УДК 1.16

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАЗВИТИЯ ГЕГЕЛЯ К ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Бердников В. А., Нестеров А. Ю.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), г. Самара

Не будет ошибкой считать, что теория развития В. Гегеля произвела некий перелом в сознании человека – появилось обоснование исторического, общественного и личного развития. Любая структура, созданная человеком, подчинялось этому правилу. Попробуем провести аналогию между гегелевским развитием и теорией математических структур.

Согласно теории математических структур любая структура представима как совокупность некого множества чисел, множества операций и множества отношений между объектами. Для простоты будем рассматривать только алгебраические структуры (т.е. те структуры, в которых множество отношений пусто). Также для простоты рассмотрим только конечные множества элементов.

Исходя из работ немецкого философа-математика В. Гегеля, можно выделить следующие постулаты теории развития: необходимо противопоставление амбивалентных понятий – тезиса и антитезиса. В результате этого мы получим синтез, который позднее будет представлен как новый тезис.

Введём понятие тезиса для нашей математической структуры.

Пусть количество элементов k будет простым числом. Следствием из этого является то, что наша алгебраическая структура будет полем, а значит можно будет легко построить расширение по правилу Галуа. Также запишем вид выражения, которое имеет место в данном поле:

$ax + b \equiv 0 \ (mod\ k)$,

где a и b – какие-то числа из нашего множества элементов, x – неизвестное число. Это выражение мы и будем называть тезисом для нашей структуры.

Пусть число $b = 0$. Так как наша структура есть поле, а в поле нет делителей нуля, то выражение

$ax \equiv 0 \ (mod\ k)$

перестаёт быть истинным на всех значениях $x \neq 0$. Если тезисное выражение было истинным хотя бы для одного набора чисел a, b и x, то последнее же выражение было ложно на всех значениях $x \neq 0$ для любого a, следовательно назовем его антитезисным выражением или антитезисом.

Теперь давайте посмотрим на синтез двух этих выражений.

Обозначим наше антитезисное выражение как некоторый многочлен *f(x):*

$f(x) = ax.$

Такой многочлен будем называть неприводимым и построим для него расширение. Это расширение мы и будем называть синтезом, а выражения, которые будут иметь место в этом расширении, соответственно, синтетическими выражениями.

Очевидно также, что наше поле K будет являться всего-навсего полем многочленов нулевой степени. Пусть у нас есть некоторое поле $K^/$ – факторизованное по *f(x)* поле многочленов первой степени. Тогда многочлен $g(x) = ax^0$ будет являться остатком от деления на многочлен *f(x).* Обозначим этот многочлен *g(x)* как идентификатор класса [*g(x)*]. Тогда:

$[g(x)] = [ax^0] = [a][x^0] = [a][x]^0 = a\omega^0.$

Так как наш многочлен нулевой степени, то мы получили на самом деле всего лишь обычные элементы a из поля K, просто с некоторыми «архитектурными излишествами». Именно эти излишества и позволят нам построить наше расширение, т.е. создать синтез. Очевидно, что остаток от деления на многочлен *f(x)* многочлена *f(x)* есть нуль. Или, выражаясь в терминах «архитектурных излишеств»:
$[f(x)] = [0] = [ax + bx^0]$"="$a\omega + b\omega^0$.

Данное равенство говорит, что мы создали новое поле, более мощное, чем изначальное. Знак "=" говорит, что это не чисто равенство, а отображение старого многочлена *f(x)* на новый элемент нового поля.

Таким образом, мы построили расширение или синтез (в терминах гегелевской теории развития). Также можно заметить, что в новом поле наш многочлен *f(x)* имеет корень, т.е. он из синтетического выражения стал тезисным выражением.

В данной работе была проведена аналогия между идеями развития Гегеля и поведением расширения математической структуры. Мы показали, что схема «тезис + антитезис -> синтез» справедлива и для данного раздела математики.