УДК 517.951

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦЕВЫМИ И ОДНОСТОРОННЕ ЛИПШИЦЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© Шувалова Е.И., Бородачева Е.В.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: ektshuvalova@gmail.com

В работе рассматриваются задачи Коши для дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \mu f(t, x), \ \ x(0) = x_0 \tag{1}$$

$$\dot{\xi} = \mu f_o(\xi), \ \ \xi(0) = x_0 \tag{2}$$

Как известно, для этих задач при выполнении ряда условий, в частности условия липшицевости по x функций f и f_0, имеет место теорема о близости решений $x_\mu(t)$ и $\xi_\mu(t)$ этих задач на отрезке $[0; \frac{1}{\mu}]$ (принцип усреднения Крылова – Боголюбова).

Если же функция f из правой части задачи (1) является не липшицевой, то, очевидно, что теорема усреднения Крылова – Боголюбова не дает ответ на вопрос о близости решений задач (1) и (2).

Но отметим, что если функция f из правой части задачи (1) является односторонне липшицевой, то при выполнении ряда условий на правой части задач (1) и (2) имеет место теорема Крылова – Боголюбова Прежде чем привести здесь эту теорему, напомним определение OSL условия.

Определение: Функция

$$f : D \subset R^m \to R^m$$

называется односторонне липшицевой, если существует const L такая, что

$$\forall x, y \in D: \ <x - y, f(x) - f(y)> \le L \cdot ||x - y||^2$$

Теорема:

Предположим выполнение следующих условий:

1) f – непрерывна по (t, x) на $R_+ \times B(x_0, r)$;

2) f – липшицева по x с const Липшица $l > 0$, т. е $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, r), \forall t \in R_+ \ \exists l > 0 : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le L \cdot \|x_1 - x_2\|$;

3) $\|f(t, x)\| \le c \quad \forall (t, x) \in R_+ \times B(x_0, r)$, c const $c < r$;

4) равномерно по $\xi \in B(x_0, r) \exists$ среднее

$$f_0(\zeta) = \lim_{\triangle \to 0} \frac{1}{\triangle} \int_0^{\triangle} f(t, \zeta) dt$$

т. е. выполняется условие:

$$\forall \gamma > 0 \ \exists \triangle_0 > 0 \ \forall \triangle > 0 \ \forall \zeta \in B(x_0, r): \triangle > \triangle_0 \Rightarrow \left\| \frac{1}{\triangle} \int_0^{\triangle} f(t, \zeta) dt - f_0(\zeta) \right\| < \gamma$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mu_0 > 0$ такое, что $\forall \mu \in (0; \mu_0]$ и для решения $x_\mu(t)$ задачи (1), и для решения $\xi_\mu(t)$ задачи (2) выполняется:

$$\left\| x(t) - \zeta_\eta(t) \right\| < \varepsilon, t \in [0; \frac{1}{\mu}].$$

Библиографический список

1. Donchev T., Slavov L. Averaging method for one – sided Lipschitz differential inclusions with generalized solutions // SLAM J / Control OPTIM. 1999. V. 37, № 5. P. 1600–1613.

2. Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SLAM J / Control OPTIM. 1998. V. 36, № 2. P. 780–796.

3. Филатов О. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Самара: Самарский государственный университет, 1999.