

УДК 517.928

## ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

© Милосердов В.В., Щепакина Е.А.

e-mail: slavmiloserdov@mail.ru

*Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва, г. Самара, Российская Федерация*

Работа посвящена математическому приему, позволяющему эффективно и достаточно просто моделировать различные колебания для некоторого класса трехмерных сингулярно возмущенных систем. Характерной особенностью рассматриваемых систем является наличие точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости [1]. Такие системы характерны для широкого круга математических моделей популяционной динамики [2, 3]. Наличие точного медленного инвариантного многообразия позволяет формировать колебания трехмерной системы посредством выбора формы траекторий двух ее двумерных проекций.

Особое внимание в работе уделено колебательным процессам, траектории которых являются траекториями-утками [4]. Следует отметить, что по сравнению с традиционными методами, этот подход кажется более простым.

Напомним, что термин «траектория-утка» первоначально был дан французскими математиками промежуточным периодическим траекториям (между малым, только что возникшим, и релаксационным циклами) уравнения Ван-дер-Поля благодаря их особой форме. Позднее этот объект был изучен для других типов сингулярно возмущенных систем, в том числе систем более высоких размерностей [5].

Согласно геометрической теории сингулярных возмущений траекторию-утку можно рассматривать как результат склеивания устойчивых и неустойчивых медленных инвариантных многообразий в одной точке поверхности срыва [1, 5]. Это возможно из-за наличия дополнительного скалярного параметра в дифференциальной системе. Если устойчивые и неустойчивые медленные инвариантные многообразия склеены во всех точках поверхности срыва одновременно, то в результате возникает непрерывное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости. Во многих случаях такие поверхности целиком состоят из траекторий-уток.

Для демонстрации предлагаемого подхода, рассматривается модель конкуренции динамики популяций. Эта модель интересна еще и тем, что в ней помимо точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, существует возможность построения второго такого многообразия. Это обстоятельство позволяет получить широкий спектр колебаний.

### Библиографический список

1. Щепакина, Е. А. Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки [Текст]/ Е. А. Щепакина, В. А. Соболев. Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. –1997. –Т. 1, № 3. – С. 151–175.
2. Ризниченко, Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст]/ Г.Ю. Ризниченко. – М.: Изд-во РХД, 2011. – 560 с.
3. Базыкин, А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций [Текст]/ А. Д. Базыкин. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
4. Мищенко, Е.Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах [Текст]/ Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.
5. Соболев, В. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике [Текст]/ В. А. Соболев, Е.А. Щепакина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 320 с.