Государственный комитет РСФСР по делам науки
и высшей школы

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П. Королева

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Куйбышев
1991

Составители: М.П.Ш а т у н о в, В.Ф.Е ф р е м о в,
Ю.Н.Х р а м о в а

УДК 519.21(075)

Задачи по теории вероятностей: Метод. указания
/Куйбышев. авиац. ин-т; Сост. М.П.Шатунов,
В.Ф.Ефремов, Ю.Н.Храмова. Куйбышев, 1991. 52 с.

Содержатся задачи для проведения практических занятий, выполнения домашних заданий и контрольных работ по теории вероятностей. Приводятся примеры решения типовых задач.

Указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов механических специальностей КуАИ.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С.П.Королева

Рецензент В.В.М ы ш к и н а

I. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

При решении многих вероятностных задач применяются различные схемы выбора из множеств и правила подсчета числа выборок.

I.I. Правило умножения

Имеется k множеств: $M_1, M_2, \ldots, M_k$ с числом элементов $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

В каждом множестве все элементы различны, а сами множества могут быть одинаковыми.

Выберем по одному элементу из каждого множества

$$a_1 \in M_1 \;, \; a_2 \in M_2 \;, \ldots, \; a_k \in M_k$$

и образуем последовательность $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$. Она называется упорядоченной выборкой. Число таких выборок равно произведению

$$n_1 n_2 \ldots n_k \;.$$

Точно так же определяется общее число способов, которыми можно выполнить k действий, если первое действие можно выполнить n_1 различными способами, второе действие – n_2 способами, ..., k-е действие – n_k способами.

Пример I. Сколько трехзначных целых чисел начинается и кончается четной цифрой?

▶ Каждое такое число есть упорядоченная выборка $(a_1 a_2 a_3)$ из трех множеств $a_1 \in M_1 = \{2, 4, 6, 8\}$; $a_2 \in M_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $a_3 \in M_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
Число таких выборок равно $n_1 n_2 n_3 = 4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$. ◀

Имеется одно множество M, состоящее из n различных элементов. Выберем из него последовательно по одному k элементов и образуем упорядоченную выборку $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. При этом считаем, что выбранный элемент записывается и возвращается обратно в множество M, затем выбирается следующий элемент. В полученной выборке каждый элемент может повториться. Очевидно такие же выборки получатся, если выбирать по одному элементу из k одинаковых множеств: $M_1 = M$, $M_2 = M, \ldots, M_k = M$. Число таких выборок определяется по правилу умножения:

$$n n \ldots n = n^k.$$

Это число размещений из n элементов по k с повторениями.

Пример 2. Чему равно число шестизначных телефонных номеров, если номер может быть любым набором шести десятичных цифр?

Каждый телефонный номер $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ есть размещение с повторениями из множества $M = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Число таких размещений равно $n^k = 10^6 = 1000000$.

I.3. Размещения без повторений

Если выбранные из множества M элементы обратно не возвращаются, то после k выборов получится упорядоченная выборка $(a_1 a_2 \ldots a_k)$, в которой ни один элемент не повторяется, число таких выборок равно

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Это число размещений из n элементов по k без повторения. При $k=n$ выражение принимает вид

$$A_n^n = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

Это число перестановок из n элементов без повторения.

Пример 3. Сколько шестизначных телефонных номеров с неповторяющимися цифрами?

Ответ: $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200.$

Пример 4. Сколько шестизначных целых чисел можно составить из цифр I, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторения цифр)?

Ответ: $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$.

I.4. Сочетания без повторений

Если из множества M одновременно берутся k элементов, то получается выборка $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, в которой порядок элементов несуществен (неупорядоченная выборка). Ее можно рассматривать как подмножество множества M. Число таких выборок равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Это число сочетаний из n элементов по k без повторений.

Точно так же определяется число n-значных последовательностей $(a_1 a_2 \dots a_n)$ из двух элементов, например 0 и I, один из которых повторяется k раз, а другой – $n-k$ раз (перестановки с повторениями). При $k > n/2$ вычисление C_n^k упрощается с помощью очевидного равенства

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример 5. Из колоды 36 карт одновременно берутся 3 карты. Порядок карт в выборке $\{k_1, k_2, k_3\}$ несуществен.

а) чему равно число всевозможных троек карт?

Ответ: $C_{36}^3 = \dfrac{36\cdot35\cdot34}{1\cdot2\cdot3} = 7140$.

б) сколько можно выбрать троек, содержащих одного туза?

Ответ: $C_4^1 C_{32}^2 = 4\cdot\dfrac{32\cdot31}{1\cdot2} = 1984$,

где C_4^1 – число выборок одного туза из 4, C_{32}^2 – число выборок 2 карт из 32 остальных; числс троек карт определяется по правилу умножения.

Пример 6. Координатная плоскость покрыта квадратной сеткой со стороной квадрата, равной I. Чему равно число кратчайших путей, идущих по сетке из точки (0,0) в точку (m, n)?

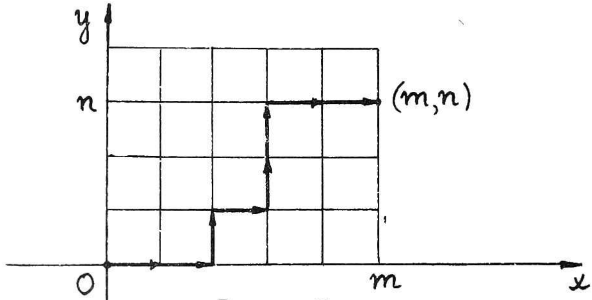


Рис. I.

Один из возможных путей показан на рис. I. Он представляет собой последовательность, состоящую из горизонтальных (Г) и вертикальных (В) отрезков сетки: (ГГВГВВГГ) – перестановка с повторениями. Число элементов последовательности равно $m+n$. Причем символ Г повторяется m раз, а символ В – n раз. Число таких перестановок равно

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n} \quad .$$

I.5. Сочетания с повторениями

Имеется k одинаковых экземпляров множества M, состоящего из n различных элементов. Из каждого экземпляра выбирается по одному элементу, и все элементы смешиваются. Получается неупорядоченная выборка $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, в которой элементы могут повторяться. Число таких выборок равно C_{n+k-1}^{k}. Это число сочетаний из n элементов по k с повторениями.

Пример 7. Кость домино $\boxed{a_1 \mid a_2}$ есть сочетание из 7 цифр $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ по 2 с повторениями (порядок цифр a_1, a_2 несуществен, и они могут повторяться).

Число таких выборок равно $C_{n+k-1}^{k} = C_8^2 = 28$.

Пример 8. Рассмотрим частные производные k-го порядка от функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2} \dots \partial x_{n_k}} ,$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ – номера переменных, по которым происходит дифференцирование. Номера могут повторяться, их порядок несуществен.

Т.е. выборка $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ есть сочетание с повторениями из n элементов по k. Число таких выборок равно C^k_{n+k-1}. Тому же равно число частных производных от функции от n переменных.

Например, число частных производных второго порядка от функции трех переменных равно

$$C^k_{n+k-1} = C^2_{3+2-1} = 6.$$

I.I. Сколько двузначных целых чисел, у которых обе цифры четные?

Ответ: 20.

I.2. Сколько 3-значных целых чисел можно составить из цифр I, 2, 3, 4, 5?

Ответ: I25.

I.3. Сколько 3-значных целых чисел можно составить из цифр I, 2, 3, 4, 5 без повторения цифр?

Ответ: 60.

I.4. Сколько 5-значных целых чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Ответ: 900.

I.5. Сколькими способами можно распределить k разных предметов среди n лиц?

Ответ: n^k.

I.6. На заводе 30000 рабочих и служащих. Показать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы имени, отчества, фамилии.

Ответ: $28^3 = 21952 < 30000$.

I.7. В алгоритмическом языке FORTRAN идентификатором может быть любая последовательность, состоящая не более чем из шести латинских букв и десятичных цифр, причем первым символом должна быть буква. Чему равно число всевозможных идентификаторов?

Ответ: I6I7038306.

I.8. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове "математика"?

Ответ: $\dfrac{10!}{2!3!2!} = 151200$.

I.9. В карточке спортлото 45 номеров. Вычеркиваются 6 номеров. Чему равно число всевозможных комбинаций вычеркиваний?

Ответ: $C_{45}^{6} = 8145060$.

I.10. 10 участников шахматного турнира сыграли по одной партии. Сколько всего партий сыграно?

Ответ: 45.

I.11. В шахматном турнире сыграно 210 партий. Определить число участников турнира, если сыграли по одной партии?

Ответ: 21.

I.12. Сколько 4-значных целых чисел, у которых каждая следующая цифра: а) больше предыдущей; б) меньше предыдущей?

Ответ: а) $C_{9}^{4} = 126$; б) $C_{10}^{4} = 210$.

I.13. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого шестиугольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Ответ: $C_{6}^{4} = 15$.

I.14. В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Покупательница выбила чек на 4 пирожных. Чему равно число всевозможных наборов по 4 пирожных?

Ответ: $C_{6}^{4} = 15$.

I.15. Сколькими способами можно разместить 40 одинаковых книг между 3 библиотеками?

Ответ: $C_{42}^{40} = C_{42}^{2} = 861$.

I.16. Из трех колод, в каждой из которых 36 карт, берутся 3 карты по одной и смешиваются. Чему равно число всевозможных троек карт?

Ответ: $C_{38}^{3} = 8436$.

I.17. Сколько частных производных 5-го порядка можно составить от функции четырех переменных?

Ответ: $C_{8}^{5} = C_{8}^{3} = 56$.

I.18. Сколькими способами можно распределить 3 путевки между 5 сотрудниками, если: а) все путевки различны; б) все путевки одинаковы?

Ответ: а) 60; б) 10.

I.19. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник?

Ответ: 35.

I.20. Замок сейфа состоит из 5 дисков. Для открывания сейфа нужно на каждом диске набрать одну из десятичных цифр. На набор одной комбинации цифр на всех 5 дисках уходит 5 с. Сколько времени потребуется для перебора всех комбинаций?

Ответ: 138 ч 53 мин 20 с.

1.21. Сколькими способами можно рассадить 5 лиц так, чтобы два определенных лица не оказались рядом?

Ответ: 72.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теория вероятностей изучает модели опытов, результатом которых являются случайные события – исходы опыта. Предполагается, что любой исход опыта сводится к так называемым *элементарным исходам*. Множество всех элементарных исходов опыта обозначается $\Omega=\{\omega\}$. В результате опыта всегда должен произойти один и только один элементарный исход $\omega\in\Omega$. Любому событию A, являющемуся результатом данного опыта, соответствует некоторое подмножество множества Ω в следующем смысле: событие A наступает тогда и только тогда, когда произойдет какой-либо элементарный исход, принадлежащий соответствующему подмножеству. Событие и соответствующее ему подмножество обозначаются одним символом. Событие, соответствующее всему множеству Ω, называется *достоверным*. Его вероятность принимается равной единице: $P(\Omega)=1$.

Событие, соответствующее пустому множеству $\varnothing$, называется *невозможным*. Его вероятность принимается равной нулю:

$$P(\varnothing)=0.$$

В классической вероятностной схеме рассматриваются модели опытов, имеющих конечное число n равновозможных (равновероятных) элементарных исходов:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}\;;\;P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Вероятность события A, являющегося результатом данного опыта, определяется по формуле

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{m}{n}\quad,$$

где $N(\Omega)=n$ - число всех элементарных исходов опыта; $N(A)$ - число элементарных исходов, при которых наступает событие A (т.е. число элементов соответствующего подмножества $A\subset\Omega$), они называются благоприятствующими для события A.

Пример. I. (Урновая схема). В ящике (урне) I0 шаров, 6 белых и 4 красных. Одновременно берутся 3 шара. Определить вероятности событий: а) все 3 шара окажутся белыми; б) будет 2 белых и I красный шар.

▶ Для различения шаров можно считать, что они помечены номерами I, 2, 3, ..., I0.

Элементарным исходом опыта является появление выборки трех шаров из I0: $\omega=\{ш_1,ш_2,ш_3\}$ - сочетание без повторения. Они образуют множество всех элементарных исходов опыта $\Omega=\{\omega\}$. Их число

$$n=N(\Omega)=C_{10}^{3}=120.$$

Появление каждой выборки $\omega\in\Omega$ равновозможно и исключает появление любой другой. Событию A соответствуют выборки $\omega=\{Б_1,Б_2,Б_3\}$, состоящие из трех белых шаров. Их число $N(A)=C_6^3=20$. Событию B соответствуют выборки $\omega=\{Б_1,Б_2,К_3\}$, состоящие из двух белых и одного красного шара. Число таких выборок $N(B)=C_6^2C_4^1=60$. Применяя классическую формулу вероятности, найдем:

$$P(A)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6};\quad P(B)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$ ◀

Урновая схема может служить типичной моделью многих вероятностных задач.

Пример 2. Какова вероятность того, что среди n лиц по крайней мере двое имеют один и тот же день рождения в году (событие R)?

▶ Пусть $d_1,d_2,\ldots,d_n$ - дни рождения n лиц. Они образуют выборку $\omega=\{d_1d_2\ldots d_n\}$ из множества 365 дней года - размещение с повторениями. Число таких выборок $N(\Omega)=365^n$. Найдем сначала вероятность противоположного события $\bar{R}$, что все n лиц имеют разные дни рождения. Событию $\bar{R}$ соответствуют выборки $\omega=(d_1d_2\ldots d_n)$ с неповторяющимися элементами - размещение без повторения. Число таких выборок

$$N(\bar{R})=A_{365}^{n}=365\cdot364\cdot\ldots\cdot(365-n+1).$$

Искомая вероятность $P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - A_{365}^{n}/365^{n}$.

Например, при n = 50 получится $P(R)$ = 0,97 - близко к I. Г...ти без риска можно утверждать, что из 50 лиц хотя бы двое имеют один и тот же день рождения в году. ◀

2.I. Из 9 изделий, одинаковых по внешнему виду, 3 неисправны (брак). Наугад берутся 3 изделия. Определить вероятности событий: а) все 3 взятые изделия исправны; б) все 3 - неисправны; в) окажется 2 исправных и I неисправное.

Ответ: $P(а) = \frac{5}{21}$; $P(б) = \frac{1}{84}$; $P(в) = \frac{15}{28}$

2.2. В ящике I5 шаров: 8 белых, 4 черных, 3 красных. Одновременно берутся 3 шара. Определить вероятность событий: а) все 3 шара окажутся белыми; б) шары будут разного цвета.

Ответ: $P(а) = \frac{8}{65}$; $P(б) = \frac{96}{455}$

2.3. В ящике N_1 белых и N_2 черных шаров. Одновременно берутся M шаров. Какова вероятность того, что в выборке окажется M_1 белых и M_2 черных шаров $(M = M_1 + M_2)$?

Ответ: $P = \dfrac{C_{N_1}^{M_1} \cdot C_{N_2}^{M_2}}{C_{N_1+N_2}^{M}}$.

2.4. В карточке спортлото зачеркивается 6 номеров из 45. Карточка выигрывает, если хотя бы 3 зачеркнутых номера выпадут в тираже. Найти вероятность этого события.

Тот же вопрос для спортлото "5 из 36".

Ответ: p_1 = 0,024; p_2 = 0,0I3.

2.5. В лотерее $N+M$ билетов, из них N выигрышных. Найти вероятность того, что из K приобретенных билетов окажется L выигрышных.

Ответ: $P = \dfrac{C_N^L \cdot C_M^{K-L}}{C_{N+M}^{K}}$.

2.6. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго, с равной вероятностью. Найти вероятности событий: а) все выйдут на 4 этаже; б) все выйдут на одном этаже; в) все выйдут на разных этажах.

Ответ: $P(а) = \frac{1}{216}$; $P(б) = \frac{1}{36}$; $P(в) = \frac{5}{9}$.

2.7. Чему равна вероятность того, что 3 определенных лица родились в разные дни недели?

Ответ: $p = \frac{30}{49}$.

2.8. Какова вероятность того, что взятый наугад 6-значный телефонный номер не содержит одинаковых цифр? Номер может быть любым от 000000 до 999999.

Ответ: $p = 0{,}1512$.

2.9. Из 30 вопросов составлены 15 экзаменационных билетов по 2 вопроса в билете. Вопросы не повторяются. Студент знает 15 вопросов. Найти вероятности событий: а) студент знает оба вопроса взятого билета; б) студент знает один вопрос билета.

Ответ: $P(а) = \frac{7}{29}$; $P(б) = \frac{15}{29}$.

2.10. Общество из N лиц рассаживается за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

Ответ: $p = \frac{2}{N-1}$.

2.11. 10 книг наугад расставлены на одной полке. Найти вероятность того, что 3 определенных книги окажутся рядом.

Ответ: $p = \frac{1}{15}$.

2.12. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей (кубики с номерными гранями 1, 2, 3, 4, 5, 6) сумма выпавших очков на верхней грани будет равна: а) 10; б) 8; в) от 6 до 8.

Ответ: $P(а) = \frac{1}{12}$; $P(б) = \frac{5}{36}$; $P(в) = \frac{4}{9}$.

любое из значений 0, $\pm 0,1$; $\pm 0,2$; $\pm 0,3$; $\pm 0,4$; $\pm 0,5$ с равной вероятностью. Какова вероятность того, что погрешность их суммы по модулю: а) будет максимальной; б) превысит 0,5?

Ответ: $P(а) = \dfrac{2}{121}$; $P(б) = \dfrac{30}{121}$.

2.14. В кармане имеется 4 монеты по 5 к. и 3 монеты по 50 к. Определить вероятность того, что при извлечении двух монет хотя бы одна окажется достоинством в 5 к.

Ответ: $p = \dfrac{6}{7}$.

2.15. Из множества $\{1,2,\ldots,n\}$ выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор производится: а) без возвращения; б) с возвращением?

Ответ: $P(а) = \dfrac{1}{2}$; $P(б) = \dfrac{n-1}{2n}$.

2.16. Из множества $\{1,2,\ldots,n\}$ выбираются три числа. Какова вероятность того, что второе число заключено между первым и третьим, если выбор производится: а) без возвращения; б) с возвращением?

Ответ: $P(а) = \dfrac{1}{3}$; $P(б) = \dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{3n^2}$.

2.17. Из урны, содержащей шары с номерами $1,2,\ldots,n$, k раз вынимается шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность.

Ответ: $p = \dfrac{C_n^k}{n^k}$.

2.18. Зенитная батарея k орудий производит залп по группе, состоящей из n самолетов $(n > k)$. Каждое орудие выбирает себе цель независимо от других. Какова вероятность того, что все орудия выстрелят: а) по одному самолету; б) по разным самолетам?

Ответ: $P(а) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$; $P(б) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.

2.19. В кондитерской 7 видов пирожных. Покупательница выбила чек на 4 пирожных. Продавщица выбирает пирожные наугад. Найти вероятность того, что покупательница получит: а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по 2 пирожных разных видов.

Ответ: $P(а)=\frac{7}{C_{10}^4}=\frac{1}{30}$; $P(б)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$; $P(в)=\frac{C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{10}$.

2.20. В финальной части чемпионата по футболу участвуют 8 команд, среди которых две команды считаются фаворитами. Путем жеребьевки команды разбиваются на две подгруппы по 4 команды. Какова вероятность того, что команды-фавориты окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе?

Ответ: $P(а)=\frac{4}{7}$; $P(б)=\frac{3}{7}$.

2.21. На шахматную доску наугад ставят две ладьи – белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?

Ответ: $p=\frac{7}{9}$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Элементарные исходы опыта можно изобразить геометрически в виде точек. Пусть множеству всех элементарных исходов $\Omega=\{\omega\}$ соответствует некоторая плоская область, например прямоугольник (рис. 2), а множеству элементарных исходов, при которых наступает событие A, соответствует другая область, являющаяся частью Ω. Вероятность события A определяется в виде отношения площадей:

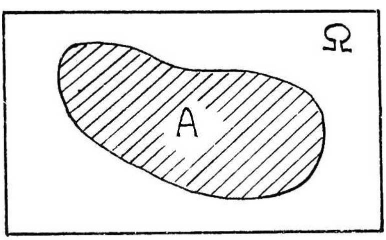


Рис. 2.

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(\Omega)$ – площадь области Ω, $S(A)$ – площадь A.

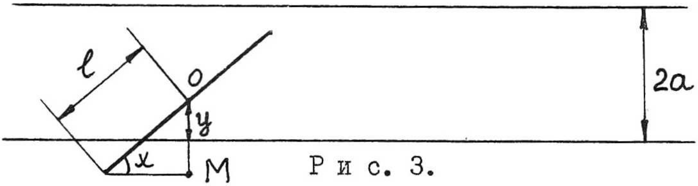
Предполагается, что вероятность не зависит от формы и местоположения области A, а зависит только от ее площади.

Если точечные множества Ω и A являются одномерными (трехмерными), то геометрическая вероятность определяется в виде отношения длин (объемов).

Пример I. Задача Бюффона.

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость падает игла длиною 2ℓ $(\ell<a)$. Определить вероятность того, что игла пересечет какую-либо прямую (событие A).

Пусть y – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, x – угол, который образует игла с этой прямой (рис. 3).



Р и с. 3.

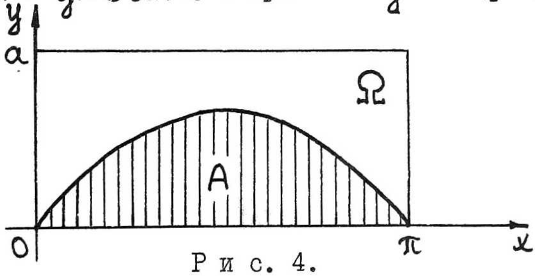
Всевозможные положения иглы определяются неравенствами

$$0\le x\le\pi;\quad 0\le y\le a\quad(\Omega)$$

Игла пересечет прямую тогда и только тогда, когда $y\le OM$, т.е.

$$0\le x\le\pi;\quad 0\le y\le \ell\sin x\quad(A).$$

На плоскости Oxy неравенствам (Ω) соответствует прямоугольник со сторонами π, a; неравенствам (A) – область, ограниченная синусоидой $y=\ell\sin x$ и прямой $y=0$ (рис. 4):



Р и с. 4.

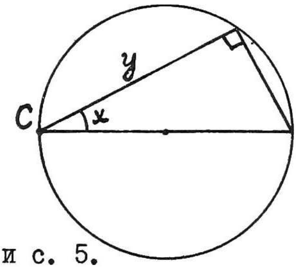
$$S(\Omega) = \pi a; \quad S(A) = \int_0^\pi l \sin x \, dx = 2l .$$

Геометрическая формула вероятности дает

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a} .$$ ◀

Пример 2. Определить вероятность того, что длина хорды, проведенной из данной точки C единичной окружности по любому направлению, больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность (событие A).

▶ Пусть x – угол между фиксированным диаметром, проходящим через точку C , и хордой (рис. 5). Всевозможные направления хорды определяются неравенством $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (Ω) .



Р и с. 5.

Длина хорды $y = 2\cos x$ будет больше $\sqrt{3}$ для углов $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ (A);

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3} .$$ ◀

2. Пусть некоторый опыт повторяется N раз в одинаковых условиях; и при этом K раз наступило событие A . Величина $\frac{K}{N}$ называется о т н о с и т е л ь н о й ч а с т о т о й появления события A . При достаточно большом N относительная частота обладает устойчивостью, она лишь незначительно колеблется около некоторого постоянного числа и может служить приближенной оценкой вероятности события A в единичном опыте (опытная вероятность):

$$P(A) = \frac{K}{N} , \quad N \to \infty .$$

Пример 3. С целью экспериментального определения числа π с помощью формулы Бюффона игла длиною $2l$ = 36 мм была брошена 5000 раз на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$ = 45 мм. При этом 2532 раза игла пересекла прямые. Чему равно приближенное значение π ?

▶ Относительная частота пересечения иглы с прямыми $\frac{K}{N} = \frac{2532}{5000} = 0{,}5064$ является приближенной оценкой вероятности $P(A) = \frac{2\ell}{\pi a} = \frac{36 \cdot 2}{45\pi} = \frac{8}{5\pi}$, т.е. $\frac{8}{5\pi} = 0{,}5064$. Отсюда

$$\pi \approx \frac{8}{5 \cdot 0{,}5064} = 3{,}16.$$ ◀

3.I. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой, сторона квадрата a, бросается монета диаметром $d<a$. Найти вероятность того, что монета попадет внутрь одного из квадратов.

Ответ: $p = \frac{(a-d)^2}{a^2}$.

3.2. Оценить размер квадратной сетки (задача 3.I), если при многократном бросании монеты диаметром d в 36% случаев монета не пересекла ни одной стороны квадрата.

Ответ: $a \approx 2{,}5\,d$.

3.3. Стержень длиной ℓ разломан на 3 части. Какова вероятность того, что из трех полученных отрезков можно построить треугольник?

Ответ: $p = \frac{1}{4}$.

3.4. На окружности радиусом R наугад поставлены три точки A, B, C. Чему равна вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный?

Ответ: $p = \frac{3}{4}$.

3.5. В единичном круге проведена хорда параллельно заданному направлению. Определить вероятность того, что длина хорды будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность.

Ответ: $p = \frac{1}{2}$.

3.6. Два лица условились встретиться в определенном месте между I2 и I3 часами. Пришедший первым ждал другого 20 мин, после чего ушел. Определить вероятность встречи этих лиц, если моменты прихода каждого из них в течение указанного часа равновозможны и независимы.

Ответ: $p = \frac{5}{9}$.

3.7. Два теплохода должны подойти к одному причалу. Время прихода каждого из них равновозможно в течение суток и независимо от прихода другого. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода I ч, а второго – 2 ч.

Ответ: $p = \frac{139}{1152}$.

3.8. Автобусы маршрутов A и B прибывают на остановку в случайные моменты времени на каждом I0-минутном интервале. Стоянка автобуса A – I мин, автобуса B – I,5 мин. Какова вероятность встречи автобусов на этой остановке?

Ответ: $p = 0.234$.

3.9. В любые моменты времени T -секундного интервала в приемник равновозможно поступление двух сигналов от двух радиостанций. Если разность между моментами поступления сигналов меньше τ с, то приемник не срабатывает. Найти вероятность этого события.

Ответ: $p = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$.

3.I0. Из черного ящика с неизвестным числом шаров взято I00 шаров, на них поставлены метки, после чего шары возвращены обратно и смешаны с остальными. При повторном извлечении I00 шаров оказалось 40 меченых. Оценить общее число шаров в ящике.

Ответ: $n \approx 250$.

3.II. На одной странице текста I600 букв. Из них буква "О" встретилась I52 раза. Какова вероятность того, что взятая наугад буква текста окажется буквой "О"?

Ответ: $p = 0.095$.

3.I2. При проверке I000 пассажиров автобуса 25 оказались без билетов. Какова вероятность того, что взятый наугад пассажир автобуса окажется безбилетным?

Ответ: $p = 0.025$.

3.13. Из семян пшеницы, приготовленной для посева, произведена выборка 5000 зерен для проверки на всхожесть. Взошло 4700 зерен. Чему равна вероятность того, что взятое наугад зерно из общего семенного фонда окажется всхожим?

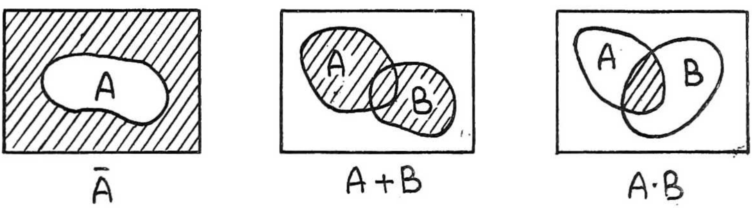
Ответ: $p = 0.94$.

4. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

I. Событие $\bar{A}$ называется противоположным данному событию A, если оно наступает тогда, когда не наступает данное событие A.

Суммой событий A и B называется новое событие $A+B$, которое наступает тогда, когда наступает либо событие A, либо событие B (одно или оба). Произведением событий A и B называется новое событие $A \cdot B$, которое наступает тогда, когда наступают оба события A и B одновременно.

Эти операции эквивалентны операциям над множествами, соответствующими данным событиям (рис. 6).



Р и с. 6.

Прямоугольная область соответствует множеству всех элементарных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$. Противоположное событие эквивалентно операции дополнения, сумма и произведение событий - операциям объединения и пересечения множеств. Сумма и произведение событий обладают законами числовой алгебры: переместительным, сочетательным, распределительным. При решении вероятностных задач часто оказываются полезными равенства $A+B = A+\bar{A} \cdot B$; $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

Пример I. Два стрелка производят по одному выстрелу по цели. Пусть события A_1, A_2 означают попадание в цель первого и второ-

5-1618

го стрелка. Тогда перечисленные ниже действия означают следующее:

$A_1 + A_2$ – одно или два попадания (хотя бы одно);

$A_1 \cdot A_2$ – два попадания;

$A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$ – одно попадание;

$\overline{A_1 + A_2} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ – ни одного попадания (два промаха).

2. События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно в одном опыте. Их произведение $A \cdot B = \varnothing$ – невозможное событие. Вероятность суммы несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) .$$

Аналогичное равенство справедливо для любого числа попарно несовместных событий (рис. 7):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) .$$

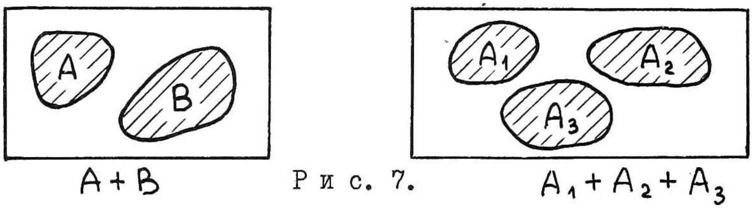


Рис. 7.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны и являются полной группой исходов данного опыта, т.е.

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$$

есть достоверное событие, то сумма их вероятностей равна I:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 .$$

В частности, $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ – вероятность противоположного события.

<u>Пример 2</u>. В кармане имеется 2 монеты по 5 к., 4 монеты по 3 к. и 4 монеты по I к. Какова вероятность того, что при извлечении двух монет их суммарная стоимость равна 6 к?

▶ Искомая вероятность равна $P(A+B)$, где событие A означает, что извлечены монеты достоинством в 5 и I к., событие B – извлечены две монеты по 3 к. Их вероятности определяются по классической формуле

$$P(A)=\frac{C_2^1 C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{45}\ ;\ P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}\ .$$

Так как события A и B несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{14}{45}\ .$$ ◀

3. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются в з а и м н о н е з а в и с и м ы м и, если вероятность каждого из них не меняется от того, наступили или нет остальные события. Вероятность произведения взаимно независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n)\ .$$

<u>Пример 3</u>. Три стрелка одновременно выстрелили по мишени. Вероятности попадания их в мишень $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}4$ не зависят друг от друга. Определить вероятность того, что в мишени будет: а) 3 пробоины; б) ни одной пробоины; в) по крайней мере одна пробоина; г) ровно одна пробоина.

▶ Пусть события A_1, A_2, A_3 означают попадания в мишень 1, 2, 3-го стрелков. Они взаимно независимы:

а) $P(A)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}224$;

б) $P(B)=P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}036$;

в) $P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-0{,}036=0{,}964$;

г) $P(D)=P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3+\bar{A}_1 A_2 \cdot \bar{A}_3+\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3)=$

$$=0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}252\ .$$ ◀

4. Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A наступило, называется у с л о в н о й в е р о я т н о с т ь ю события B и обозначается $P(B/A)$.

Информация о наступлении события A сокращает множество всех элементарных исходов опыта $\Omega=\{\omega\}$. Вместо Ω будет множество А (рис. 8). Сокращается и множество элементарных исходов, при которых наступает событие B : вместо B будет множество $C = AB$.

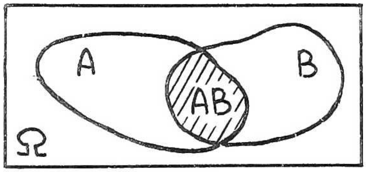


Рис. 8.

На основании геометрического определения вероятности имеем

$$P(B/A) = \frac{S(AB)}{S(A)} .$$

Поделив числитель и знаменатель на $S(\Omega)$, получим

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} .$$

Отсюда $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$ – вероятность произведения зависимых событий. Обобщение на любое число событий следующее:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \ldots P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_n) .$$

В случае, когда события взаимно независимы, условные вероятности превращаются в безусловные.

<u>Пример 4</u>. В ящике 3 белых и 3 черных шара. Последовательно извлекаются по 2 шара без возвращения. Какова вероятность того, что шары каждой пары будут разного цвета?

Пусть A_i (i = I, 2, 3) означает, что шары i -й пары разного цвета. События A_1, A_2, A_3 зависимы. Искомая вероятность

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) =$$
$$= \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} \cdot \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} \cdot 1 = \frac{9}{15} \cdot \frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{2}{5} .$$

Если шары каждой пары возвращаются обратно, то в этом случае события A_1, A_2, A_3 будут взаимно независимы:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15} = \frac{27}{125} .$$

тираже из 1000 вкладов выигрывают 25. Какова вероятность того, что владелец одного вклада выиграет хотя бы раз: а) за n лет; б) за 10 лет?

Ответ: а) $P_n = 1-\left(1-\frac{1}{40}\right)^{2n} \approx 1-e^{-n/20}$; $n \gg 1$; б) $P_{10} \approx 0,39$.

4.2. Используя результаты задачи 2.4., найти вероятность выигрыша в спортлото "6 из 45" при наличии: а) n билетов, $n \gg 1$; б) 100 билетов.

Ответ: а) $P_n = 1-(1-p)^n \approx 1-e^{-np}$, $p=0,024$; б) $P_{100} \approx 0,91$.

4.3. В лотерее n билетов, из них m выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея k билетов $(k<n<m)$?

Ответ: $p = 1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

4.4. Зенитное орудие ведет огонь по самолету до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Какова вероятность того, что будет сделано: а) 3 выстрела; б) не более трех выстрелов?

Ответ: P (а) = 0,147; P (б) = 0,657.

4.5. Производится бросание монеты до выпадания герба. Определить вероятность того, что будет сделано: а) не более четырех бросаний; б) четное число бросаний.

Ответ: P (а) $= \dfrac{15}{16}$; P (б) $= \dfrac{1}{3}$.

4.6. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет герб. Найти вероятность выигрыша у каждого игрока.

Ответ: $p_1 = \dfrac{2}{3}$; $p_2 = \dfrac{1}{3}$.

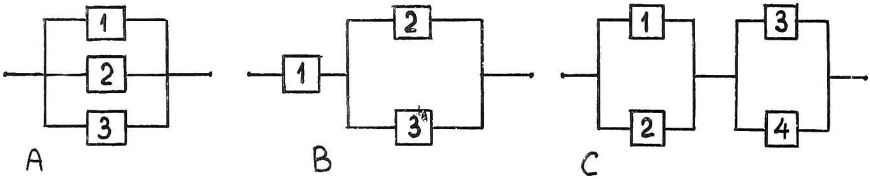
4.7. В продукции цеха брак составляет 5% от общего количества выпускаемых изделий. Для контроля отобрано 20 изделий. Какова вероятность того, что среди них хотя бы одно бракованное?

Ответ: p = 0,63.

4.8. Определить вероятность того, что студенту потребуется не более трех попыток для сдачи экзамена, если вероятность успеха при каждой попытке равна 0,7.

Ответ: $p = 0{,}973$.

4.9. Определить вероятность безотказной работы (надежность) за время T устройств, изображенных на рис. 9, если вероятность безотказной работы за время T составляющих элементов равна 0,8.



Р и с. 9.

Ответ: $P(A) = 0{,}992$; $P(B) = 0{,}768$; $P(C) = 0{,}9216$.

4.10. Вероятность безотказной работы (надежность) элемента за время T равна 0,6. При каком числе параллельно соединенных дублирующих элементов надежность системы будет больше 0,999?

Ответ: $n \geqslant 8$.

4.11. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы вероятность выпадания шестерки хотя бы один раз была не менее 0,99?

Ответ: $n \geqslant 26$.

4.12. Вероятность поражения цели хотя бы одной пулей при трех независимых выстрелах равна 0,973. Чему равна вероятность попадания при одном выстреле?

Ответ: $p = 0{,}7$.

4.13. В партии 100 деталей, из них 2 неисправны. Партия не принимается, если в случайной выборке четырех деталей окажется хотя бы одна неисправная. Найти вероятность этого события.

Ответ: $p = 0{,}078$.

4.14. Из разрезной азбуки составлено слово "карета". Буквы смешиваются и затем извлекаются по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв образуется слово "ракета"?

Ответ: $p = \dfrac{1}{360}$.

4.15. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наугад. Найти вероятность того, что ему придется сделать не более трех попыток. Тот же вопрос при условии, что абонент не запоминает набранную цифру и может набрать ее снова.

Ответ: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}271$.

4.16. Общество, состоящее из 8 мужчин и 4 женщин, рассаживается за 4 стола по 3 человека за стол. Определить вероятность того, что за каждым столом будет 1 женщина.

Ответ: $p = \frac{9}{55}$.

4.17. Из колоды 36 карт последовательно берут 3 карты без возвращения. Какова вероятность того, что: а) все карты тузы; б) две карты тузы?

Ответ: $P(а) = \frac{1}{1785}$; $P(б) = \frac{16}{595}$ – без возвращения;
$P(а) = \frac{1}{729}$; $P(б) = \frac{8}{243}$ – с возвращением.

4.18. Из ящика с 10 шарами, 6 белых и 4 черных, последовательно по одному извлекаются 2 шара без возвращения. Определить вероятность того, что в выборке будет следующее: а) оба шара белые; б) один шар белый; в) по крайней мере один шар белый.

Тот же вопрос для выборки с возвращением.

Ответ: $P(а) = \frac{1}{3}$; $P(б) = \frac{8}{15}$; $P(в) = \frac{13}{15}$ – без возвращения;
$P(а) = 0{,}36$; $P(б) = 0{,}48$; $P(в) = 0{,}84$ – с возвращением.

4.19. В ящике 4 белых, 2 черных и 2 красных шара. Определить вероятность того, что при последовательном извлечении по одному шару без возвращения белый шар появится раньше красного.

Ответ: $p = \frac{2}{3}$.

4.20. В сумке имеется: 5 купюр по 1 р., 3 – по 3 р., 2 – по 5 р. Какова вероятность того, что при последовательном извлечении по одной купюре рубль появится раньше пятирублевой купюры?

Ответ: $p = \frac{5}{7}$.

4.21. Четверо гостей пришли в одинаковых шляпах. Какова вероятность того, что при уходе, надевая шляпы наугад, каждый из них наденет чужую шляпу?

Ответ: $p = \frac{3}{8}$.

5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ОЦЕНКА ГИПОТЕЗ

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотезы) попарно несовместны $(H_i H_j = \varnothing, i \neq j)$ и являются полной группой исходов данного опыта

$$(H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega).$$

Для любого события A , являющегося результатом данного опыта, справедливы равенства

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i); \quad P(H_j/A) = \frac{P(H_j) P(A/H_j)}{P(A)};$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Первое равенство называется формулой полной вероятности, второе - формулой Байеса.

Предполагаются известными вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$. По формуле Байеса определяются вероятности гипотез после того, как стало известно о наступлении события A (оценка гипотез).

Пример 1. Из полного набора костей домино последовательно по одной берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой (событие A).

▶ Относительно первой кости имеется две гипотезы: $H_1 = D$ - первая кость дубль и $H_2 = \bar{D}$ - первая кость не дубль. Они несовместны и являются полной группой исходов опыта:

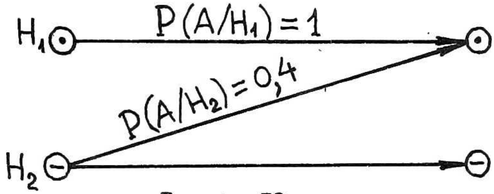
$$P(A) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2);$$

$$P(H_1) = \frac{7}{28}, \quad P(H_2) = \frac{21}{28}; \quad P(A/H_1) = \frac{6}{27}, \quad P(A/H_2) = \frac{12}{27};$$

$$P(A) = \frac{7}{28} \cdot \frac{6}{7} + \frac{21}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{7}{18}. \quad ◀$$

Пример 2. По линии связи передаются телеграфные сигналы $H_1=(\cdot)$, $H_2=(-)$ ("точки" и "тире") с одинаковой вероятностью $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$. "Точки" при передаче не искажаются, а 40% "тире" превращаются в "точки". На приемный конец поступила "точка" (событие A). Какова вероятность того, что передавался именно этот сигнал?

Условия задачи изобразим в виде схемы (рис. I0).



Р и с. I0

Искомая вероятность $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}$;

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 1+0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}7;$$

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}5\cdot 1}{0{,}7}=\frac{5}{7}.$$

5.I. В первом ящике 5 белых и 5 черных шаров, во втором – 9 белых и I черный. Из обоих ящиков извлекается по одному шару, а затем из них наугад берется один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

Ответ: $p = 0{,}7$.

5.2. Колода из 36 карт сдается по одной карте. Какова вероятность того, что вторая по порядку карта – туз?

Ответ: $p = \frac{I}{9}$.

5.3. В ящике I5 мячей, из которых 9 новых. Для первой игры берутся 3 мяча, которые после игры возвращаются обратно. Определить вероятность того, что 3 мяча, взятые для второй игры, окажутся новыми.

Ответ: $p = 0{,}089$.

5.4. Из I0 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в цель из проверенной винтовки 0.9, из непроверенной – 0.3. Из наугад взятой винтовки произведено два выстрела по мишени. Найти вероятность того, что в мишени будет 2 пробоины.

Ответ: $p = 0.522$.

5.5. В правом кармане имеется 4 монеты по 20к., и I монета достоинством в 5 к., в левом – 6 монет по 20 к., и 3 монеты по 5 к. Из правого в левый переложено 3 монеты, затем из левого кармана берется одна монета. Определить вероятность того, что она окажется достоинством в 20 к.

Ответ: $p = 0.7$.

5.6. Определить вероятность того, что I0 ламп, взятых наугад из I00, окажутся исправными, если число неисправных ламп на I00 равновозможно от 0 до 2.

Ответ: $p = 0,903$.

5.7. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Студент знает только 25 вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса взятого билета или на один вопрос из взятого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета?

Ответ: $p = \dfrac{190}{203}$.

5.8. На зачет выносится n задач. Студент заранее решил k задач. Вероятность того, что он решит следующую задачу равна k/n. Определить вероятность того, что студент решит задачу, предложенную на зачете. При каком k эта вероятность будет не менее 0,99?

Ответ: $p = \dfrac{k(2n-k)}{n^2}$; $k \geqslant 0,9n$.

5.9. Имеется I0 одинаковых ящиков с шарами. В 9 ящиках по 2 белых и по 2 черных шара, в I0-м ящике – 5 белых и I черный. Из наугад взятого ящика извлечен белый шар. Чему равна вероятность того, что шар извлечен из I0-го ящика?

Ответ: $p = \dfrac{5}{32}$.

5.10. Вероятности попадания в мишень трех стрелков равны $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. При одновременном выстреле всех стрелков в мишени оказалось 2 пробоины. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок?

Ответ: $p = \frac{6}{13}$.

5.11. В коробке 10 изделий, число бракованных равновозможно от 0 до 2. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оставшиеся в коробке изделия исправны.

Ответ: $p = \frac{1}{3}$.

5.12. В ящике лежит один шар неизвестного цвета, белый или черный. В ящик опускается белый шар. После смешивания из двух шаров берется один. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в ящике остался белый шар?

Ответ: $p = \frac{2}{3}$.

5.13. В цехе два типа станков одинаковой производительности, выпускающих однотипные изделия. Брак составляет 15% – для станков I типа и 5% – для станков II типа. Взятое наугад изделие оказалось неисправным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на станке I типа.

Ответ: $p = \frac{3}{4}$.

5.14. Прибор состоит из двух элементов, соединенных последовательно. Вероятность безотказной работы (надежность) элементов за время T равна $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,9$. В результате испытаний в течение времени T прибор вышел из строя. Какова вероятность того, что отказал первый элемент, а второй исправен?

Ответ: $p = \frac{27}{37}$.

5.15. Прибор, установленный на борту самолета, имеет надежность 0,9 в условиях нормального крейсерского полета и 0,8 – в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерская часть полета составляет 80% всего времени полета. Определить надежность прибора за время полета.

Ответ: $p = 0,88$.

5.16. По каналу связи передается цифровой текст, состоящий из цифр 0 и 1, которые могут появляться в тексте с равной вероятностью. Каждая передаваемая цифра принимается правильно с вероятностью p и за другую цифру с вероятностью $1-p$. Найти вероятность того, что было передано "10", если принято "01".

Ответ: $(1-p)^2$

5.17. При каком распределении четырех шаров (2 белых и 2 черных) по двум ящикам вероятность появления белого шара при извлечении одного шара из ящика наугад окажется наибольшей?

Ответ: $\max p = \frac{2}{3}$, если в один ящик положить 1 белый шар, а 3 остальных – в другой.

6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Случайные величины принято обозначать большими буквами латинского алфавита $X, Y, \ldots$, а их возможные (допустимые) значения – соответствующими малыми буквами $x, y, \ldots$

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений есть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, конечная или бесконечная.

Распределение вероятностей дискретной случайной величины X, имеющей конечное множество возможных значений, задается в виде таблицы-матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{bmatrix} .$$

В первой строке перечисляются все значения, которые может принять случайная величина, без пропусков и повторений.

Во второй строке – вероятности этих значений

$$p_i = P(X = x_i) \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

Сумма всех вероятностей всегда должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Это равенство является условием полноты множества возможных значений случайной величины.

Наиболее общей характеристикой любой случайной величины X является функция распределения

$$F(x) = P(X < x) -$$

вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\infty, x)$, где x - любое число.

Общие свойства $F(x)$:

1. $F(x)$ - неотрицательная неубывающая функция.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Для дискретной случайной величины функция распределения

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i ,$$

суммирование по всем допустимым значениям $x_i < x$. При переходе через каждое допустимое значение x_i $F(x)$ меняется скачком на величину p_i.

Пример I. В ящике 4 белых и 2 черных шара. Одновременно берутся 3 шара. Построить таблицу распределения вероятностей числа белых шаров в выборке (величина X) и график функции распределения $F(x)$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Вероятности p_i определяются по классической схеме (рис. II)

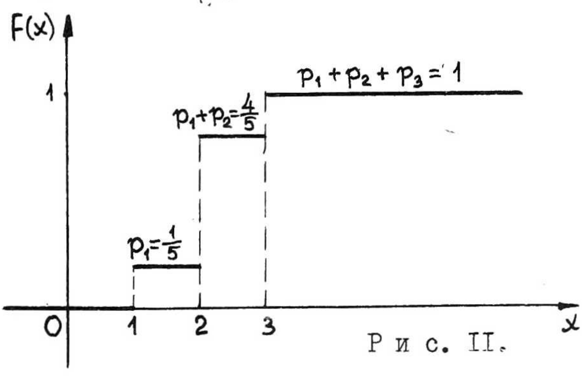


Рис. II.

$$p_1 = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

$$p_2 = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5},$$

$$p_3 = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

2. Основными числовыми характеристиками любой случайной величины X являются м а т е м а т и ч е с к о е о ж и д а н и е $m_x = M[X]$ и д и с п е р с и я $D[X] = M[(X-m_x)^2]$. Для дискретной случайной величины

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{bmatrix}$$

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ ,$$

$$D[X] = M[(X-m_x)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \ .$$

Неотрицательное число $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$ называется с р е д н е к в а д р а т и ч н ы м о т к л о н е н и е м случайной величины.

Физическая аналогия: если вероятности рассматривать как массы, сосредоточенные в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $m_x = M[X]$ является центром, а $\sigma_x^2 = D[X]$ – моментом инерции масс относительно центра.

Дисперсия является характеристикой рассеяния случайной величины относительно центра. Чем меньше дисперсия, тем меньше рассеяние, тем "менее случайной" является величина X.

Основные свойства математического ожидания и дисперсии:

1°. Если c – неслучайная (постоянная) величина, то

$$M[c] = c \ , \ M[cX] = c\,M[X] \ ;$$
$$D[c] = 0 \ , \ D[cX] = c^2 \cdot D[X] \ .$$

2°. $$M[X+Y] = M[X] + M[Y] \ ;$$
$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] \ .$$

Первое из этих равенств справедливо для любых случайных величин X, Y, а второе – только для независимых X, Y. Две или более случайные величины $X, Y, \ldots$ называются н е з а в и с и м ы м и, если распределение вероятностей каждой из них не зависит от того, какие значения приняли остальные величины. Свойство 2° справедливо для любого числа слагаемых.

3^0. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство Чебышева

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости (величина X).

Распределение вероятностей величины X

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix};$$

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2};$$

$$\sigma_x^2 = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

Пример 3. Определить математическое ожидание и дисперсию суммы очков, выпавших при 100 бросаниях игральной кости.

Суммарное число очков $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$, где X_k – число очков, выпавших при k -м бросании. X_k – независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения и числовые характеристики:

$$M[X_k] = 3{,}5;\ D[X_k] = \frac{35}{12};\ k = 1, 2, \ldots, 100 \quad \text{(пример 2).}$$

Согласно свойству 2^0 числовые характеристики суммарного числа очков равны суммам 100 одинаковых слагаемых:

$$M[X] = 3{,}5 \cdot 100 = 350;\ D[X] = \frac{35}{12} \cdot 100 = \frac{875}{3}.$$

6.1. В партии 10 деталей, из которых 2 неисправны. Для контроля берутся 3 любых детали. Построить распределения вероятностей числа неисправных деталей в выборке (величина X).

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, построить график функции распределения $F(x)$.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix};\ m_x=\frac{3}{5};\ \sigma_x^2=\frac{28}{75}.$$

6.2. Из ящика с 10 шарами, 7 белых и 3 черных, одновременно берутся 4 шара. Построить распределение вероятностей числа белых шаров в выборке. Вычислить математическое ожидание и дисперсию, построить график функции распределения $F(x)$.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/30 & 9/30 & 15/30 & 5/30 \end{bmatrix};\ m_x=\frac{14}{5};\ \sigma_x^2=\frac{42}{75}.$$

6.3. Зенитное орудие, имеющее 4 снаряда, стреляет по самолету до первого попадания, пока не кончатся снаряды. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 2/3. Построить распределение вероятностей числа израсходованных снарядов. Вычислить математическое ожидание.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2/3 & 2/9 & 2/27 & 1/27 \end{bmatrix};\ m_x=\frac{40}{27}.$$

6.4. Задача 6.3 при условии неограниченного числа снарядов.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ 2/3 & 2/9 & 2/27 & 2/81 & & 2/3^n & \ldots \end{bmatrix};\ m_x=1{,}5.$$

6.5. Дверь открывают только 2 из 6 одинаковых по виду ключей. Построить распределение вероятностей числа попыток, требуемых для открывания двери. Определить математическое ожидание.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10/30 & 8/30 & 6/30 & 4/30 & 2/30 \end{bmatrix};\ m_x=\frac{7}{3}$$

6.6. В кармане пассажира имеется 4 монеты по 5 к. и 2 монеты по 50 к. Пассажир извлекает по одной монете до появления 5-копеечной монеты без возвращения. Построить распределение вероятностей числа попыток, найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:
$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2/3 & 4/15 & 1/15 \end{bmatrix};\ m_x=\frac{7}{5};\ \sigma_x^2=\frac{28}{75}.$$

6.7. На пути движения автомобиля 4 светофора, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностями 2/3 и I/3. Построить распределение вероятностей пройденных автомобилем светофоров до первой остановки. Найти математическое ожидание.

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{27}{81} & \frac{18}{81} & \frac{12}{81} & \frac{8}{81} & \frac{16}{81} \end{bmatrix}; \quad m_x = \frac{130}{81}.$$

6.8. Построить распределение вероятностей суммы очков, выпавших при бросании двух игральных костей. Определить математическое ожидание и дисперсию непосредственно и с помощью свойства 2^0.

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}; m_x = 7; \sigma_x = \frac{35}{6}.$$

6.9. Из 5 ламп 2 неисправны (не горят). Выбирается исправная лампа путем включения в сеть. Построить распределение вероятностей числа попыток.

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

6.I0. Для взвешивания на чашечных весах имеется набор гирек: I, 2, 3, 5 г. Вес взвешиваемых предметов может быть равен любому целому числу граммов от I до I0 с равной вероятностью. Построить распределение вероятностей минимального числа гирек, требуемых для взвешивания. Найти математическое ожидание.

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}; \quad m_x = 1{,}8.$$

6.II. Построить распределение вероятностей числа ничьих в трех шахматных партиях, если в каждой партии равновозможен любой из трех исходов: победа, поражение, ничья.

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}.$$

6.I2. Играются 2 партии в шахматы. В каждой партии равновозможен любой из трех исходов. Построить распределение вероятностей очков, полученных каждым игроком, если за победу начисляется I очко, за ничью - I/2 очка, за поражение - 0.

Ответ:
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОЕ И ПУАССОНА

I. Наиболее распространенной среди дискретных случайных величин является **частота** появления случайного события A в n независимых опытах:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{bmatrix}.$$

Если опыты повторяются при неизменных условиях, то вероятности P_k определяются по формуле Бернулли

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}\ ;\ k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где p - вероятность появления события A в единичном опыте,

$$q = 1 - p\ ,\ C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

(P_k есть вероятность того, что событие A наступит ровно k раз в n опытах).

Распределение с вероятностями P_k называется **биномиальным**.

Относительная частота $\frac{K}{n}$ распределена также по биномиальному закону.

Величины K и $\frac{K}{n}$ имеют следующие числовые характеристики:

$$M[K] = np\ ,\ D[K] = npq\ ;$$
$$M\left[\frac{K}{n}\right] = p\ ,\ D\left[\frac{K}{n}\right] = \frac{pq}{n}.$$

При $n \to \infty$ $D\left[\frac{K}{n}\right] \to 0$. Отсюда следует закон больших чисел Бернулли: при достаточно большом числе опытов относительная частота $\frac{K}{n}$ является величиной "почти неслучайной", она лишь незначительно колеблется около своего центра:

$$\frac{K}{n} \approx p \quad , n \to \infty \ .$$

Это вытекает из неравенства Чебышева: для любого $\varepsilon > 0$ вероятность $P\left(\left|\frac{K}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1$ при $n \to \infty$, т.е. неравенство $\left|\frac{K}{n} - p\right| < \varepsilon$ практически достоверно при достаточно большом n.

Пример I. Батарея производит залп из 6 орудий по цели. Вероятность попадания в цель для каждого орудия p = I/3. Построить распределение вероятностей числа попаданий в цель (величина K). Определить вероятность того, что число попаданий будет от I до 3.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{bmatrix},$$

где P_k (k = 0, I, 2, ..., 6) - вероятность того, что будет k попаданий. P_k определяются по формуле Бернулли при n = 6, p - I/3, q = 2/3:

$$P_k = C_6^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \quad :$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{,}088 & 0{,}263 & 0{,}330 & 0{,}220 & 0{,}082 & 0{,}016 & 0{,}001 \end{bmatrix}.$$

Наиболее вероятное число попаданий k = 2. Вероятность того, что будет от I до 3 попаданий:

$$P(1 \le K \le 3) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}263 + 0{,}330 + 0{,}220 = 0{,}813 .$$

2. При большом n и малом p (случай редкого события A) биномиальное распределение заменяется близким ему и более удобным для вычислений распределением Пуассона:

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n .$$

Величина K, распределенная по закону Пуассона, имеет следующие числовые характеристики:

$$M[K]=\lambda\ , \quad D[K]=\lambda\ .$$

Параметр λ означает среднее число появлений события A в n опытах.

Пример 2. АТС производит в среднем 3000 операций в час, из которых в среднем 0,2% оказываются дефектными. Определить вероятность того, что в течение часа будет не более 4 дефектных операций.

▶ Пусть k – число дефектных операций за час. Вероятность того, что единичная операция окажется дефектной, равна p = 0,002 – опытная вероятность. Она мала, а число опытов n = 3000 достаточно велико. Биномиальное распределение можно заменить распределением Пуассона при $\lambda = np = 3000\cdot 0{,}002 = 6$:

$$P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{6^k}{k!}e^{-6}\ ;\ k=0,1,2,\dots$$

Искомая вероятность

$$P(0\le K\le 4) = \sum_{k=0}^{4}P_k =$$

$$=e^{-6}\left(1+\frac{6}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}\right)=115\,e^{-6}=0{,}285\ . \ ◀$$

7.1. Построить распределение вероятностей числа выпадений герба при 7 бросаниях монеты. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее трех раз.

Ответ:
$$K=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{128} & \frac{7}{128} & \frac{21}{128} & \frac{35}{128} & \frac{35}{128} & \frac{21}{128} & \frac{7}{128} & \frac{1}{128}\end{bmatrix};$$

$$P(3\le K\le 7)=\frac{99}{128}\ .$$

7.2. Построить распределение вероятностей числа выпадений "шестерки" при трех бросаниях игральной кости. Найти вероятность того, что "шестерка" выпадет хотя бы один раз.

Ответ:

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{125}{216} & \frac{75}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216}\end{bmatrix};\ P(1\le K\le 3)=\frac{91}{216}\ .$$

7.3. Из ящика с 5 шарами, 3 белых и 2 черных, последовательно по одному извлекаются 4 шара с возвращением. Построить распределение вероятностей числа появлений белого шара. Какова вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз?

Ответ: $$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{16}{625} & \frac{96}{625} & \frac{216}{625} & \frac{216}{625} & \frac{81}{625} \end{bmatrix}; \quad P(2 \leq K \leq 4) = \frac{513}{625}.$$

7.4. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 3/4. За каждое попадание начисляется 5 очков. Построить распределение вероятностей суммарного числа очков.

Ответ: $$X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 \\ \frac{1}{64} & \frac{9}{64} & \frac{27}{64} & \frac{27}{64} \end{bmatrix}.$$

7.5. Что вероятнее: а) выпадение не менее одной шестерки при 6 бросаниях игральной кости или б) выпадение не менее двух шестерок при I2 бросаниях?

Ответ: $P(а) = 0{,}665 > P(б) = 0{,}6I9$.

7.6. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

Ответ: $n \geq 59$.

7.7. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,2. Устройство не срабатывает в случае отказа трех и более элементов. Найти вероятность этого события.

Ответ: $p = 0{,}203$.

7.8. В институте 730 студентов. Какова вероятность того, что I января является днем рождения: а) трех студентов; б) не более трех студентов?

Ответ: $P(а) = 0{,}I80$; $P(б) = 0{,}857$.

7.9. Прядильщица обслуживает 800 веретен. В течение часа происходит обрыв пряжи в среднем на 4 веретенах. Какова вероятность того, что в течение часа пряжа оборвется не более чем на 5 веретенах?

Ответ: $p = 0{,}785$.

7.10. Считая, что в среднем 2% пассажиров не оплачивают проезд, найти вероятность того, что среди 100 пассажиров, едущих в данном трамвае, не более четырех безбилетников?

Ответ:: $p = 0{,}947$.

7.11. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,001. Определить вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытания.

Ответ: $p = 0{,}960$.

7.12. По линии связи передаются 1000 телеграфных сигналов в час. Из-за помех 0,1% сигналов искажаются. Какова вероятность того, что в течение часа будет не более четырех искажений?

Ответ: $p = 0{,}996$.

7.13. Среди семян пшеницы в среднем 0,5% невсхожих. Определить вероятность того, что при случайном отборе 1000 семян окажется не менее трех невсхожих?

Ответ: $p = 0{,}875$.

7.14. В большой партии деталей 5% бракованных. Детали укладываются в коробки по 100 штук. Определить вероятности событий: а) в коробке не окажется бракованных деталей; б) в коробке будет не более 5 бракованных деталей.

Ответ: $P(а) = 0{,}00674$; $P(б) = 0{,}616$.

7.15. В корректуре объемом 500 страниц обнаружено 500 опечаток. Какова вероятность того, что на одной странице не меньше трех опечаток?

Ответ: $p = 0{,}08$.

7.16. Среднее число звонков на коммутатор в течение часа равно 180. Какова вероятность того, что в течение одной минуты будет 4 звонка?

Ответ: $p = 0{,}168$.

8. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Если случайная величина X может принять любое значение из некоторого промежутка, то она называется **непрерывно распределенной** (непрерывной) на этом промежутке.

Основной вероятностной характеристикой непрерывных случайных величин (НСВ) является вероятностная плотность

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} -$$

аналог плотности непрерывно распределенной массы.

Любая вероятностная плотность $f(x) \geq 0$

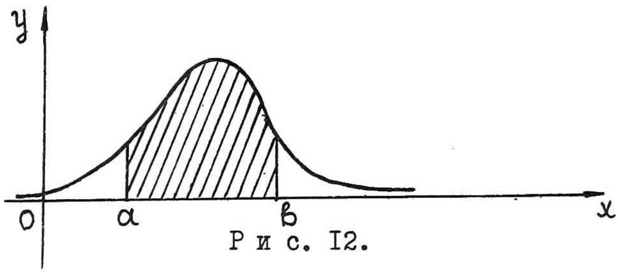
$$\text{и} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

График $y = f(x)$ расположен над осью абсцисс, и площадь под графиком равна единице.

Вероятность попадания НСВ в заданный интервал

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx -$$

площадь под графиком на участке $[a, b]$ (рис. I2).



Р и с. I2.

Функция распределения НСВ

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

является первообразной вероятностной плотности

$$F'(x) = f(x),$$

и $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1.$

Числовые характеристики НСВ

$$m_x=M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx; \ \sigma_x^2=D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx.$$

Если $Y=g(X)$ - функция от X, то

$$M[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Пример I. Равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ (рис. I3). Вероятностная плотность

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b], \\ 0, & x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b], \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

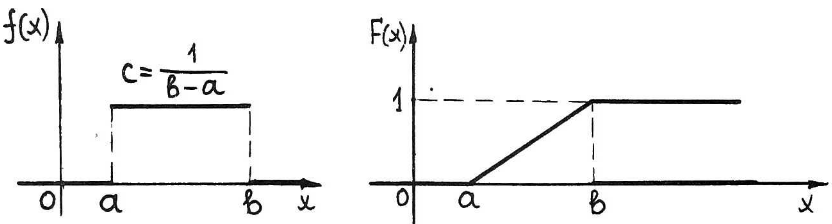


Рис. I3.

Математическое ожидание $m_x=\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия $\sigma_x^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

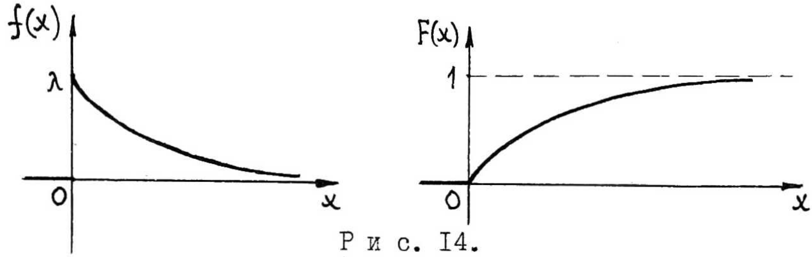
Например, если числа округляются до 0,I, то ошибка округления равномерно распределена на отрезке $[-0{,}05; 0{,}05]$.

Пример 2. Показательное распределение (рис. I4). Вероятностная плотность

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$



Р и с. I4.

Математическое ожидание $m_x=\frac{1}{\lambda}$; дисперсия $\sigma_x^2=\frac{1}{\lambda^2}$.

Показательное распределение применяется при исследовании потока событий (вызовов), следующих друг за другом в случайные моменты времени. При некоторых условиях длительность интервала между двумя соседними событиями (вызовами) есть случайная величина X , распределенная по показательному закону.

Параметр λ означает среднее число событий (вызовов) за единицу времени.

8.1. Поезда метро идут с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени. Определить вероятностную плотность и функцию распределения времени ожидания поезда (величина X). Найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2];\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$$

$$m_x=1;\ \sigma_x^2=\frac{1}{3}.$$

8.2. Вероятность того, что прибор, проработавший безотказно в течение времени t, откажет в течение следующего промежутка времени Δt, равна $\lambda \Delta t$, где $\lambda = const$. Найти функцию распределения, вероятностную плотность времени безотказной работы прибора (величина T) и среднее время безотказной работы.

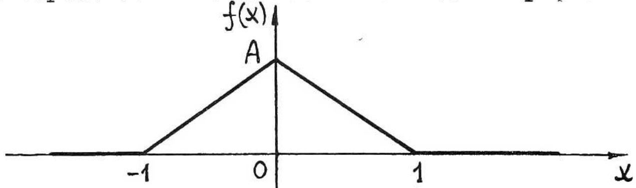
Ответ:
$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t<0; \end{cases} \quad f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t<0; \end{cases} \quad m_t = \frac{1}{\lambda}.$$

8.3. НСВ X имеет вероятностную плотность $f(x) = A e^{-|x|}$. Определить коэффициент A, математическое ожидание, дисперсию и вероятности $P(0<X<2)$, $P(-1<X<1)$, $P(|X|>2)$.

Ответ: $A = \frac{1}{2}$; $m_x = 0$; $\sigma_x^2 = 2$; $P(0<X<2) = 0{,}432$.

$$P(-1<X<1) = 0{,}632; \; P(|X|>2) = 0{,}135; \; F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} e^{x}; & x<0, \\ 1-\frac{1}{2} e^{-x}; & x \geq 0. \end{cases}$$

8.4. Вероятностная плотность НСВ задана графиком (рис. I5).



Р и с. I5.

Найти параметр A, написать аналитическое выражение $f(x)$, найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:
$$A = 1; \quad f(x)=\begin{cases} 1-|x|; & x \in [-1,1], \\ 0; & x \notin [-1,1]; \end{cases} \quad m_x = 0; \; \sigma_x^2 = \frac{1}{6}.$$

8.5. НСВ X имеет вероятностную плотность

$$f(x)=\begin{cases} A(1-x^2); & x \in [-1,1], \\ 0; & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Определить коэффициент A, математическое ожидание, дисперсию и вероятности $P(0<X<1)$, $P(|X|<\frac{1}{2})$.

Ответ: $A=\frac{3}{4}$; $m_x=0$; $\sigma_x^2=\frac{1}{5}$; $P(0<X<1)=\frac{1}{2}$; $P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}$.

8.6. То же для $f(x)=\begin{cases}\frac{A}{1+x^2}, & x\in[-1,1],\\ 0, & x\notin[-1,1].\end{cases}$

Ответ:

$A=\frac{2}{\pi}$; $m_x=0$; $\sigma_x^2=\frac{4-\pi}{\pi}$; $P(0<X<1)=\frac{1}{2}$; $P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=0{,}59$.

8.7. Функция распределения НСВ X имеет вид (закон арксинуса)

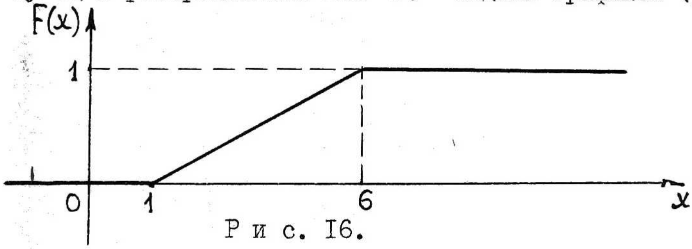
$$F(x)=\begin{cases}0; & x<-a,\\ A+B\arcsin\frac{x}{a}; & x\in[-a,a],\\ 1; & x>a.\end{cases}$$

Определить параметры A, B, вероятностную плотность, вероятность попадания X в интервал $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Ответ: $A=\frac{1}{2}$; $B=\frac{1}{\pi}$; $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}; & x\in(-a,a),\\ 0; & x\notin(-a,a).\end{cases}$

$P\left(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{3}$;

8.8. Функция распределения НСВ X задана графиком (рис. I6)



Р и с. I6.

Написать аналитическое выражение $F(x)$. Найти вероятностную плотность и вероятность попадания X в интервал (0; 5).

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0; & x<1,\\ \frac{x-1}{5}; & x\in[1,6],\\ 1; & x>6;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}; & x\in[1,6],\\ 0, & x\notin[1,6];\end{cases}$

$P(0<X<5)=\frac{4}{5}$.

8.9. Определить математическое ожидание длины хорды, соединяющей данную точку окружности радиуса R с произвольной точкой этой окружности.

Ответ: $m_x = \frac{4}{\pi} R$.

8.10. Определить математическое ожидание длины хорды, проведенной в круге радиусом R параллельно заданному направлению.

Ответ: $m_x = \frac{\pi}{2} R$.

9. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону, если ее вероятностная плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}; \quad \sigma > 0.$$

График нормального распределения - кривая Гаусса (рис. 17).

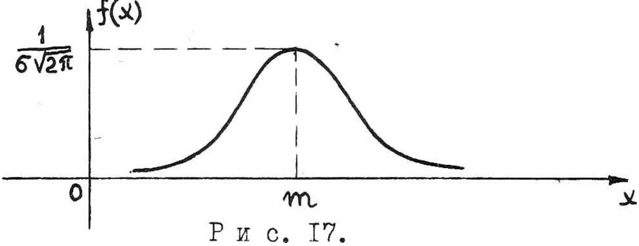


Рис. 17.

Параметры $m = M[X]$ и $\sigma - \sqrt{D[X]}$ являются математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением величины X.

Вероятность попадания нормально распределенной величины в заданный интервал

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - функция Лапласа, $\Phi(x)$ есть нечетная функция и $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$

Вероятность попадания в интервал $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$, симметричный относительно математического ожидания:

$$P(|X-m|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

<u>Пример I</u>. Высотомер самолета допускает случайные ошибки, распределенные по нормальному закону с параметрами m = 0, σ = 30 м. Для самолета отведен коридор высотой 100 м. Определить вероятность того, что самолет будет лететь: а) внутри коридора; б) ниже коридора.

▶ Пусть X – ошибка высотомера. Оптимальная высота полета по высотомеру соответствует середине отведенного коридора:

$$P(A)=P(-50<X<50)=2\Phi\left(\frac{50}{30}\right)=0{,}905;$$

$$P(B)=P(50<X<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{50}{30}\right)=0{,}0475. \blacktriangleleft$$

2. Нормальное распределение чаще других встречается на практике. Это объясняется тем, что многие случайные величины имеют суммарную природу:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Согласно теореме Ляпунова любая случайная величина, имеющая суммарную природу, при достаточно большом n распределена по закону, сколь угодно близкому к нормальному, при условии, что слагаемые X_i есть независимые случайные величины, примерно одинаково влияющие на всю сумму; в частности, имеющие одно и то же распределение, безразлично какое.

Вероятность попадания суммарной величины X в заданный интервал при большом n определяется как для нормального распределения с параметрами

$$m=M[X]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i];\quad \sigma^2=D[X]=\sum_{i=1}^{n}D[X_i].$$

<u>Пример 2</u>. Игральная кость бросается 100 раз. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков будет заключена в пределах: а) от 200 до 300; б) от 300 до 400.

▶ Суммарное число очков $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$, где X_i – число очков, выпавших при i-м бросании. Величины X_i независимы и имеют одинаковое распределение

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, \ldots, 100.$$

$$M[X_i] = 3{,}5; \; D[X_i] = \frac{35}{12}; \; m = \sum_{i=1}^{100} M[X_i] = 350;$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{100} D[X_i] = \frac{3500}{12}; \; \sigma \approx 17 \text{ (примеры 2,3 §6).}$$

Так как число слагаемых велико, то суммарная величина распределена почти нормально:

$$P(A) = P(200 \le X \le 300) = \Phi\left(\frac{300-350}{17}\right) - \Phi\left(\frac{200-350}{17}\right) = 0{,}0014;$$

$$P(B) = P(300 \le X \le 400) = 2\Phi\left(\frac{50}{17}\right) = 0{,}9963. \blacktriangleleft$$

3. Важным примером случайной величины, имеющей суммарную природу, является среднее арифметическое

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Если слагаемые X_i есть независимые случайные величины, имеющие одинаковые числовые характеристики

$$M[X_i] = m, \; D[X_i] = \sigma^2 > 0, \text{ то } M[\bar{X}_n] = m, \; D[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует закон больших чисел Чебышева: при достаточно большом n среднее арифметическое является величиной "почти неслучайной"; оно лишь незначительно колеблется около своего математического ожидания.

Кроме того, по теореме Ляпунова при большом n среднее арифметическое распределено почти нормально, и справедливо соотношение $P(|\bar{X}_n - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha \to 1$ при $n \to \infty$, связывающее параметры ε, n, α.

Пример 3. Производится n независимых измерений некоторой величины m приборами, допускающими случайные ошибки с дисперсией $\sigma^2 = 1$. При каком n можно утверждать с вероятностью $\alpha = 0{,}99$, что погрешность среднего арифметического результатов измерений будет в 10 раз меньше $\sigma = 1$?

$\blacktriangleright$ При $\alpha = 0{,}99$ из уравнения $2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$

находим $\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}576 \Rightarrow \sqrt{n} = 2{,}576\dfrac{\sigma}{\varepsilon} = 2{,}576\cdot\dfrac{1}{0{,}1} = 25{,}76;$

$$n_{min} = 664.$$ ◀

4. Другим важным примером случайной величины, имеющей суммарную природу, является величина K – число появлений события A в n независимых опытах. Ее числовые характеристики:

$$M[K] = np\ ,\ D[K] = npq.$$

Согласно теореме Лапласа-Муавра при достаточно большом npq $(npq \geq 10)$ величина K имеет приближенно нормальное распределение с параметрами

$$m = np\ ,\ \sigma = \sqrt{npq}\ .$$

Вероятность попадания величины K в заданный интервал можно определить как для нормального распределения

$$P(a < K < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)\ .$$

Для относительной частоты $\dfrac{K}{n}$ отсюда вытекает соотношение

$P\left(\left|\dfrac{K}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \alpha \to 1$ при $n \to \infty$, связывающее параметры n, ε, α.

<u>Пример 4</u>. Производится n бросаний монеты. При каком n можно утверждать с вероятностью $\alpha = 0{,}99$, что относительная частота выпадения герба отклонится от $p = \dfrac{1}{2}$ меньше чем на $\varepsilon = 0{,}01$?

▶ При $\alpha = 0{,}99$ из соотношения $2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \alpha$

находим $\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = 2{,}576 \Rightarrow \sqrt{n} = 2{,}576\dfrac{\sqrt{pq}}{\varepsilon} = 2{,}576\cdot 50 = 128{,}8;$

$$n_{min} = 16590.$$ ◀

ну с параметрами $m = -1$, $\sigma = 2$. Написать вероятностную плотность $f(x)$, построить график $y = f(x)$, вычислить вероятности: а) $P(0<X<3)$; б) $P(|X+1|<4)$; в) $P(|X+1|>5)$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x+1)^2}$;

P(а) = 0,2858; P(б) = 0,9545; P(в) = 0,0124.

9.2. Дальномер допускает систематическую ошибку 50 м в сторону занижения и случайные ошибки, распределенные по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 100 м. Найти вероятности событий: а) абсолютная величина ошибки не превысит 150 м; б) измеренная дальность не превзойдет истинной.

Ответ: P (а) = 0,8185; P (б) = 0,6915.

9.3. Проверкой установлено, что 90% ошибок прибора не выходит за пределы ± 20 м. Систематических ошибок прибор не допускает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Определить среднеквадратичное отклонение ошибок измерения данным прибором.

Ответ: σ = 12,2 м.

9.4. Заряд пороха взвешивается на весах, допускающих случайные ошибки, распределенные по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 0,1 г. Номинальный вес заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес заряда 2,5 г.

Ответ: p = 0,0228.

9.5. Производится два независимых измерения прибором, допускающим систематическую ошибку +10 м и случайные ошибки, распределенные нормально со среднеквадратичным отклонением 20 м. Какова вероятность того, что ошибки двух измерений будут иметь разные знаки и превзойдут 10 м по абсолютной величине?

Ответ: p = 0,1586.

9.6. При большом числе измерений установлено, что 75% ошибок прибора не превышает 1,25 м. Считая, что ошибки распределены нормально с нулевым математическим ожиданием, найти среднеквадратичную ошибку прибора.

Ответ: σ = 1,087 м.

9.7. Ведется артобстрел цели, расположенной на расстоянии 1000 м от орудия. Дальность полета снаряда есть нормально распределенная величина со среднеквадратичным отклонением 50 м. Сколько процентов снарядов: а) не долетит до цели; б) даст перелет от 40 до 60 м?

Ответ: а) 50%; б) 9,7%.

9.8. Автомат изготовляет шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика 5 мм. Фактический диаметр является нормально распределенной величиной со среднеквадратичным отклонением 0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на 0,1 мм. Какой % шариков будет забракован?

Ответ: 4,6%.

9.9. При сложении 10000 чисел каждое слагаемое предварительно округляется до 10^{-2}. Найти вероятность того, что суммарная ошибка по модулю не превзойдет 1/50 максимально возможной ошибки.

Ответ: $p = 0,9994$.

9.10. Число очков, выбиваемых стрелком при выстреле, распределено по закону

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 10 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Определить вероятность того, что при 100 выстрелах будет выбито: а) не менее 700 очков; б) не менее 800 очков.

Ответ: $P(а) = 0,9973$; $P(б) = 0,5$.

9.11. Производится артобстрел цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2: а) какова вероятность того, что при 10000 выстрелах число попаданий окажется в пределах от 1900 до 2100? б) при каком числе выстрелов можно утверждать с вероятностью 0,9999, что относительная частота попаданий будет от 0,19 до 0,21? в) найти интервал $(0,2-\varepsilon\,;\,0,2+\varepsilon)$, в котором будет заключена относительная частота с вероятностью 0,9999 при 10000 выстрелах.

Ответ: а) $p = 0,9876$; б) $n \geqslant 24336$; в) $\varepsilon = 0,016$.

9.12. Определить вероятность того, что при 1000 бросаний монеты число выпадений герба будет заключено в пределах: а) от 400 до 500; б) от 450 до 550.

Ответ: $P(а) = 0,5$; $P(б) = 0,9984$.

9.13. Производится 60 опытов в одинаковых условиях. Вероятность появления события A в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что событие A произойдет в большинстве опытов? При каком числе опытов эта вероятность будет не менее 0,999?

Ответ: $p = 0,943$; $n \geqslant 231$.

9.14. Из 10 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в мишень из проверенной винтовки 0,9, из непроверенной – 0,3. Из наугад взятой винтовки сделано 200 выстрелов. После каждого выстрела винтовка возвращается в общую группу и для следующего выстрела выбирается заново. Найти вероятность того, что в мишени будет от 120 до 150 пробоин.

Ответ: $p = 0,9597$.

Библиографический список

1. Сборник задач по математике для втузов: Специал. курсы. Т. 3. /Под ред. А.В.Ефимова. М.: Наука, 1984. 606 с.

2. Методические указания для решения задач по специальным разделам высшей математики /Под ред. М.П.Шатунова; Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1972. 96 с.

3. Федорченко Г.П., Родионова И.П. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1977. 79 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1975. 333 с.

5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

I. Элементы комбинаторики I
2. Классическое определение вероятности ... 7
3. Геометрическое и опытное определение вероятности I2
4. Действия над вероятностями I7
5. Формула полной вероятности. Оценка гипотез 24
6. Дискретные случайные величины 28
7. Распределение биномиальное и Пуассона .. 34
8. Непрерывные случайные величины 39
9. Нормальный закон распределения вероятностей . Предельные теоремы 44
Библиографический список 50

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Составители: Шатунов Михаил Петрович,
Ефремов Виктор Федорович,
Храмова Юлия Николаевна

Редактор Н.Д.Чайникова
Техн.редактор Н.М.Каленюк
Корректор Е.Г.Филиппова

Подписано в печать 25.01.91. Формат 60x84 1/16
Бумага оберточная белая. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 3,0. Усл.кр.-отт. 3,1. Уч.-изд.л. 2,8.
Тираж 500 экз. Заказ № 1618. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086. г. Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Типография им. В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического
объединения. 443099. г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.