УДК 629.78

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В MAPLE НА ОСНОВЕ ФОРМАЛИЗМА ЛАГРАНЖА

Ерёменко А. А., Дорошин А. В.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), г. Самара

Как известно, Лагранжева механика является формализмом, следующим из классической механики, в котором траектория объекта получается при помощи отыскания пути, который минимизирует действие – интеграл от функции Лагранжа по времени. ИспользованиеЛагранжева формализма значительно упрощает решение задач механики, особенно в аспекте построения математической модели.

Для описания динамики системы с использованием формализма Лагранжа необходимо составить лагранжиан системы.

$$L = T - \Pi \,, \tag{1}$$

где L – лагранжиан системы, T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия системы.

На основе выражения для лагранжиана составляются уравнения Лагранжа в следующей форме.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \,, \tag{2}$$

где q – обобщенные переменные, $\dot{q}$ – скорости изменения обобщенных переменных (их производные по времени).

Формализм Лагранжа естественным образом применим для исследования динамики космического аппарата. Для нахождения неизвестных параметров движения необходимо составить выражение для нахождения кинетической энергии системы, далее по аналогии с уравнением (2) составить уравнения Лагранжа второго рода, за исключением того, что лагранжиан системы будет равен её кинетической энергии.

$$L = T \,. \tag{3}$$

В качестве примера использования формализма Лагранжа рассмотрим математический маятник (рис. 1), подвешенный на пружине. Груз имеет массу **M**, на которую действует сила тяжести, пружина имеет жёсткость **c**, длину **l**, угол отклонения пружины от вертикали **f** и удлинение пружины **x**. Необходимо найти кинетическую и потенциальную энергию системы для определения её лагранжиана.

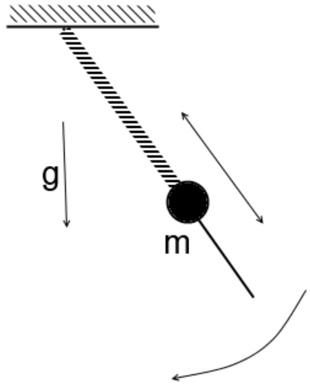

Рис. 1. Маятник на пружине

Расчёты произведены в среде математического моделирования Maple 14.

```
Ve(t):=diff(f(t),t)*x;
Vr(t):=diff(x(t),t);
Vabs:=sqrt(Ve(t)^2+Vr(t)^2);
T:=M*Vabs^2/2;
P:=-M*g*x(t)*cos(f(t))+c/2*(x(t)-b)^2;
L:=T-P;
L:=subs({x(t)=x,f(t)=f, diff(x(t),t)=X, diff(f(t),t)=F},L);
dLx:=diff(L,x);
dLX:=diff(L,X);
dLf:=diff(L,f);
dLF:=diff(L,F);
DLx:=subs({x=x(t),f=f(t), X=diff(x(t),t),       F=diff(f(t),t)},dLx);
DLX:=subs({x=x(t),f=f(t), X=diff(x(t),t), F=diff(f(t),t)},dLX);
DLf:=subs({x=x(t),f=f(t), X=diff(x(t),t), F=diff(f(t),t)},dLf);
DLF:=subs({x=x(t),f=f(t), X=diff(x(t),t), F=diff(f(t),t)},dLF);
sys:={diff(DLX,t)-DLx=0, diff(DLF,t)-DLf=0};
Resh:=solve(sys,{diff(x(t),t,t),diff(f(t),t,t)});
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{f}(t) = -\frac{2\left(\frac{d}{dt}\mathrm{f}(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right) + g\sin(\mathrm{f}(t))}{\mathrm{x}(t)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t) = \frac{c\,b + M\left(\frac{d}{dt}\mathrm{f}(t)\right)^2 \mathrm{x}(t) + M\,g\cos(\mathrm{f}(t)) - c\,\mathrm{x}(t)}{M}$$

Рис. 2. Уравнения Лагранжа второго рода

Библиографический список

1. Аладьев В. З. Основы программирования в Maple. – Таллинн, 2006.
2. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. – 1952.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч.1. – М.: 1965.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. – М.: 1966.