

УДК 517.928

ЯВЛЕНИЕ МНОГОГО ИСЧЕЗНОВЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИРУСОЛОГИИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© Елистратова А.С., Щепаккина Е.А.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

e-mail: elistratova.ssau@gmail.com

В данной работе исследуется модель популяционной динамики следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bx(x + y) - h(x)f(v), \\ \dot{y} = h(x)f(v) - dy, \\ \dot{v} = \bar{\sigma}y - \bar{m}v, \end{cases}$$

где $x(t)$ – концентрация незараженных бактерий; $y(t)$ – концентрация зараженных бактерий; $v(t)$ – свободные вирусы; a, b – коэффициенты репродукции для бактерий и вирусов, соответственно, $b = \frac{a}{K}$, где K – пропускная способность среды; α – константа скорости контакта бактерий с вирусами. Функции $h(x)$ и $f(v)$ заданы следующим образом:

$$h(x) = \frac{x}{1 + \mu x}, \quad f(v) = \alpha v(1 + \eta v^p), \quad \eta > 0, p > 0, \alpha > 0, \mu > 0.$$

Для изучения динамики популяций бактерий и вирусов в зависимости от значений параметров рассматриваемой модели необходимо найти особые точки данной дифференциальной системы и исследовать их на устойчивость [1]. В рамках данной работы рассматривается случай $p = 1$.

В предположении $y = 0$ имеем $v = 0$, тогда у системы есть две особые точки $A_1 = (0, 0, 0)$ и $A_2 = (K, 0, 0)$. С точки зрения бифуркационных процессов обе точки не представляют интереса, так как их тип и устойчивость определяются однозначно.

В предположении $y \neq 0$ система имеет еще одну особую точку, в окрестности которой может наблюдаться бифуркация Андронова – Хопфа. В работе получены необходимые условия бифуркации рождения цикла в виде соотношения между значениями параметров динамической системы. Качественный анализ системы дополнен ее численным исследованием [1; 2].

Проведенное исследование и полученные графики показали, что в ответ на изменение некоторых параметров в динамической системе наблюдается явление мнимого исчезновения, когда численности популяций снижаются до практически нулевых значений и остаются в таком состоянии длительное время. После этого наблюдаются резкие скачки численности популяций бактерий и вирусов от ничтожно малых к высоким показателям. Такое явление следует учитывать, например, при тестировании людей (или животных) на предмет выявления возможных заболеваний и вирусных инфекций. Если забор биологического материала у заболевшего человека (или животного) происходит в период, соответствующий периоду мнимого исчезновения, когда показатели численности вирусов или патогенных бактерий почти равны нулю («в пределах нормы»), то факт болезни и ее причина не будут установлены [3].

Явление мнимого исчезновения основано на следующих факторах: неустойчивость состояния равновесия и существование устойчивого предельного цикла в физически допустимой области. Продолжительность периодов низкой численности популяций

существенно зависит от того, насколько близко предельный цикл прижимается к границе физически допустимой области и к началу координат, что, в свою очередь, зависит от выбора значений параметров динамической системы.

Библиографический список

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии: учеб. пособие. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 184 с.
3. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер.: Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.