?
4. Что такое точка перегиба?
5. Что можно сказать о знаке второй производной функции в окрестности точки перегиба?
6. Во всех точках интервала $(\alpha; \beta)$ $f''(x) < 0$. В точке $M_0(x_0; y_0)$ $(x_0 \in (\alpha; \beta))$ проведена касательная к графику функции $y = f(x)$. Выше или ниже этой касательной расположен график функции $y = f(x)$ на $(\alpha; \beta)$?

Решение примеров

10.1. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функций:

а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$; б) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$.

Решение. а) Данная функция определена при $x \in (-\infty; +\infty)$. Интервалы выпуклости и вогнутости дифференцируемой функции можно найти с помощью второй производной, а именно, если на $(a; b)$ $f''(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ выпукла на этом интервале; если $f''(x) > 0$, то $y = f(x)$ вогнута на $(a; b)$. Точки, в которых $y'' = 0$ или не существует, возможно, являются точками перегиба функции $y = f(x)$.

Найдем y'':

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x; \quad y'' = 36x^2 - 48x + 12.$$

Приравнивая y'' к нулю, находим критические точки второй производной:

$36x^2 - 48x + 12 = 0$, т.е. $3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Составим таблицу (табл. 2) и, ориентируясь на знаки второй производной, отметим интервалы выпуклости и вогнутости.

Таблица 2

x	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	вогнута	$12\frac{11}{27}$ точка перегиба	выпукла	13 точка перегиба	вогнута

Так как при прохождении через точки $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{3}$ вторая производная меняет знак, то $M_1(1;13)$ и $M_2\left(\frac{1}{3};12\frac{11}{27}\right)$ – точки перегиба.

б) Рассматриваемая функция определена при $x \geq 1$.

Найдем y'':

$$y' = 4\cdot\frac{5}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 20\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$y'' = 10\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} + 30\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}} = 15(\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}) = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}.$$

При $x \geq 1$ $y'' > 0$, следовательно, функция $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$ вогнута на всей области определения.

Задачи для самостоятельного решения

10.2. Исследовать на выпуклость, вогнутость и найти точки перегиба для функций: а) $y = x^4 + x^3 + 5x + 5$; б) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$; в) $y = x\,\mathrm{arctg}\,x$.

ОТВЕТЫ: **10.2**. **а**) на (–2; 0) выпукла; на $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ вогнута; M_1(–2; 3), M_2(0; 5) – точки перегиба;
б) на $(-\infty;0)$ выпукла; на $(0;+\infty)$ вогнута; M(0; 0) – точка перегиба;
в) всюду вогнута.

11. АСИМПТОТЫ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое асимптота кривой?
2. Какие виды асимптот Вы знаете?
3. Какой вид имеет уравнение невертикальной асимптоты?

Решение примеров

11.1. Найти все асимптоты кривых: а) $y = \frac{3x}{x-1} + 3x$; б) $y = xe^x$.

Решение. а) Данная функция определена при всех действительных значениях x, кроме $x = 1$. $x = 1$ – точка разрыва функции.

Исследуем ее:

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=-\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=+\infty.$$

Следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

Уравнение невертикальной асимптоты ищем в виде $y = kx + b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Вычислим коэффициенты k и b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}+3\right)=3;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}+3x-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3.$$

Таким образом, кривая имеет невертикальную асимптоту $y = 3x + 3$.

б) Функция определена при всех действительных x. Вертикальных асимптот функция не имеет.

Найдем невертикальные асимптоты. Поскольку при $x\to+\infty$ $e^x\to\infty$, а при $x\to-\infty$ $e^x\to 0$, то рассмотрим два случая.

$$k_{п}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=+\infty.$$

Следовательно, правой невертикальной асимптоты нет.

$$k_{л}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=0;$$

$$b_{л}=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-0\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

(Здесь при вычислении предела было применено правило Лопиталя).

Таким образом, левая невертикальная асимптота – это горизонтальная асимптота $y = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

11.2. Найти все асимптоты функций:

а). $y=\dfrac{x}{x^3+1}$; б) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; в) $y=\dfrac{4x^2+7}{x-3}$.

ОТВЕТЫ: **11.2**. **а**) $y = 0$ – горизонтальная асимптота; $x = -1$ – вертикальная асимптота; **б**) $x = 0$ – вертикальная асимптота; **в**) $x = 3$ – вертикальная асимптота; $y = 4x + 12$ – невертикальная асимптота.

12. ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Пример. Исследовать и построить график функции $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

Решение.

1. Область определения: $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

2. Точка разрыва $x=-1$.

3. Исследуем на четность: $y(-x)=\dfrac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2}$, $y(-x)\neq y(x)$; $y(-x)\neq -y(x)$, следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция непериодическая.

5. Асимптоты: а) вертикальная $x=-1$, так как

$$\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty;$$

б) невертикальная $\underset{x\to\pm\infty}{y}=kx+b$, где $k=\lim\dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$;

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{x^2+2x-1}=-5.$$

Таким образом, невертикальная асимптота имеет уравнение $y=x-5$.

6. Точки пересечения с осями координат: при $x=0$ имеем $y=-1$; функция $y=0$ при $x=1$. Таким образом, график пересекает координатные оси в точках $M_1(0;-1)$, $M_2(1;0)$.

7. Вычислим первую производную и найдем ее критические точки

$$y'=\frac{3(x-1)^2(x+1)^2-(x-1)^3\,2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x-1)^2(x+1)[3x+3-2x+2]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

$y'=0$ при $x=-5$ и $x=1$; y' не существует при $x=-1$.

Итак, критические точки первой производной $x_1=-5, x_2=-1, x_3=1$.

8. Вычислим вторую производную и найдем ее критические точки:

$$y''=\frac{\left(2(x-1)(x+5)-(x-1)^2\right)(x+1)^3-(x-1)^2(x+5)^3(x+1)^2}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)((2x+10+x-1)(x+1)-3(x-1)(x+5))}{(x+1)^6}=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

$y''=0$ при $x=1$; y'' не существует при $x=-1$.

Критические точки второй производной: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

9. Сведем все данные в таблицу (табл. 3).

Таблица 3

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	+	0	+
y''	–	–	–	не сущ.	–	0	+
y	возраст. вып.	$-\dfrac{27}{2}$ max	убыв. вып.	точка разрыва	возраст. вып.	точка перегиба	возраст. вогн.

10. Построим график (рис.1).

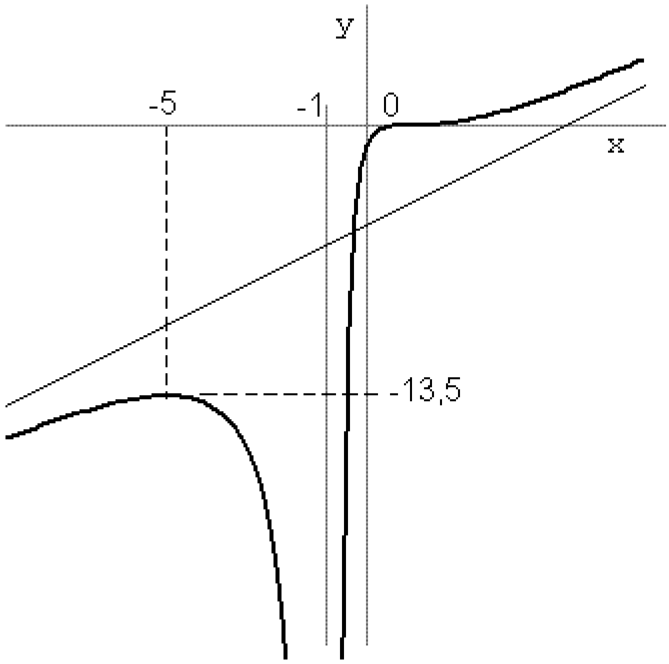

Рис. 1

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать функции и построить их графики:

12.1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; **12.2**. $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$; **12.3**. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

ОТВЕТЫ:

12.1. см. рис. 2; **12.2**. см. рис. 3; **12.3**. см. рис. 4.

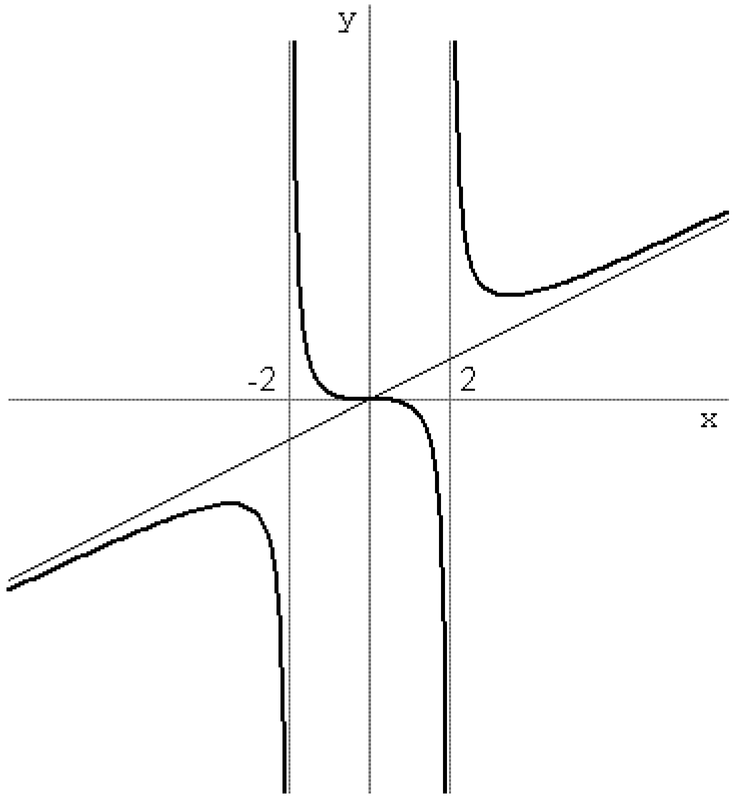

Рис.2

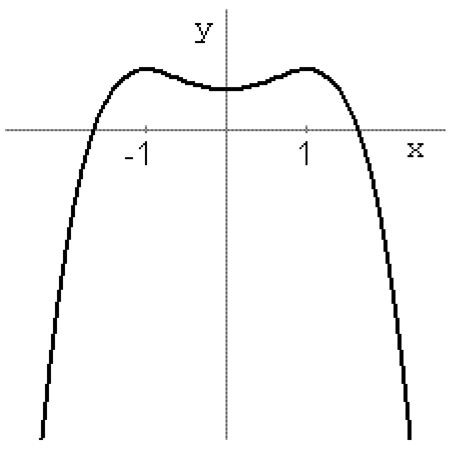

Рис.3

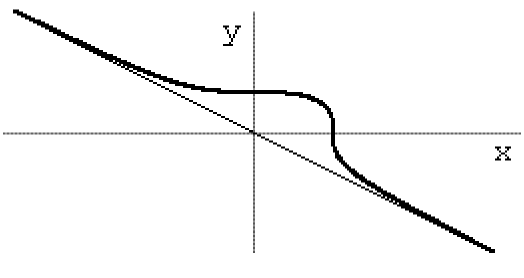

Рис. 4

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ: «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ»

Задания:

1. Пользуясь определением, вычислить производную функции.
2. Тело движется по заданному закону $s = s(t)$. Найти скорость и ускорение через 4 секунды после начала движения.
3. Найти первые производные указанных функций.
4. Найти производные высших порядков для функций.
5. Вычислить производную y'_x для функции, заданной неявно.
6. Вычислить производную y'_x от функции, заданной параметрически.
7. Найти производную y'_x, применяя метод логарифмического дифференцирования.
8. Найти дифференциал функции $\mathrm{d}y$.
9. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = y(x)$ в заданной точке.
10. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы.
11. Исследовать функцию и построить ее график.
12. Найти приближенно решение данного уравнения с точностью 0,001 (пользуясь методом хорд и касательных).

Вариант 1

1. $y = x^2 + 5x - 1$; 2. $s = t^2 - 9t + 2$;

3. а) $y = \sin\dfrac{x}{2}\cos 2x$; б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$;

4. $y = \cos 3x,\ y''' = ?$ 5. $\dfrac{xy}{y+1} = e^{xy}$;

6. $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$; 7. $y = x^x$;

8. $y = x^4 - 2x$; 9. $y = 4 - x^2$ при $x = -1$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

11. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)}$; 12. $\operatorname{tg}x = x - 2$.

Вариант 2

1. $y = \dfrac{1}{x^2}$; 2. $s = t^2 - 9t + 2$;

3. а) $y = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$, б) $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$;

4. $y=\mathrm{tg}\,5x,\ y'''=?$ 5. $\sin(xy)=\dfrac{x}{y}$;

6. $x=\sqrt{t},\ y=\sqrt[3]{t}$; 7. $y=x^{x^2}$;

8. $y=\ln\left(1+e^{5x}\right)$; 9. $y=\mathrm{ctg}\,\pi x$ при $x=\dfrac{1}{2}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$;

11. $y=\dfrac{1-x^2}{x^4}$; 12. $10x=e^{-x}$.

Вариант 3

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 2. $s=3t^3-7t+4$;

3. а) $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$;

4. $y=\dfrac{1}{x^2},\ y^{(4)}=?$ 5. $\mathrm{tg}(x+y)=x^2y+xy^2$;

6. $x=\sin 2t,\ y=\sin^2 t$; 7. $y=\sqrt[x]{x}$;

8. $y=\mathrm{arctg}\,e^{10x}$; 9. $y^2-2x^2=1$ при $x=2$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{\mathrm{ctg}\,x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}[\arcsin(x-1)\mathrm{ctg}(x-1)]$;

11. $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$; 12. $\cos x-x^2=0$.

Вариант 4

1. $y=\sqrt{4x+1}$; 2. $s=4t^3-6t+5$;

3. а) $y=e^{-x^2}$, б) $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\sin 3x}}$;

4. $y=\dfrac{\sin 2x}{x+1},\ y''=?$ 5. $\cos\left(x^2-y\right)+\dfrac{x}{y}=0$;

6. $x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;

7. $y=x^{\sqrt{x}}$; 8. $y=\dfrac{x^3}{9}(1-3\ln x)$;

9. $y=x^3-3x+2$ в точке $M(2;\,4)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-x}{x-\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$;

11. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; 12. $\dfrac{1}{x^2}=\ln x$.

Вариант 5

1. $y=\sin 3x$; 2. $s=5t^3-5t+6$;

3. а) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$;

4. $y=\log_2 x,\ y'''=?$ 5. $\operatorname{ctg}(x-y)=2x^2+4y^2-3y+1$;

6. $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos 2t)$;

7. $y=\sqrt[x]{\arcsin x}$; 8. $y=\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{3}$;

9. $y=\sqrt{2x-3}$ при $x=2$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{\ln x}-x}{\ln x}$, б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\ln\operatorname{tg}2x}$;

11. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-4x+5}$; 12. $\ln x+\sqrt{x}=0$.

Вариант 6

1. $y=\dfrac{2x+1}{3x+1},\ y'(1)=?$ 2. $s=6t^3-4t+7$;

3. а) $y=\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)e^{2x+3}$, б) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

4. $y=\operatorname{ctg}4x,\ y'''=?$ 5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ y'_x(a)=?$

6. $x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$;

7. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; 8. $y=(1-\ln\sin x)\sin x$;

9. $y=2x^2-x+5$ при $x=-0{,}5$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$, б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4^x}{x}$;

11. $y=\dfrac{4}{(x-2)^2}+2-x$; 12. $x=e^{-x}$.

Вариант 7

1. $y=\sqrt{x},\ y'(9)=?$ 2. $s=7t^3-3t+8$;

3. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$, б) $y=\operatorname{tg}2x\ln\dfrac{x}{3}$;

4. $y=4^{x^2+2x},\ y''=?$ 5. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$;

6. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$; 7. $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2x}$;

8. $y = e^{-x}\left(2 - 2x - x^2\right)$;

9. $y = x^4 + 3x^2 - 16$ в точках пересечения с кривой $y = 3x^2$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$, б) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\ln(x-1) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$;

11. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 2}$; 12. $3^x = 3 - 3x$.

Вариант 8

1. $y = 5x^2 - 2x$; 2. $s = 8t^3 - 2t + 9$;

3. а) $y = \dfrac{tg\dfrac{x}{2} + ctg\dfrac{x}{2}}{x}$, б) $y = \sin^2 x \cdot \cos\left(x^2\right)$;

4. $y = e^{x\operatorname{tg} x}$, $y'' = ?$ 5. $y^5 - 5xy + x^5 = 0$;

6. $x = \dfrac{6 - 2t}{2t}$, $y = \dfrac{(2-t)^3}{t^2}$; 7. $y = (\cos x)^{\sin x}$;

8. $y = \operatorname{arcctg} e^x$; 9. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке $M(1;1)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{\cos 3x - e^{-x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

11. $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; 12. $\dfrac{2}{x} = \operatorname{tg} x$.

Вариант 9

1. $y = \sqrt[3]{x}$; 2. $s = 10 + 9t^3 - t$;

3. а) $y = \dfrac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$, б) $y = x \cdot \arcsin(\ln x)$;

4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$, $y'' = ?$ 5. $2^x - e^{x-y} = 0$;

6. $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$; 7. $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{x+1}$;

8. $y = \dfrac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{e^{3x}}$; 9. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точке $M(-2;5)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt{2 + x} + x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$;

11. $y = \dfrac{1 + 2x - x^2}{(x-1)^4}$; 12. $e^{3x} = 1 + x$.

Вариант 10

1. $y=2x+4$; 2. $s=11+10t^3$;

3. а) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$, б) $y=\cos x\cdot\sqrt{\sin^2 x+1}$;

4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$, $y''=?$ 5. $\ln x+e^{-\frac{4}{x}}=10$;

6. $x=\dfrac{\sin t}{1+2\cos t}$, $y=\dfrac{3\cos t}{1+2\cos t}$;

7. $y=(\sin x)^x$; 8. $y=\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$;

9. $y=\mathrm{tg}2x$ в начале координат;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2}\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+x)}$;

11. $y=\dfrac{3}{x^2-2x+2}$; 12. $e^{x-1}=2-4x$.

Вариант 11

1. $y=\dfrac{1}{x^2-2}$; 2. $s=t+12+11t^3$;

3. а) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$, б) $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$;

4. $y=\arcsin\sqrt{x}$, $y''=?$ 5. $x+\sqrt{xy}+y=3$;

6. $x=\dfrac{4t}{1+t^2}$, $y=\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}$; 7. $y=(\mathrm{tg}\,x)^x$;

8. $y=\dfrac{x}{1-x}$; 9. $y=\sqrt[3]{x-1}$ в точке $M(1;0)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\ln\dfrac{1}{x}$;

11. $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x^2-4x+5}$; 12. $\sin 2x-x^2=0$.

Вариант 12

1. $y=\cos 2x$; 2. $s=2t+12t^3+13$;

3. а) $y = x^3 \operatorname{arctg}\left(x^3\right)$, б) $y = \dfrac{2^{x+1}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$;

4. $y = \arccos\left(x^3\right)$, $y'' = ?$ 5. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

6. $x = \sqrt{t^2 + 1},\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2 + 1}}$;

7. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$; 8. $y = x^5 - 5^y$;

9. $x = 2\sqrt{3}\cos t,\ y = 2\sin t$ при $t = \dfrac{\pi}{6}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos 2x}$;

11. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; 12. $\operatorname{tg}2x - x = 0$.

Вариант 13

1. $y = \operatorname{ctg} x$; 2. $s = 14 + 13t^3 + 3t$;

3. а) $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$; б) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

4. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$, $y'' = ?$ 5. $e^y + xy = e,\ y'_x(0) = ?$

6. $x = \cos^2 t,\ y = 2\sin^2 t$; 7. $y = x^{\sin x}$;

8. $y = (2 - \cos x)\left(x^2 + 2x\right)$; 9. $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$;

11. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$; 12. $x^3 + x - 1 = 0$.

Вариант 14

1. $y = (x-1)^2 + 2x$; 2. $s = 14t^3 + 4t + 15$;

3. а) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, б) $y = e^{2x}(2\sin x - \cos x)$;

4. $y = \operatorname{arcctg} e^x$, $y'' = ?$ 5. $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$;

6. $x = \cos t + t\cos t,\ y = \sin t - t\cos t$;

7. $y = \left(2x + x^2\right)^{\operatorname{tg} x}$; 8. $y = e^{-x^2}$;

9. $x = \dfrac{1+t}{t^3},\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}$ в точке $M(2; 2)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x\cdot tg(x)}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$;

11. $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x+2}$; 12. $xe^x=2$.

Вариант 15

1. $y=3x-x^2$; 2. $s=16+15t^3+5t$;

3. а) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$, б) $y=\sin x\cdot 4^{\cos 2x}$;

4. $y=\dfrac{1}{x^2+5x+4}$, $y''=?$ 5. $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

6. $x=e^{-t}$, $y=e^{2t}$; 7. $y=(\ln x)^{\sin x}$;

8. $y=x\ln x-x$; 9. $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t\end{cases}$ в начале координат;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$;

11. $y=\dfrac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2}$; 12. $\operatorname{ctg}x=x-2$.

Вариант 16

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; 2. $s=16t^3+6t+17$;

3. а) $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$, б) $y=(\ln\sin x)\operatorname{tg}3x$;

4. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^2}$, $y''=?$ 5. $\sqrt{x^2+y^2}=2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

6. $x=\dfrac{2\sin t}{1+3\cos t}$, $y=\dfrac{5\cos t}{1+3\cos t}$;

7. $y=(x+1)^{2x}$; 8. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

9. $x^3+y^2+2x-6=0$ при $y=3$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}2x)$;

11. $y=\dfrac{x}{x^2-2}$; 12. $\operatorname{tg}x+x-1=0$.

Вариант 17

1. $y=\sin 4x$; 2. $s=29+7t+17t^2$;

3. а) $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$, б) $y=(\arcsin 4x)^3\cdot\sqrt{2x+x^5}$;

4. $y=\sqrt[3]{x}\cdot\sin 2x$, $y''=?$ 5. $\ln y=4-\dfrac{x}{y}$;

6. $x=\dfrac{6t}{1+t^3}, y=\dfrac{6t^2}{1+t^3}$; 7. $y=(\cos 2x)^{\sqrt{x}}$;

8. $y=\operatorname{ctg} x+\operatorname{cosec} x$; 9. $y^4=4x^4+6xy$ в точке $M(1;e)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt[n]{2^n-x^n}}{x^n}$, б) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)$;

11. $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$; 12. $x\ln x=0{,}8$.

Вариант 18

1. $y=3x^2-4x+2$; 2. $s=18t^3+8t+20$;

3. а) $y=\operatorname{tg}2x\cdot\cos 3x$, б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{2x-1}$;

4. $y=\cos\sqrt[3]{x},\ y''=?$ 5. $\arcsin y=x^2y$;

6. $x=t\ln t,\ y=\dfrac{\ln t}{t}$; 7. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$;

8. $y=x\sqrt{x^2+5}$; 9. $y=\ln x$ в точке $M(1;0)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$;

11. $y=\dfrac{1}{6x-x^2-8}$; 12. $\sin 3x-x=0$.

Вариант 19

1. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$; 2. $s=19t^3+9t-7$;

3. а) $y=\ln\dfrac{2-3e^x}{2e^x}$, б) $y=(x+1)^2\sqrt{2+\sqrt{x}}$;

4. $y=\operatorname{tg}\left(3x^2\right),\ y''=?$ 5. $\arccos(x+y)=xy^2+y$;

6. $x=\cos 2t,\ y=\cos^2 t$; 7. $y=(\operatorname{arctg} x)^{4x}$;

8. $y=e^{-\frac{x}{y}}$; 9. $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ при $x=2$;

10. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{tg}5x$;

11. $y=\dfrac{(x-1)^3}{2x-x^2}$; 12. $e^{-x}+\ln x=0$.

Вариант 20

1. $y=\frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2. $s=20t^3+10t+21$;

3. а) $y=\cos x\cdot e^{\sin 2x}$, б) $y=\frac{\arcsin 2x}{1-6x}$;

4. $y=\frac{1}{(x+2)^2}$, $y'''=?$ 5. $x\sin y-\cos xy=0$;

6. $x=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t,\ y=\operatorname{tg}t-t\operatorname{ctg}t$;

7. $y=(\arccos 2x)^{x^2}$; 8. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

9. $y^2=\frac{x^3}{4-x}$ в точке $M\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

10. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

11. $y=\frac{6-x^2}{x^2-4}$; 12. $3^x=4x$.

Вариант 21

1. $y=\sqrt{3x-2}$; 2. $s=21t^3+11t+22$;

3. а) $y=e^{-(x+1)^2}\cdot\ln(x+1)$, б) $y=\frac{2\sin 2x}{\sqrt{\cos 3x}}$;

4. $y=\frac{\cos 3x}{x-1}$, $y''=?$ 5. $\cos xy=\frac{y}{x}$;

6. $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t}}$;

7. $y=x^{\operatorname{arctg}x}$; 8. $y=\operatorname{tg}\frac{x+1}{x-1}$;

9. $y=x^2+3x-2$ при $x=-2$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{6}}{\sqrt{3+2x}-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln\left(x+e^x\right)$;

11. $y=\frac{x+2}{2(x+1)^2}$; 12. $2\sin x-x=0$.

Вариант 22

1. $y=\sin 2x$; 2. $s=17+12t+22t^3$;

3. а) $y=\sin^2 2x\cdot\operatorname{ctg}3x$, б) $y=\operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$;

4. $y=\log_4 x^2$, $y'''=?$ 5. $\frac{xy}{y+1}=2^{xy}$;

6. $x=\dfrac{\cos^2 t}{\sqrt{\sin 2t}},\ y=\dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin 2t}}$; 7. $y=x^{x^2+3x}$;

8. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$; 9. $y^3+x^2-x+1=0$ при $x=0$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}(\pi x)]$;

11. $y=\dfrac{1+x+x^2}{x^2+1}$; 12. $x\lg x=1$.

Вариант 23

1. $y=\dfrac{x-1}{2x}$; 2. $s=23t^3+13t-5$;

3. а) $y=(x+3x^2-1)e^{3x+1}$, б) $y=\dfrac{2\cos^2 x}{\sin 3x}$;

4. $y=\operatorname{ctg}2x,\ y'''=?$ 5. $\operatorname{tg}(x-y)=x^3y+xy^3$;

6. $x=3\cos^3 t,\ y=3\sin^3 t$; 7. $y=\sqrt[x]{2x-x^2}$;

8. $y=\ln(x+e^y)$; 9. $y=x^4+2x-3$ в точке $M(0;-3)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-5x+1}{x^{30}-5x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^3-1}-\dfrac{7}{x^2-1}\right)$;

11. $y=\dfrac{4x^2+x+4}{x-1}$; 12. $\operatorname{ctg}x-x=0$.

Вариант 24

1. $y=\sqrt{5x}$; 2. $s=24t^3+14t+25$;

3. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{2+x^3}$, б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\ln 3x$;

4. $y=3^{x+\sqrt{x}},\ y''=?$ 5. $\sin(x^2-y)+\dfrac{y}{x}=0$;

6. $x=\dfrac{9-2t}{3t},\ y=\dfrac{4(3-t)^3}{9t^2}$; 7. $y=(2x+3)^{\sqrt{x+1}}$;

8. $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$; 9. $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

11. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$; 12. $2^x=4x$.

Вариант 25

1. $y=3x-2x^2$; 2. $s=15t-8+25t^3$;

3. а) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{2x+1}$, б) $y=\cos^2 x\cdot\sin\left(x^2\right)$;

4. $y=e^{x\sin x}$, $y''=?$ 5. $\operatorname{ctg}(\mathrm{x}+\mathrm{y})=x^2-y^2+2x+3$;

6. $x=\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$; 7. $y=x^{\cos x}$;

8. $xy=\ln\dfrac{y}{x}$; 9. $x^3+y^3=2x^2y^2$ в точке $M(1;1)$;

10. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

11. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$; 12. $2+x^2-x^3=0$.

Вариант 26

1. $y=\sqrt[3]{2x}$; 2. $s=26t^3+16t+8$;

3. а) $y=\dfrac{\sqrt[7]{3x^4+1}}{x^5}$, б) $y=(x+2)\arccos(\ln x)$;

4. $y=\sqrt[4]{3x^3+x}$, $y''=?$ 5. $e^x\cos x=e^{-y}\sin y$;

6. $x=\dfrac{6t}{1+t^2}$, $y=\dfrac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$; 7. $y=\left(\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}\right)^x$;

8. $y=\operatorname{tg}\left(x^2\right)+\dfrac{1}{\cos x}$; 9. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ при $x=1$;

10. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to1}(\ln x\cdot\ln(x-1))$;

11. $y=\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$; 12. $\lg x=4-x^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов [Текст]: учеб. пособие для втузов. Т.1 / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2004.

2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов [Текст] / Г.С. Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Астрель: Аст, 2003.

3. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г.Н. Берман.– М.: Наука, 1977.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]. Т.1. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1980.

Учебное издание

ЗАДАЧИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Методические указания

Составитель **Карпилова Ольга Михайловна**

Редактор Ю. Н. Л и т в и н о в а
Доверстка Ю. Н. Л и т в и н о в а

Подписано в печать 10.10.2008. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,75
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-108/2008

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34